Lehrbuch

der

Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde.

Von

Adolf Göller,

Architekt, Professor an der K. technischen Hochschule zu Stuttgart.



Mit

21 Lichtdruckfiguren

auf

vier Tafeln.

Mit

171 Textfiguren

und

200 Uebungsaufgaben.

Stuttgart.

Paul Neff Verlag.

2° Math. A. 39 ?

Bayerische Staatsbibliothek
<36650973840019

Lehrbuch

der

Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde.

Von

Adolf Göller,

Architekt, Professor an der K. technischen Hochschule zu Stuttgart.

Mit 4 Lichtdrucktafeln, 171 Textfiguren und 200 Uebungsaufgaben.

Stuttgart.

Paul Neff Verlag.

1895.

179 X

2° Math. A. 397

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Hofbuchdruckerei Greiner & Pfeiffer in Stuttgart.

4

Vorwort.

Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde haben manche frühere Bearbeitung aufzuweisen; aber nach dem Ausscheiden solcher Werke, welche sich nur mit den Elementen befassen, bleiben nur wenige übrig. Auch von diesen dürfte den Forderungen, welche der Techniker oder Kunsthandwerker zu stellen hat, keines ganz entsprechen, da sie alle die Beleuchtungskunde oder Lehre von den Abstufungen der Lichtstärke als einzigen Gegenstand oder als Hauptsache behandeln und in Beziehung auf die Schattenkonstruktion oder Lehre von den Schattengrenzen, die für das praktische Schaffen weit wichtiger ist, entweder auf die darstellende Geometrie verweisen oder deren Lösungen nur als Zugabe in diejenigen der Beleuchtungskunde verflechten, wobei eine Uebersicht über die Operationen, die zur Bestimmung der Schattengrenzen führen, unmöglich gewonnen werden kann. Ein Buch, das die Schattenkonstruktionen selbständig und sowohl mit der für das praktische Schaffen genügenden Vollständigkeit, als mit der wünschenswerten Entwicklung des Schwierigeren aus seinen einfachen Grundlagen behandelt, giebt es nicht.

Die Wege, welche beim Aufsuchen einer Schattengrenze einzuschlagen sind, werden ausschliesslich vom beschatteten Körper, nicht auch vom schattenwerfenden bestimmt. Daher ist es möglich, alle denkbaren Konstruktionen nach den verschiedenen Arten von Flächen zu ordnen und für jede Flächenart an der Hand weniger Beispiele die Hilfsmittel zu zeigen, durch welche alle Probleme der Beschattung derselben Flächenart gelöst werden können. Dieser Lehrgang ist im vorliegenden Buch gewählt; für jeden durch das praktische Schaffen gebotenen oder frei erfundenen Fall der Beschattung bietet es, sobald das Gesetz der beschatteten Fläche erkannt ist, eine Anweisung zur Lösung an leicht aufzufindender Stelle, und während bisher die Schattenkonstruktionslehre mehr nur eine Aufeinanderfolge zufällig ausgewählter Probleme war, bilden hier die Konstruktionen (nach der im zehnten Kapitel eröffneten Uebersicht) als die verschiedenen Anwendungen zweier Grundgedanken mit je vier Fällen ein in sich abgeschlossenes System.

Für alle Arten von Flächen ist der Grundgedanke, der bei der Schattenkonstruktion zur Verwertung gelangt, durch ein perspektivisches Bild zur Anschauung gebracht, das meist schon für sich allein, ohne wörtliche Erklärung, zur Kenntnis der Konstruktion führen könnte. Als Beispiele sind so oft als möglich Gebilde aus der praktischen bautechnischen, maschinentechnischen oder kunstgewerblichen Thätigkeit gewählt; die Beschränkung auf solche Formen ausschliesslich wäre jedoch der Darstellung mancher Konstruktion minder förderlich gewesen.

Alle Schattenkonstruktionen für die häufiger in der Technik und im Kunsthandwerk verwerteten Flächen sind so erklärt, dass sie nur die normalen Vorkenntnisse aus der darstellenden Geometrie erfordern; dazu sind die notwendigen Grundlagen aus dieser immer kurz wiederholt. Nur bei den seltener in der Praxis auftauchenden, mehr nur wissenschaftlich interessanten Problemen, worunter einige bisher nie behandelte, musste der Wortlaut der Erklärung und die Darstellung durch Figuren etwas grössere Anforderungen an das räumliche Anschauungsvermögen stellen, um nicht für den Geübten ermüdend zu werden. Die Nummern der hierher gehörigen Artikel, die beim ausschliesslichen Ausgehen auf das im praktischen Schaffen Notwendige übergangen werden können, sind im Inhaltsverzeichnis durch Sterne erkennbar gemacht.

Bei allen Flächen ist der allgemeine Fall dem besonderen vorangestellt und dieser als eine Vereinfachung des ersten behandelt. (Der umgekehrte Weg wäre vielleicht anfangs bequemer, würde aber das Erfassen des Hauptgedankens nur hinausschieben, ohne es zu erleichtern, und dem Ganzen gegenüber ein Umweg sein.) Hierbei mussten, wenn auch die allgemeinen Lösungen noch so eingehend Stufe um Stufe aus ihren Elementen aufgebaut wurden, schwierigere Probleme oft leichteren vorangehen, wie z. B. bei Schatten auf ebenbegrenzten Körpern der schwierigere allgemeine Fall dem leicht zu schattierenden vertikalen Prisma voranzustellen war. Wenn hierdurch manchem Studierenden eine rasche Anfangszunahme der Anforderungen an die Raumanschauung fühlbar werden mag (z. B. von Art. 17 zu Art. 18), so kann hier nicht die wörtliche Erklärung möglichst vieler Einzellösungen helfen, da sie immer dieselbe wäre, sondern nur die selbständige Behandlung zuerst leichter Probleme auf Grund der gegebenen und an einem Beispiel gezeigten Anweisung mit allmählichem Fortschreiten zum Schwierigeren. Hierzu soll die Sammlung von Uebungsaufgaben am Schluss des Buchs dienen. Möglichst reichhaltig besonders im Gebiet der einfachen Formen, soll sie in zahlreichen leichteren

und minder leichten Problemen die kleineren Stufen darbieten, durch deren müheloses Ueberschreiten die Raumanschauung allmählich sich befestigt und erweitert, bis sie auch die schwierigsten Fälle zu überwinden vermag. Der spätere Teil der Sammlung dürfte durch manches unmittelbar der Praxis entnommene Nachdenken erfordernde Problem auch bei dem Sachverständigen Interesse erwecken.

Die Beleuchtungskunde oder Lehre von den Lichtstufen erscheint im Vorliegenden mit scharfer Sonderung von der Schattenkonstruktionslehre ausschliesslich als Lehre von der Normalkugel und ihrer Verwertung für andere Körper. Die Entstehung dieser Theorie liegt nur wenige Jahrzehnte zurück.

Nachdem ältere französische Autoren (Monge, Olivier, Leroy) schon seit Ende des vorigen Jahrhunderts den Begriff der Linien gleicher Helle oder Lichtstufenlinien auf den Flächen festgestellt und diese Linien zwar für die Kugel bestimmt, aber zu einem praktisch verwertbaren Resultat für andere Flächen auf dem eingeschlagenen Weg der Rechnung nicht vorzudringen vermocht hatten, erschien im Jahr 1855 als Festschrift der polytechnischen Schule zu Stuttgart eine „Abhandlung über das Schattieren der Oberflächen regelmässiger Körper" von J. Egle, damals Professor an dieser Schule, später Vorstand der Baugewerkeschule und Hofbaudirektor in Stuttgart. Diese Abhandlung enthält auf dem engen Raum von 18 Seiten mit einer Figurentafel, aber doch mit allen wesentlichen Zügen, die im Vorliegenden weiter ausgeführte Bestimmung der Lichtstufenlinien der Kugel durch Einteilung des Durchmessers in gleiche Teile und die Verwertung der hiedurch erhaltenen Kugel für ebenbegrenzte Körper, gerade Kreiskegel- und Kreiscylinderflächen, Drehungsflächen und Schraubenflächen, endlich das Schattieren auf Grund der erhaltenen Linien mit gleich starken Tonschichten. In Beziehung auf die Einführung eines einfachen geometrischen Verfahrens für die Linien gleicher Helle auf den meist auftretenden Flächen gebührt also dieser Schrift der Vorrang vor allen ähnlichen.

Im Jahr 1862 folgte „Die Lehre von den geometrischen Beleuchtungskonstruktionen" von Franz Tilscher, Professor an der K. K. Genieakademie in Wien. In diesem verdienstvollen, aber etwas anstrengend zu studierenden Werk ist die Konstruktion der Lichtstufenlinien ohne Hilfe der Normalkugel und mit Ausdehnung auf schiefe Cylinder- und Kegelflächen, das dreiachsige Ellipsoid, das hyperbolische Paraboloid, die gewundene Säule, die schraubenförmige Röhre durchgeführt. Tilscher spricht von seinem Verfahren als von einer direkten Darstellung der Schattierung gegenüber der Zuhilfenahme der Kugel; doch ist einleuchtend, dass man ohne Massstab nicht messen kann, dass er also die Lichtstufen nur mit einem andern Massstab misst. Dieser andere Massstab ist teils ein Bündel von Ebenen mit gemeinschaftlicher Schnittlinie, teils ein System von geraden Kreiskegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze und einem Lichtstrahl als gemeinschaftlicher Achse. Jeder solche Kegel ist auf seiner ganzen Oberfläche gleich stark beleuchtet, und zwar wird seine Lichtstufe abhängen von dem Winkel, den seine Mantellinien mit der Achse einschliessen. Es wird Kegelflächen mit ganzzahligen Lichtstufen geben, und diese werden ähnlich benützt werden können wie die ganzzahligen Lichtstufenkreise der Kugel. Bei der beliebigen Kegelfläche gestaltet sich die Lösung dem Grundgedanken nach sehr einfach; legt man durch die Spitze des gegebenen Kegels einen ganzzahligen Lichtstufenkegel und zieht in irgend einer Schnittebene beider Kegel eine gemeinschaftliche Tangente an beide Schnittlinien, so hat der Berührungspunkt auf dem gegebenen Kegel die ganzzahlige Lichtstufe des Hilfskegels. Der Gedanke solcher Hilfskegel war übrigens ebenfalls schon in der Egle'schen Abhandlung (Seite 10) ausgesprochen worden.

Die Tilscher'schen Konstruktionen sind entschieden schwieriger und zeitraubender als diejenigen mit der Normalkugel, abgesehen vielleicht von der schiefen Kegelfläche, der sich sein Verfahren am besten anschliesst. Tilschers Vorwurf gegen die Normalkugeltheorie, dass bei veränderter Lichtrichtung zuvor eine neue Hilfskugel zu zeichnen sei, trifft allerdings zu, wogegen seine Methode für diesen Fall keine neuen Hilfsmittel erfordert; aber die Veränderung der Lichtrichtung ist sehr selten, und die durch die neue Kugel erwachsende Mehrarbeit wenigstens bei den schwierigeren Konstruktionen verhältnismässig gering. Tilscher erhebt ferner den Vorwurf, dass die Theorie der Hilfskugel „nicht allgemein durchgeführt sei, da sie für windschiefe Flächen keine geeigneten und genügenden Anhaltspunkte biete". Aber schon in der Egle'schen Abhandlung waren doch die windschiefen Schraubenflächen betrachtet; sie hatte auch ausdrücklich „eine vollständige Durchführung des gegebenen Themas nicht angestrebt" und nur aus diesem Grund „das Herbeiziehen von anderen Arten von Flächen unterlassen". Im vorliegenden Buch sind auf Grund der Normalkugeltheorie nicht nur alle von Tilscher neu gewählten Flächen behandelt, sondern noch andere mit neuen besonderen Lösungen (Konoide, Röhrenflächen mit beliebigen Normalschnitten u. s. w.); endlich sind zum erstenmal allgemeine Verfahren für die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten, sogar gesetzlosen, nur durch Höhenkurven gegebenen Flächen gezeigt (Art. 111 bis 113).

Die in der Egle'schen Abhandlung in den Grundzügen gegebenen Konstruktionen wurden weiter ausgeführt von C. Riess, Professor an der K. Baugewerkeschule zu Stuttgart (Schattierungskunde, Stuttgart 1871). Von den schwierigeren Flächen erscheinen hier neu behandelt die schraubenförmige Wulstfläche und das hyperbolische Paraboloid als Regelfläche aufgefasst. Die ausschliesslich auf die Beleuchtungskunde gerichtete Schrift legt übrigens den Hauptwert nicht auf die Konstruktionen, sondern auf die Zahlenwerte für die Lichtstufen und eine neue, möglichst mit der Wirklichkeit übereinstimmende Lage der Lichtstufenlinien auf der Normalkugel. In der letzten Beziehung ist auf die Anmerkung am Fuss der Seiten 141 bis 143 des Vorliegenden zu verweisen. Gegenüber den von Riess berechneten vier Hauptwerten der Lichtstufen ($h = 1$, $k = {}^1/_6$, $r = {}^1/_4$, $s = {}^1/_4$) sind im Vorliegenden

mit Begründung veränderliche Werte als zulässig erklärt (Art. 85 und 115); übrigens sind die von Riess aufgestellten Tonschichtenpläne ebenfalls nicht im Einklang mit den von ihm berechneten Hauptwerten. Schätzbare Versuche von Riess über die Licht- oder Schattenstärken, welche durch das wiederholte Auftragen eines unveränderlichen Tuschtons erreicht werden, sind im Vorliegenden (Seite 140 unten) verwertet worden.

In demselben Jahr (1871) erschien als letztes wichtigeres Werk über Beleuchtungskunde „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen“ von Dr. L. Burmester, damals Privatdozent, später Professor an der technischen Hochschule zu Dresden. In diesem Werk sind die Lichtstufenlinien oder „Isophoten“ für die „wahre“ Beleuchtung und ebenso diejenigen für eine „scheinbare“ Beleuchtung („Isophengen“) auf rechnerischem Weg, mit Hilfe der höheren Analysis abgeleitet und durch Vermittlung der neueren Geometrie graphische Konstruktionen auf die erhaltenen Resultate gegründet. Es stellt höhere Anforderungen und verfolgt nur die rein wissenschaftliche Seite der Probleme, nicht auch die Verwertung bei den im praktischen Schaffen auftretenden Gebilden. Bei diesen giebt es ja manche Cylinder- oder Kegelfläche, deren Leitlinie oder Basis, manche Drehungsfläche, deren Meridian nicht durch eine Gleichung ausgedrückt werden kann, also dem rechnerischen Verfahren unzugänglich ist.

Die „scheinbare“ Beleuchtung, mit der sich schon die oben genannten französischen Autoren die Aufgabe unnötigerweise erschwert haben, ist nach Burmester (S. 2) „diejenige, welche von der Stellung der beleuchteten Flächenelemente zur Lichtrichtung und ausserdem von der Stellung derselben gegen die Sehrichtung abhängt, und sich also mit der Lage des Gesichtspunktes bei unveränderter Lichtrichtung ändert,“ wogegen bei der „wahren“ Beleuchtung die Richtung der Sehstrahlen (oder Projektionslote) nicht in Betracht kommt. Eine mit der scheinbaren Beleuchtung durchgeführte Darstellung sei „in grösster Uebereinstimmung mit dem Eindruck, welchen die natürliche Beleuchtung einer schwachglänzenden Fläche bewirkt“.

Warum im Vorliegenden die „scheinbare“ Beleuchtung nicht hereingezogen wurde, ist am Anfang des Art. 81 ausgesprochen. Die Mitwirkung der Sehstrahlenrichtung gegenüber den vom Licht getroffenen Flächen hat bei den Lichtstufen der „Verkürzungen“ des Kunstmalers volle Berechtigung, nicht aber beim Schattieren technischer Gebilde. Die Darstellungen von solchen werden durch die „scheinbare“ Beleuchtung eher in ihrer Anschaulichkeit beeinträchtigt; sie machen weniger den Eindruck mattglänzender als denjenigen unrichtig schattierter Körper, und der Aufwand an graphischer Arbeit, den die Bestimmung der wirklichen Lichtstufen erfordert, ist auch ohne die Vermehrung durch eine solche Zugabe wahrlich gross genug.

Ausser den besprochenen Werken hat die Litteratur noch verschiedene kleinere Abhandlungen über die Lichtstufenlinien einzelner Flächenarten aufzuweisen, der Inhalt dieser kleineren Schriften ist jedoch zumeist in jenen verwertet.

Stuttgart, im August 1895.

Der Verfasser.

Berichtigungen und Ergänzungen.

In Figur 18c, Seite 18, ist im Aufriss auf der vertikalen im Licht befindlichen Turmwand eine dreiseitige Schlagschattenfläche über dem Punkt p' unschraffiert geblieben; ihre Grenzen sind vorhanden.

In Figur 25b, Seite 22, sind in der Aufrisspartie links vom Schlussstein zwei schmale Schlagschattenstreifen, welche die Fortsetzung der rechts vorhandenen bilden, unschraffiert geblieben.

Seite 20, linke Spalte unten, nach „im Grundriss gezogenen Lichtstrahls" ist beizufügen: „wie auch aus dem Früheren folgt, dass die Vertikalkanten in denjenigen Ecken der Grundrissfigur, welche von Lichtstrahlen gestreift werden, Körperschattengrenzlinien sind."

Seite 22, rechte Spalte unten, nach „bedarf keiner Erklärung." ist beizufügen: „Aus dem Früheren folgt, dass diejenigen Horizontalkanten des Prismas, welche in der Seitenprojektion von Lichtstrahlen gestreift werden, Körperschattengrenzlinien sind, ebenso die Mantellinien von Cylinderflächen in den Berührungspunkten tangierender Lichtstrahlen."

In Figur 25c, Seite 23, sind an der in der Seitenansicht erscheinenden Lukarne die im Text erwähnten, von rechts oben nach links unten gerichteten Lichtstrahlen weggeblieben.

In Figur 65d, Seite 56, sollte die ganze Schattenfläche der Seitenprojektion als Körperschatten, nicht als Schlagschatten schraffiert sein.

Seite 122, rechte Spalte unten, nach „Weg weniger zuverlässig." ist beizufügen: „Auch die Stabformen, welche nach Art. 106 durch schraubende Bewegung senkrecht zur Achse stehender oder in der Achse liegender Figuren entstehen, lassen sich als Röhrenflächen mit unveränderlichen Erzeugenden auffassen und schattieren; denn wenn man von den beschriebenen Schraubenlinien eine beliebige auswählt und normal zu dieser die Fläche an verschiedenen Punkten schneidet, so werden auch diese Schnittfiguren kongruent. Im allgemeinen werden sie schwierig zu bestimmen sein; doch giebt es Fälle, in denen der Normalschnitt genügend genau als solcher eines schiefen Cylinders mit der beweglichen Figur als Basis erhalten wird."

Inhalt.

Alle zu einem Artikel gehörigen Figuren tragen die Nummer dieses Artikels und sind durch a b c ... unterschieden.

Einleitung.

I. Aufgaben und Wesen der Schattierung.

Seite

Art. 1. Zweck der Schattierung in den Darstellungen technischer Gebilde . . . 1
» 2. Lichtflächen und Schattenflächen. Körperschatten und Schlagschatten . . . 1
» 3. Körper- oder Selbstschattengrenzen und Schlagschattengrenzen 1
» 4. Abstufungen der Licht- und Schattenstärken . . . 2
» 5. Zwei Vollendungsgrade der Schattierung . . . 2
» 6. Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde. Beide sind Anwendungen der darstellenden Geometrie . . . 2
» 7. Parallelbeleuchtung und Centralbeleuchtung. Eingebürgerte Lichtstrahlrichtung der ersten . . . 3

A. Schattenkonstruktionslehre oder Lehre von den Schattengrenzlinien.

II. Schlagschatten auf den Grundebenen und Selbstschatten von Körpern mit ebenen Flächen.

Art. 8. Hilfsmittel aus der darstellenden Geometrie . . . 4
» 9. Schlagschatten eines Punktes auf den Grundebenen . . . 6
» 10. Schlagschatten gerader und gekrümmter Linien . . . 6
» 11. Schlagschatten eines Körpers mit ebenen Grenzflächen . . 7
» 12. Selbstschatten auf Körpern mit ebenen Flächen . . . 9
» 13. Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss . . . 10
» 14. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche, geworfen auf die Grundebenen . . . 12

III. Schlagschatten auf eben begrenzten Körpern. Allgemeine Lösung.

Art. 15. Schlagschatten eines Punktes auf einem ebenen Polygon oder einer anderen ebenen Figur . . . 12
» 16. Schlagschatten eines Punktes auf einem Vielflach . . . 13
» 17. Schlagschatten einer geraden oder gekrümmten Linie auf einem Vielflach. Schlagschattenpunkte einer Linie auf einer andern . . . 13
» 18. Schlagschatten eines Vielflachs auf einem andern Vielflach und Selbstbeschattung von Körpern mit ebenen Flächen. Schatten im Innern hohlgedachter ebenbegrenzter Körper . 15
» 19. Die Umkehrung der in Art. 18 erklärten allgemeinen Lösung 19
» 20. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem Vielflach . . . 19
» 21. Hilfssätze für die Schatten auf Körpern mit ebenen Flächen 19
» 22. Schatten auf vertikalstehenden prismatischen und cylindrischen Flächen . . . 20
» 23. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene . . . 21

IV. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen parallel zum Grundschnitt.

Art. 24. Grundlagen aus der darstellenden Geometrie . . . 21
» 25. Die allgemeine Lösung nicht der kürzeste Weg. Benützung der Seitenprojektion . . . 21
» 26. Folgerungen für die Schattengrenzlinien . . . 24

V. Schatten auf gekrümmten Flächen. Allgemeine Lösung.

Seite

Art. 27. Definitionen aus der darstellenden Geometrie und Beispiele technischer Verwertung . . . 25
» 28. Allgemeine Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen . 27
» 29. Anwendung auf Regelflächen . . . 27
» 30. Anwendung auf Drehungsflächen . . . 28
» 31. Selbstbeschattung gekrümmter Flächen . . . 29
» 32. Schatten im Innern hohler Körper mit gekrümmter Oberfläche 30
» 33. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem andern solchen Körper . . . 32
» 34. Folgerungen für den Verlauf der Schattenkurven (s. auch Art. 69a am Schluss) . . . 32
» 35. Mängel der Lösung . . . 32
» 36. Umkehrung der allgemeinen Lösung durch Benützung der vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen . . . 32
» 37. Zuhilfenahme der Seitenprojektion . . . 33
» 38. Zuhilfenahme von weiteren Projektionsebenen und von Umklappungen . . . 33

VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

Art. 39. Cylinderflächen senkrecht zu einer Grundebene behandelt wie Prismen . . . 34
» 40. Verlassen der allgemeinen Lösung bei Kegel- und schiefgerichteten Cylinderflächen . . . 35
» 41. Schatten auf Kegelflächen . . . 35
» 42. Der vertikale Kreiskegel mit Spitze nach oben . . . 37
» 43. Der schiefe Kreiskegel mit Spitze nach unten . . . 37
» 44. Der vertikalstehende hohle Kegel . . . 37
» 45. Der gerade Kreiskegel senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in die Vertikalebene . . . 39
» 46. Die hohle Kegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt 39
» *47. Die beliebig gerichtete Kegelfläche mit beliebig gestalteter, schiefgerichteter Basis . . . 40
» 48. Schatten auf schiefgerichteten Cylinderflächen . . . 40
» 49. Der beliebig schiefgerichtete Cylinder mit Basis in einer Grundebene . . . 41
» 50. Der horizontale gerade Cylinder schief gerichtet (wagrecht liegende Röhre) . . . 42
» 51. Der horizontale Cylinder schief abgeschnitten (schiefes Tonnengewölbe) . . . 43
» 52. Der schiefgerichtete Cylinder parallel zur Vertikalebene, vertikal und gerade abgeschnitten (steigendes Tonnengewölbe im Längenschnitt) . . . 43
» 53. Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene ohne Basis, aber mit bekanntem Normalschnitt . . . 43
» *54. Der beliebig schief gerichtete Cylinder mit beliebig geformter schiefstehender Basis . . . 44

VII. Schatten auf Drehungsflächen.

Art. 55. Erstes Verfahren für Körper- und Schlagschattengrenzen: Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene nach der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt 45
» 56. Zweites Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kreiskegeln. . . . 45

Seite

Art. 57. Drittes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln 47
» 58. Körperschattengrenzen auf Wulstflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln 48
» 59. Viertes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe des Schlagschattens auf einer Ebene senkrecht zur Achse 48
» 60. Fünftes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe der Normalkugel 49
» 61. Zweites Verfahren für Schlagschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe der kongruenten Schlagschatten auf Parallelkreisebenen 49
» 62. Drittes Verfahren für Schlagschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe zweier Schlagschatten auf einer Ebene senkrecht zur Achse 52
» 63. Sätze über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse 53
» 64. Schatten auf Drehungsflächen mit schiefgerichteter, aber einer Grundebene gleichlaufender Achse 53

VIII. Schatten auf Kugelflächen.

Art. 65. Die Umklappung oder schräge Seitenansicht als Hilfsmittel, elliptische Projektionen der Schnittkreise zu umgehen . . 54
» 66. Körperschattengrenzen auf der Vollkugel und Hohlkugel . 57
» 67. Behandlung der Kugel als Drehungsfläche 59
» 68. Oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Ellipse und ihre Tangenten 59

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Art. *69. Die Flächen zweiter Ordnung 61
» 70. Schraubenflächen, Wendelflächen. Die Schrauben und die schraubenförmig verdrehten Stabformen 66
» *71. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Querschnitt 69
» 72. Röhrenflächen mit beliebigem, aber unveränderlichem Normalschnitt 73
» *73. Röhrenflächen mit veränderlichem Normalschnitt . . . 75
» *74. Rückungsflächen mit gleichgerichtet fortschreitender, unveränderlicher Erzeugenden. Steigendes Tonnengewölbe mit bogenförmiger Scheitellinie. Gewundene Säule . . 76
» *75. Rückungsflächen mit veränderlicher, aber immer gleichgerichteter Erzeugenden 78
» *76. Rückungsflächen mit drehend fortschreitender, veränderlicher oder unveränderlicher Erzeugenden 80
» *77. Konoidische Flächen; windschiefer Hausteinbogen in cylindrischer oder ebener Mauer 80

X. Rückblick auf die Lehre von den Schattengrenzlinien.

Art. 78. Zwei Grundgedanken in der Schattenkonstruktion . . . 82
» 79. Die unmittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle 83
» 79a. mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung 83
» 79b. mit vertikalprojizierenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung . 83
» 79c. mit seitlich projizierenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung . 83
» 79d. mit Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung gelegt durch die Spitze eines Kegels oder die Mantellinien eines schiefgerichteten Cylinders 83
» 80. Die mittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle . 84
» 80a. Eine Körperschattengrenze erhalten aus ihrem Schlagschatten auf einer Grundebene 84
» 80b. Eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, Röhren- und Rückungsflächen erhalten durch Hilfskegel oder Hilfskugeln oder Hilfscylinder 84
» 80c. Eine Schlagschattengrenze auf Drehungs- und Rückungsflächen erhalten durch die Schlagschatten auf Parallelkreisebenen, beziehungsweise auf Ebenen der fortrückenden Figur 85
» 80d. Eine Schlagschattengrenze erhalten aus den beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Grundebene werfen 85

B. Beleuchtungskunde oder Lehre von den Lichtstufen.

XI. Die Normalkugel.

Seite

Art. 81. Das Gesetz der Lichtstufen 86
» 82. Lichtstufen auf der Lichtseite der Kugel 87
» 83. Reflexlichtwirkung, Lichtstufen auf der Schattenseite der Kugel . 87
» 84. Lichtstufen im Schlagschatten auf der Kugel 88
» 85. Die vier Hauptlichtstufen 88
» 86. Abweichende Annahme der Reflexrichtung für Gebilde auf ebener Wand 89
» 87. Zusammenstellung aller Lichtstufen 90
» 88. Darstellung der Normalkugel mit der eingebürgerten Lichtrichtung . 90

XII. Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

Art. 89. Die Normalkugel als Lichtstufenmassstab 93
» 90. Lichtstufen am Aeussern und im Innern hohlgedachter Körper . 93
» 91. Körper mit ebenen Grenzflächen 94
» 92. Gerade Kreiskegel und Kreiscylinder mit Achse parallel zu einer Grundebene 97
» 93. Die Drehungsfläche mit vertikaler Achse 99
» 94. Sätze über den Verlauf der Lichtstufenlinien auf solchen Flächen . 102
» 95. Die Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene 102
» 96. Die Drehungsfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt 105
» 97. Drehungsflächen mit schiefgerichteten Achsen 106
» 98. Die vertikale Cylinderfläche mit beliebiger Basis 108
» 99. Die schiefgerichtete oder die horizontale Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene mit beliebigem Normalschnitt . 108
» 100. Die beliebig schiefgerichtete Cylinderfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis 109
» 101. Der gerade elliptische Kegel mit vertikaler Achse . . . 109
» 102. Die Kegelfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis 110
» *103. Das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das einmantelige elliptische Hyperboloid 111
» *104. Das windschiefe Viereck oder hyperbolische Paraboloid . 111
» 105. Schraubenflächen, Wendelflächen 112
» *106. Stabformen mit drehend fortschreitendem Querschnitt oder Achsenschnitt. Ringförmig steigendes Tonnengewölbe . 115
» *107. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Normalschnitt 118
» 108. Die Röhrenfläche mit beliebigem Normalschnitt; geschweifte Gesimse auf ebener und gekrümmter Wand. Die Röhrenfläche mit veränderlichem Normalschnitt 121
» *109. Die Rückungsflächen. Die gewundene Säule 123
„ *110. Konoidische Flächen. Windschiefer Mauerbogen. Kugelkonoid . 124
» *111. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, erstes Verfahren: mit geometrischen Orten auf der Normalkugel . 125
» *112. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, zweites Verfahren: mit berührenden Cylinderflächen. Gebilde durch Höhenkurven gegeben 131
» *113. Bemerkungen zu den besonderen und allgemeinen Verfahren 133

XIII. Auftragen der Lichtstufen mit Strichlagen oder mit dem Pinsel.

Art. 114. Getrennte Streifen gleicher Lichtstärke 136
» *115. Zahlenbewertung der Lichtstufen 137
» *116. Wiedergabe der Lichtstufen 138
» *117. Schattierung mit Strichlagen 139
» *118. Schattierung mit Maltönen 140
» 119. Tonschichtenpläne für das Schattieren mit dem Pinsel . 142
» 120. Grosse ebene Flächen 147
» 121. Luftperspektive 147
» 122. Winke für das Zeichnen, Malen und Schraffieren . . . 147
» 123. Auftragen der Lichtstufen mit je einem Ton 148

Uebungsaufgaben (mit Abbildungen) . 149—160

Einleitung.

I. Aufgabe und Wesen der Schattierung.

1. *Zweck der Schattierung in den Darstellungen technischer Gebilde.*

Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde sind Hilfswissenschaften zur Darstellung der technischen Gebilde. Viele Formen der Architektur, der Kunstgewerbe und des Ingenieurbauwesens können nur durch Aufnahme von Licht und Schatten in ihre Darstellung so anschaulich abgebildet werden, dass man aus dem Bilde ihre ästhetische Wirkung im ausgeführten Zustand genügend beurteilen kann; ebenso können viele Gebilde des Bau- und Maschineningenieurwesens nur mit Licht und Schatten so deutlich dargestellt werden, dass man den Zusammenhang ihrer Teile mühelos übersieht und nach der Zeichnung sicher genug arbeiten kann.

2. *Lichtflächen und Schattenflächen. Körperschatten und Schlagschatten.*

Als Einführung in den Gegenstand ist eine elementare Betrachtung über das Wesen der Körperschattierung anzustellen, und zwar derjenigen, die bei Sonnenschein oder anderem Herrschen nur einer einzigen starken Lichtquelle auftritt. Denn eine solche Beleuchtung wird beim Schattieren der technischen Gebilde immer vorausgesetzt; diejenige durch verschiedene gleichzeitig wirkende Lichtquellen oder durch gedämpftes, von allen Seiten nahezu gleichmässig wirkendes Licht findet sich nur in der künstlerischen Malerei und würde für technische Gebilde schwer herzustellende und dazu meist minder anschauliche Bilder ergeben.

Es sei im Sonnenschein etwa eine Pyramide aus Gips oder weissem Marmor oder einem andern weissen, nicht glänzenden Material aufgestellt oder aufgehängt vor einer vertikalen Tafel aus demselben Material, so kommt die Schattierung zunächst zu stande dadurch, dass einige der Körperflächen von den Sonnenstrahlen *getroffen* werden, andere *nicht*. Diese letzteren sind die *Schattenflächen* der Pyramide, und zwar sind sie im Schatten oder dunkel, weil sie vom Licht *abgewendet* sind. Dieses müsste die Pyramide selber durchdringen, um zu diesen Flächen zu gelangen und würde sie dann doch nur auf der Rückseite treffen. Es giebt noch eine andere Art von Schatten. Die Pyramide wirft einen Schatten auf die weisse Tafel. Die Fläche dieses Schattens ist im Gegensatz zu den dunklen Pyramidenflächen dem Lichte *zugewendet*, und ist nur deshalb dunkel, weil die Pyramide, also ein anderer Körper, dem Licht im Wege steht. Jene Art von Schatten, welche durch Abwendung ihrer Flächen vom Licht entstehen, wie diejenigen auf den Pyramidenflächen, heissen „*Körperschatten*“ oder „*Selbstschatten*“ oder „*Eigenschatten*“; die andern, diejenigen, welche ein Körper auf einen andern wirft, deren Flächen also dem Lichte zugewendet, aber ihm zugleich verdeckt sind, werden „*Schlagschatten*“ genannt.

Ein Schlagschatten kann nicht nur von einem Körper auf einen andern geworfen sein, sondern auch von einem *Teil* eines Körpers auf einen anderen Teil *desselben* Körpers. Nimmt man anstatt der Pyramide einen Körper mit einspringenden Kantenwinkeln (z. B. ein einfaches Steinkreuz), so findet sich, dass ein vortretender Teil (ein Querarm) einen Schatten auf eine zurücktretende Fläche (den vertikalen Schaft) wirft. Man spricht in diesem Fall von „*Selbstbeschattung*“ des Körpers. „Selbstbeschattung“ und „Selbstschatten“ sind nicht zu verwechseln.

Körper- oder Selbstschattengrenzen und Schlagschattengrenzen. 3.

Zwischen den beleuchteten Flächen und den Körperschattenflächen (der Pyramide oder des Kreuzes u. s. w.) bildet sich eine Grenzlinie, aus bestimmten Kanten des Körpers zusammengesetzt; es ist die *Körperschattengrenze* oder *Selbstschattengrenze*. Ebenso hat die Schlagschattenfläche eine bestimmte Umrisslinie, welche ihre Grenze teils gegen die Lichtflächen, teils gegen die Körperschattenflächen bildet; dieser Umriss der Schlagschattenfläche heisst die *Schlagschattengrenze*.

Wenn anstatt der Pyramide ein *runder* Körper, etwa eine Kugel oder ein Cylinder, vor der Marmortafel hängend gewählt worden wäre, so hätte sich Ähnliches ergeben. Die Lichtstrahlen treffen die eine Hälfte der Kugel, die andere nicht, also ist diese dunkel. Zwischen beiden muss

wieder eine Grenze bestehen. Diese erscheint allerdings bei solchen runden Körpern dem Auge sehr verschwommen, indem der Übergang von Licht zu Schatten durch zahllose feine Zwischenstufen vor sich geht, ist aber mathematisch betrachtet doch eine scharfe Linie. Sie bildet sich — wie leicht einzusehen — da, wo die Lichtstrahlen berührend an der Kugeloberfläche vorbeistreifen; die Berührungspunkte sind eben die Punkte der Körperschattengrenze, und dieselben streifenden Lichtstrahlen zeichnen auf der Marmortafel die Grenzlinie des Schlagschattens, den die Kugel auf die Tafel wirft.

4. Abstufungen der Licht- und Schattenstärken.

Betrachtet man die Licht- und Schattenflächen genauer, so findet sich, dass sowohl im Licht als im Schatten Abstufungen der Lichtstärke bestehen. Sie rühren im Licht daher, dass die Lichtstrahlen bald senkrecht oder nahezu senkrecht, bald unter schiefem und sehr schiefem Winkel die Fläche treffen. Wo die Lichtstrahlen senkrecht auf eine Fläche treffen, da ist diese am hellsten; je kleiner der Winkel, unter dem sie der Fläche begegnen, desto dunkler erscheint die Fläche an der getroffenen Stelle. Ähnliches besteht auf den Flächen mit Körperschatten und Schlagschatten. Auf diese wirken die Strahlen des Widerscheins oder Reflexlichtes, das heisst des von den Lichtflächen anderer Körper zurückgeworfenen Lichtes, von dem später eingehender zu sprechen sein wird. Diese Strahlen treffen die Schattenflächen ebenfalls mit verschiedenen Neigungswinkeln, und so erscheinen auch diese Flächen mit verschiedenen Graden der Dunkelheit. Die vorausgesetzte Marmortafel wirft z. B. von den beleuchteten Flächen neben dem Schlagschatten noch sehr starke Reflexlichtstrahlen auf die Pyramide oder Kugel und erzeugt auf den Schattenflächen dieser Körper die erwähnte Abstufung. Die Schlagschattenfläche selber erhält aber keine Reflexlichtstrahlen, wenigstens nicht von naheliegenden Körpern. Daraus ergiebt sich, dass der Schlagschatten immer dunkler ist, als jede Stufe des Körperschattens, eine Thatsache, welche an jedem einfarbigen der Sonne ausgesetzten Körper zur Anschauung gelangt und nur da eine Ausnahme erleiden kann, wo die gemachte Voraussetzung einer einzigen herrschenden Lichtquelle nicht erfüllt ist.

5. Zwei Vollendungsgrade der Schattierung.

Soviel als erster Einblick in das Wesen der Schattierung. Diese ist aber in der Darstellung technischer Gebilde nicht immer genau so wie sie in der Natur sich findet oder in der Photographie sich finden würde, sondern sie erscheint je nach dem Massstab in zwei verschiedenen Vollendungsgraden. Bei der minder vollkommenen Schattierung ist auf dem Bilde des dargestellten Körpers nur Licht, Körperschatten und Schlagschatten unterschieden, so dass die beleuchtete Fläche überall gleich hell, die Körperschattenfläche überall gleich dunkel, die Schlagschattenfläche zwar dunkler als die Körperschatten, aber in sich ebenfalls überall gleich dunkel ist.

Dieser minder vollkommenen Darstellung der wirklich bestehenden Beleuchtungsgrade steht gegenüber diejenige, welche auch die feineren Abstufungen der beleuchteten und nicht beleuchteten Flächen darbietet, also hellstes Licht, minder helles Licht in allen Stufen oder wenigstens in einer bestimmten Zahl von Stufen, Körperschatten vom hellsten Reflexlicht bis zum dunkelsten, dem sogenannten Streiflicht, und ebenso, als dunkelste Flächenreihe überhaupt, die Schlagschatten bis hinab zur tiefsten Stufe.

Jeder der beiden Vollendungsgrade der Schattierung hat sein Gebiet. Bei Darstellungen in kleinerem Massstab, z. B. bei einer Gebäudefront, einer inneren Wandgliederung, einer Brücke, die im Massstab 1 : 100 oder 1 : 50 zu zeichnen ist, oder bei einem Möbelstück, einem Dekorationsstück bis etwa zum Massstab 1 : 25 genügt es vollkommen, die drei Beleuchtungsgrade Licht, Selbstschatten und Schlagschatten nur zu unterscheiden, ohne sie abzustufen; ja es ist hier erfahrungsgemäss das Abstufen innerhalb der Lichtflächen und der beiden Arten von Schatten der Schönheit und Deutlichkeit des Bildes geradezu schädlich, indem es den Eindruck des Gekünstelten hervorruft. Ist dagegen ein Säulenkapitäl oder -fuss, ein Krönungsgesims, ein Stück Brüstung, ein Zierstück irgend welcher Art als Einzelheit des Bauwerks, oder ein kunstgewerblicher Gegenstand, oder ein kompliziert gestalteter Maschinenbestandteil etwa in einem Zehntel oder Fünftel der Wirklichkeit oder in natürlicher Grösse darzustellen, so bedarf es der feineren Abstufung von Licht und Schatten, wenn das Bild der Raumgestalt nahekommen und über den Zusammenhang der Formen oder die ästhetische Wirkung des Dargestellten Aufschluss geben soll.

Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde. Beide sind Anwendungen der darstellenden Geometrie. 6.

Die erste, minder weit gehende Aufgabe des Schattierens der technischen Gebilde, bei welcher die graphische Konstruktion nur die Grenzen von Licht und Schatten, von Selbstschatten und Schlagschatten zu bestimmen hat, bildet den Gegenstand der Schattenkonstruktionslehre, wogegen man unter Beleuchtungskunde diejenige Wissenschaft versteht, welche nach Bestimmung der Licht- und Schattengrenzen, innerhalb der dem Lichte und den beiden Arten von Schatten zugewiesenen Flächen, die feineren Abstufungen der Beleuchtung und der Schattenstärke bestimmen hilft.

Die Beleuchtungskunde ist als tiefere Auffassung des Beleuchtungsproblems wissenschaftlich interessanter und als Durchführung eines einzigen, ebenso geistreichen als einfachen Grundgedankens einheitlicher, auch in den von ihr geschaffenen Bildern ansprechender, schöner als die Schattenkonstruktionslehre. Diese aber ist weit wichtiger für das praktische Schaffen; sie erklärt in erster Linie und auf dem nächsten Weg die Körperformen; sie findet in allen Zweigen der Darstellung technischer Gebilde umfassende und vielseitige Verwertung, und ihr Studium ist eine notwendige Ergänzung zu demjenigen aller Projektionslehre und Darstellungskunde überhaupt. Schattengrenzen

müssen überall aufgesucht werden; aber verhältnismässig selten und fast nur im Kunstgewerbe und in der Monumentalarchitektur verleiht die karge Praxis Zeit und Mittel, ein auszuführendes Gebilde zuvor mit seinen feineren Lichtstufen zu schattieren.

Darstellungen aus dem Maschinenbau, aus dem Gebiet der wissenschaftlichen Instrumente und Modelle, aus dem Heizungs- und Beleuchtungswesen und anderen verwandten Zweigen des technischen Gestaltens werden schon in kleinerem Massstab oft eingehender schattiert, wenn auch nur nach Schätzung oder an der Hand der Photographie des schon Ausgeführten. Doch ist selbst für dieses nur gefühlsmässige oder nachbildende Schattieren das Studium der Beleuchtungskunde die beste Grundlage, und sogar die künstlerische Formenmodellierung auf Papier oder Leinwand mit Hilfe von Licht und Schatten kann in der Kenntnis ihrer Gesetze schätzbare Förderung finden.

Streng richtige, mit mathematisch abgeleiteten Lichtstufen schattierte Bilder wären endlich ein gutes Hilfsmittel zur Deutlichkeit und Anschaulichkeit bei Vorführung vieler mathematischer Flächen und Körper im Unterricht; es mag hiermit zur Verwertung der Beleuchtungskunde auch in dieser Richtung eine Anregung gegeben sein.

Die technischen Gebilde weisen fast ausschliesslich mathematisch bestimmte Flächen auf, nämlich Ebenen, Cylinderflächen, Kegelflächen, Kugelflächen, Drehungsflächen aller Art, Schraubenflächen, Wendelflächen u. s. f. Wenn nun auch über die Richtung der Lichtstrahlen, die eine solche Fläche treffen, eine bestimmte Annahme gemacht wird, so ist damit offenbar entschieden und durch geeignete Operationen mathematisch bestimmbar, welche Teile der Fläche vom Licht getroffen werden und welche nicht, ferner unter welcher Neigung die Lichtstrahlen an einem bestimmten Punkt der Fläche diese treffen. Die Operationen mit Zirkel und Lineal, die zur Bestimmung der Licht- und Schattengrenzen, beziehungsweise der Neigung der Lichtstrahlen gegen die verschiedenen Flächenteile beigezogen werden, fallen in das Gebiet der darstellenden Geometrie: Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde sind also Anwendungen der darstellenden Geometrie und müssen notwendig die Kenntnis der Grundoperationen dieser Wissenschaft voraussetzen. Doch wird im folgenden der Erklärung einer jeden Gruppe von Problemen der Schattenkonstruktion eine kurze Fassung derjenigen Sätze und Betrachtungen der darstellenden Geometrie, welche bei den Lösungen zur Geltung kommen, vorangestellt werden.

Parallelbeleuchtung und Centralbeleuchtung. Eingebürgerte Lichtstrahlrichtung der ersten. 7.

Die Quellen des direkten oder unmittelbar auf die Körper treffenden Lichtes sind entweder Sonne und Mond, oder künstliche Lichter. Die Lichtstrahlen gehen von den Lichtquellen geradlinig und radial nach allen Richtungen des Raums, und bei der Beleuchtung durch künstliches, nahestehendes Licht, die jedoch bei technischen Darstellungen selten vorausgesetzt wird, ist das radiale Auseinanderstreben der Strahlen wohl zu beachten. Anders ist es bei der Sonne. Bei der grossen Entfernung dieser Lichtquelle und dem grossen Durchmesser der Sonnenkugel ist das Divergieren oder Auseinanderstreben der Sonnenstrahlen für die Beleuchtungen auf der Erde gleich Null; das heisst die Sonnenstrahlen sind als ein System unendlich vieler Parallellinien in die Schattenkonstruktion einzuführen, und es ist nur noch über die Richtung des Sonnenlichtes für den einzelnen Fall der Darstellung eines Körpers eine Annahme zu treffen. Für das Schattieren technischer Gebilde wird diese Richtung fast immer so gewählt, dass die Projektionen des Lichtstrahls auf den beiden Grundebenen je einen Winkel von 45^0 mit dem Grundschnitt bilden, und zwar so, als ob das Licht über die linke Schulter des Beschauers auf den dargestellten Körper fallen würde. Erfahrungsgemäss erweist sich diese Annahme für die meisten Darstellungen als günstig; auch erleichtert sie die Konstruktion wesentlich gegenüber andern Winkeln mit den Grundebenen, weil man den Winkel von 45^0 an den Schiebdreiecken hat und weil die Richtung von 45^0 in den Horizontalprojektionen oder Grundrissen technischer Gebilde ohnehin eine Rolle spielt. Es ist nicht ausgeschlossen, auch noch andere Lichtrichtungen für das Schattieren beizuziehen, und es giebt Fälle, wo man mit etwas steileren Lichtstrahlen, etwa 60^0 im Aufriss bei 45 oder 60^0 im Grundriss, oder auch mit flacherer Neigung von nur 30^0 bessere Bilder erzielt; aber die zuvor beschriebene ist weitaus die häufigste und in allen Ländern eingeführt. Sie wird in der Folge immer vorausgesetzt werden.

A. Schattenkonstruktionslehre oder Lehre von den Schattengrenzlinien.

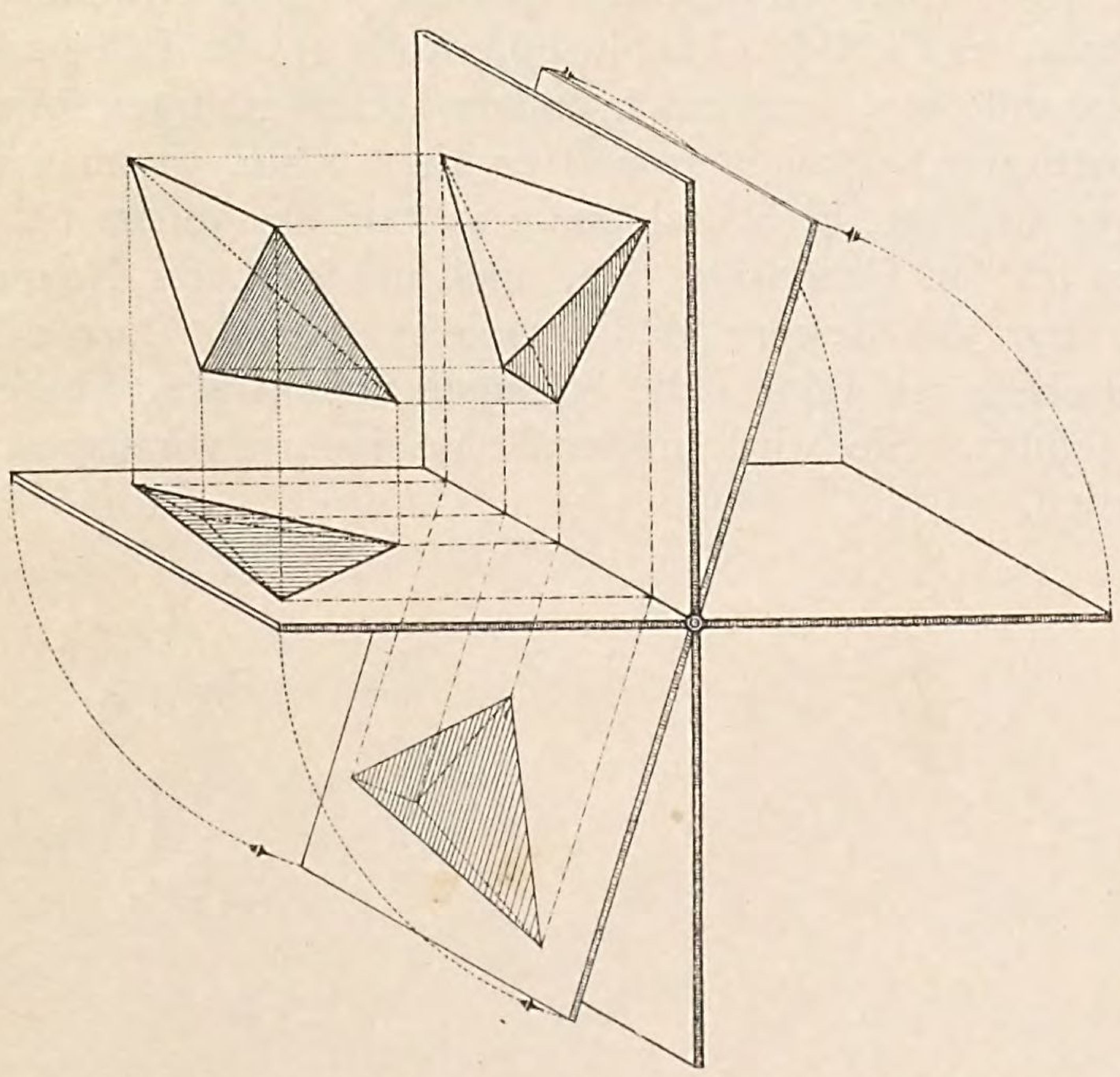
Die Schattenkonstruktionslehre hat unter Annahme der beschriebenen Lichtstrahlrichtung die graphischen Konstruktionen darzulegen, mit welchen die Grenzen zwischen Lichtflächen, Körperschattenflächen und Schlagschattenflächen für die zumeist in der Technik verwendeten mathematisch bestimmbaren Körper in verschiedenen Lagen aufgesucht werden können. Dieser Aufgabe sind die Kapitel II bis X gewidmet. Zusammengesetzte technische Gebilde erheischen zwar im allgemeinen die Anwendung von mehreren Lösungsmethoden nebeneinander; doch bleiben solche Fälle bei Erklärung der einzelnen Methoden besser beiseite.

II. Schlagschatten auf den Grundebenen und Selbstschatten von Körpern mit ebenen Flächen.

8. Hilfsmittel aus der darstellenden Geometrie.

Die Lösung der in den Kapiteln II, III und IV behandelten Aufgaben erfordert nur die Kenntnis elementarer Sätze und Operationen der darstellenden Geometrie; sie sind, der früheren Ankündigung entsprechend, in gedrängter Fassung hier voranzustellen.

a) Das Projizieren. Wenn ein Körper geometrisch, das heisst nach dem Verfahren der darstellenden Geometrie abgebildet werden soll, so geschieht dies



Figur 8.

dadurch, dass man in bestimmter Lage zum Körper eine horizontale und eine vertikale Ebene vorstellt und von jedem Kantenpunkt des Körpers sich ein Lot gefällt denkt sowohl auf die Horizontalebene als auf die Vertikalebene. Dieses Lotfällen auf die beiden „Grundebenen" nennt man das „Projizieren", genauer das „rechtwinklige Projizieren", und die Figur, welche gebildet wird durch die Fusspunkte der Lote, heisst eine „Projektion". Auf der Horizontalebene bildet sich die „Horizontalprojektion" des Körpers, die im folgenden ebensohäufig der „Grundriss" des Körpers genannt werden wird, um eine Abwechslung und ein kürzeres Wort zu haben; auf der Vertikalebene bildet sich die „Vertikalprojektion", die auch bezeichnet werden wird als „Aufriss" oder „Vorderansicht" des Körpers. Die horizontale Schnittlinie der beiden Grundebenen heisst der „Grundschnitt". Da man nun beim Zeichnen nicht auf einer horizontalen Tafel und einer aufgesetzten vertikalen zugleich operieren kann, so denkt man sich nach vollendetem Projizieren (Figur zu Art. 8) die Horizontalebene mit allem, was an Projektionen darauf erscheint, um den Grundschnitt nach unten geklappt, und zwar um eine Viertelswendung, so dass sie mit der unter den Grundschnitt erweitert gedachten Vertikalebene zusammenfällt, oder — anschaulicher zu sprechen — vor diese Erweiterung zu stehen kommt. Doch ist für alle Beziehungen zwischen beiden Projektionen immer die ursprüngliche Lage beider Grundebenen wieder vorzustellen. Die Zeichnungsfläche unter dem Grundschnitt bedeutet also ebensowohl den vorderen Teil der Horizontalebene als den unteren Teil der Vertikalebene. Vertikalprojektionen auf diesem letzten, verdeckten Teil werden punktiert gezeichnet, um auszudrücken, dass sie von der Horizontalebene verdeckt sind; die Figuren auf dieser letzteren zeichnet man mit ausgezogenen Linien. — Die hinter den Grundschnitt erweiterte Horizontalebene, welche vielfach ebenfalls Projektionen aufzunehmen hat, klappt sich beim Hinunterdrehen der vorderen Horizontalebene nach oben und legt sich hinter den Oberteil der Vertikalebene. Die Zeichnungsfläche über dem Grundschnitt bedeutet also ebensowohl den hinteren Teil der Horizontalebene als den

Oberteil der Vertikalebene. Horizontalprojektionen auf diesem ursprünglich hinter dem Grundschnitt liegenden Teil der Horizontalebene werden ebenfalls als verdeckt bezeichnet, das heisst punktiert.

Auch in den sichtbar gedachten Projektionen der Körper auf der oberen Vertikalebene und der vorderen Horizontalebene werden diejenigen Kanten und Linien, welche bei Auffassung der Projektion als Vorderansicht beziehungsweise Ansicht von oben vom übrigen verdeckt und dadurch unsichtbar wären, nur punktiert gezeichnet. Anstatt der Ansicht von oben („Oberansicht", auch „Draufsicht" genannt) wird eine Horizontalprojektion wohl auch als Ansicht von unten („Unteransicht", „Ansicht nach oben") behandelt, wenn hierdurch grössere Deutlichkeit erreicht oder Wichtigeres als sichtbar dargestellt wird.

b) Der Punkt. Ein Punkt A erscheint in der Horizontalprojektion als ein Punkt a und ebenso in der Vertikalprojektion als ein Punkt a'; beide Projektionen liegen auf derselben Vertikallinie des Zeichenblattes.

c) Die Gerade. Eine gerade Linie erscheint im allgemeinen in beiden Projektionen als gerade Linie. Die Lote, welche ihre Punkte auf die horizontale Grundebene projizieren, bilden eine Ebene, welche die „horizontalprojizierende" Ebene der Geraden heisst; sie wird im folgenden oft auch ihre „vertikalstehende" oder „vertikale" Ebene genannt werden. Die Ebene, welche die Gerade auf die vertikale Grundebene projiziert, heisst die „vertikalprojizierende".

Die Punkte, in welchen eine Gerade die Grundebenen schneidet, heissen ihre „Spuren". Die „Vertikalspur" einer Geraden liegt auf dem Zeichenblatt vertikal über (oder unter) dem Punkt, in welchem die Horizontalprojektion der Geraden den Grundschnitt schneidet; ebenso liegt die „Horizontalspur" vertikal unter (oder über) dem Schnittpunkt der Vertikalprojektion mit dem Grundschnitt.

Für bestimmte Lagen der Geraden liegt eine Spur unendlich fern, oder es ist dies mit beiden Spuren der Fall. Diese Lagen sind die folgenden:

Eine vertikale Gerade erscheint im Grundriss als ein Punkt, im Aufriss vertikal.

Eine Gerade senkrecht zur Vertikalebene erscheint im Aufriss als ein Punkt, im Grundriss senkrecht zum Grundschnitt.

Eine horizontale Gerade erscheint im Aufriss horizontal, im Grundriss parallel zu ihrer Lage im Raum.

Eine Gerade parallel zur Vertikalebene erscheint im Grundriss horizontal, im Aufriss mit der Neigung, die sie im Raum gegen die Horizontalebene darbietet.

Eine Gerade parallel zum Grundschnitt erscheint in beiden Projektionen horizontal.

Eine Gerade senkrecht zum Grundschnitt erscheint in beiden Projektionen vertikal; sie bedarf zu ihrer unzweideutigen Darstellung der Beifügung der später zu erklärenden Seitenprojektion. Für eine solche Gerade lassen sich beide Spuren als im Grundschnitt zusammengefallen vorstellen.

Ist eine Gerade im Raum in irgend einem Verhältnis eingeteilt, so sind auch ihre beiden Projektionen in diesem Verhältnis eingeteilt.

d) Die Kurve. Eine gekrümmte Linie hat im allgemeinen zwei Kurven als Projektionen; bei ebenen Kurven kann eine Projektion geradlinig werden. Tangenten an einer Kurve projizieren sich als Tangenten an beiden Kurvenprojektionen.

e) Die Ebene. Eine Ebene kann auf zwei Weisen dargestellt werden, entweder durch ihre zwei Schnittlinien mit den Grundebenen, welche als gerade Linien mit Schnittpunkt im Grundschnitt auftreten und die „Spuren" der Ebene heissen, oder durch die zwei Projektionen einer Figur, welche in der Ebene liegt (Dreieck, Vieleck, Kreis, beliebig begrenzte Figur, auch wohl nur Winkelfeld zweier Geraden). Die letzte Darstellungsweise ist für die Schattenkonstruktion die häufigere.

Zwei beliebige Dreiecke, deren Eckpunkte vertikal übereinander liegen, stellen, aufgefasst als zusammengehörige Projektionen, immer eine Ebene dar. Zwei Vielecke stellen nur dann die Projektionen einer ebenen Figur dar, wenn nicht nur ihre Eckpunkte, sondern auch die Schnittpunkte der einander entsprechenden Diagonalen und Seitenverlängerungen vertikal übereinander liegen. Bei n Seiten eines Vielecks muss diese Probe (abgesehen von den Eckpunkten selbst) für mindestens $n-3$ Schnittpunkte erfüllt sein; dann ist sie für alle erfüllt.

Eine horizontale Ebene hat nur eine Spur, und zwar eine horizontal gerichtete Vertikalspur. Die Horizontalprojektion einer in einer solchen Ebene liegenden Figur ist der Figur kongruent.

Eine vertikale Ebene parallel zum Grundschnitt hat nur eine Spur, und zwar eine horizontal gerichtete Horizontalspur. Die Vertikalprojektion einer in einer solchen Ebene liegenden Figur ist der Figur kongruent.

Eine schief zum Grundschnitt stehende Vertikalebene hat eine vertikale Vertikalspur und eine schief gerichtete Horizontalspur.

Eine geneigte Ebene, die senkrecht zur Vertikalebene steht, hat eine senkrecht zum Grundschnitt stehende Horizontalspur und eine schief gerichtete Vertikalspur.

Eine geneigte Ebene parallel zum Grundschnitt hat zwei horizontal gerichtete Spuren.

Eine Ebene senkrecht zum Grundschnitt hat zwei übereinander stehende Vertikallinien als Spuren.

Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, enthält eine horizontale Linienrichtung und eine zu dieser senkrechte Linienrichtung, welche die steilste Linienrichtung auf der Ebene ist und zugleich die Neigung der Ebene gegen die Horizontalebene darbietet, weshalb sie die Richtung der „Gefällslinie" der Ebene heisst. Jede horizontale Richtungslinie der Ebene erscheint im Aufriss horizontal und im Grundriss parallel der Horizontalspur der Ebene; jede Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur der Ebene oder Horizontalprojektion der Richtungslinie. Die beiden Projektionen einer Gefällslinie bestimmen für sich allein die Ebene, der sie angehört.

Unter „Neigung" einer Ebene oder Geraden kurzweg ist immer die Neigung gegen die Horizontalebene verstanden.

f) Gerade und Gerade. Zwei Gerade sind im Raum parallel, wenn auf jeder Grundebene ihre beiden

Projektionen parallel sind (oder, mit dem gebräuchlichen Ausdruck, wenn ihre „gleichnamigen" Projektionen parallel sind). Ausnahme bei Geraden senkrecht zum Grundschnitt, indem diese zur Bestimmung ihrer Richtung der Seitenprojektion bedürfen.

g) Ebene und Ebene. Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre gleichnamigen Spuren parallel sind. (Ausnahmen bei Ebenen parallel zum Grundschnitt.)

Die Gerade, nach welcher sich zwei Ebenen schneiden, hat ihre Spuren in den Schnittpunkten der gleichnamigen Spuren beider Ebenen.

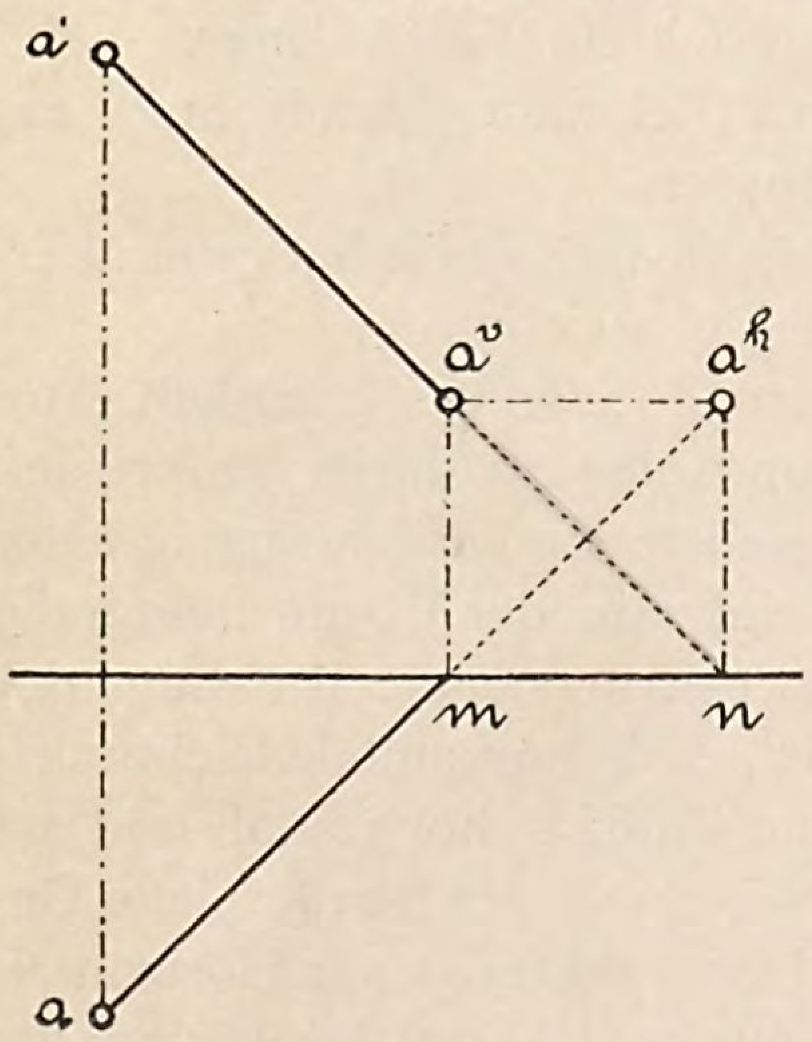
h) Gerade und Ebene. Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn die Spuren der Geraden in die Spuren der Ebene fallen. — Eine Gerade ist parallel einer Ebene, wenn sich durch die Spuren der Geraden die Spuren einer zweiten Ebene parallel zu denjenigen der gegebenen legen lassen. — Eine Gerade steht senkrecht zu einer Ebene, wenn die Projektionen der Geraden senkrecht zu den Spuren der Ebene stehen.

Zur Bestimmung der Spuren der Ebene zweier sich schneidender Geraden verbindet man die gleichnamigen Spuren der letzteren. Nur wenn sich die Verbindungslinien im Grundschnitt schneiden, sind sie die Spuren einer Ebene; andernfalls liegen die gegebenen Geraden nicht in einer Ebene. Um die Spuren der Ebene einer gegebenen Figur zu erhalten, wählt man auf dieser zwei sich schneidende Gerade und behandelt diese in der angegebenen Weise.

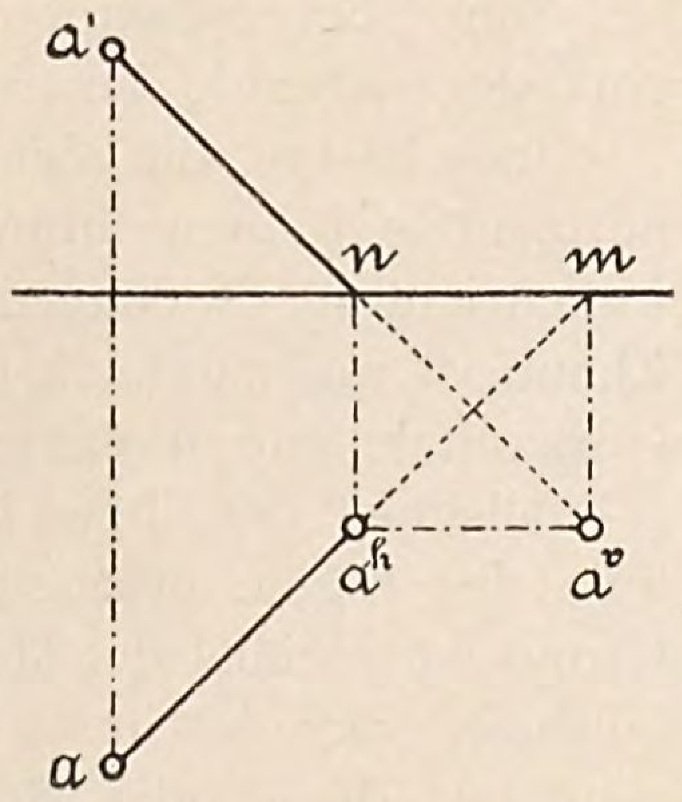
9. Schlagschatten eines Punktes auf den Grundebenen.

Das einfachste Problem der Schattenkonstruktion ist das folgende: „Auf den Grundebenen den Schatten eines Punktes zu suchen."

Lösung: Man zieht durch den Punkt einen Lichtstrahl; wo dieser zuerst eine Grundebene schneidet, da ist der Schlagschatten des Punktes.

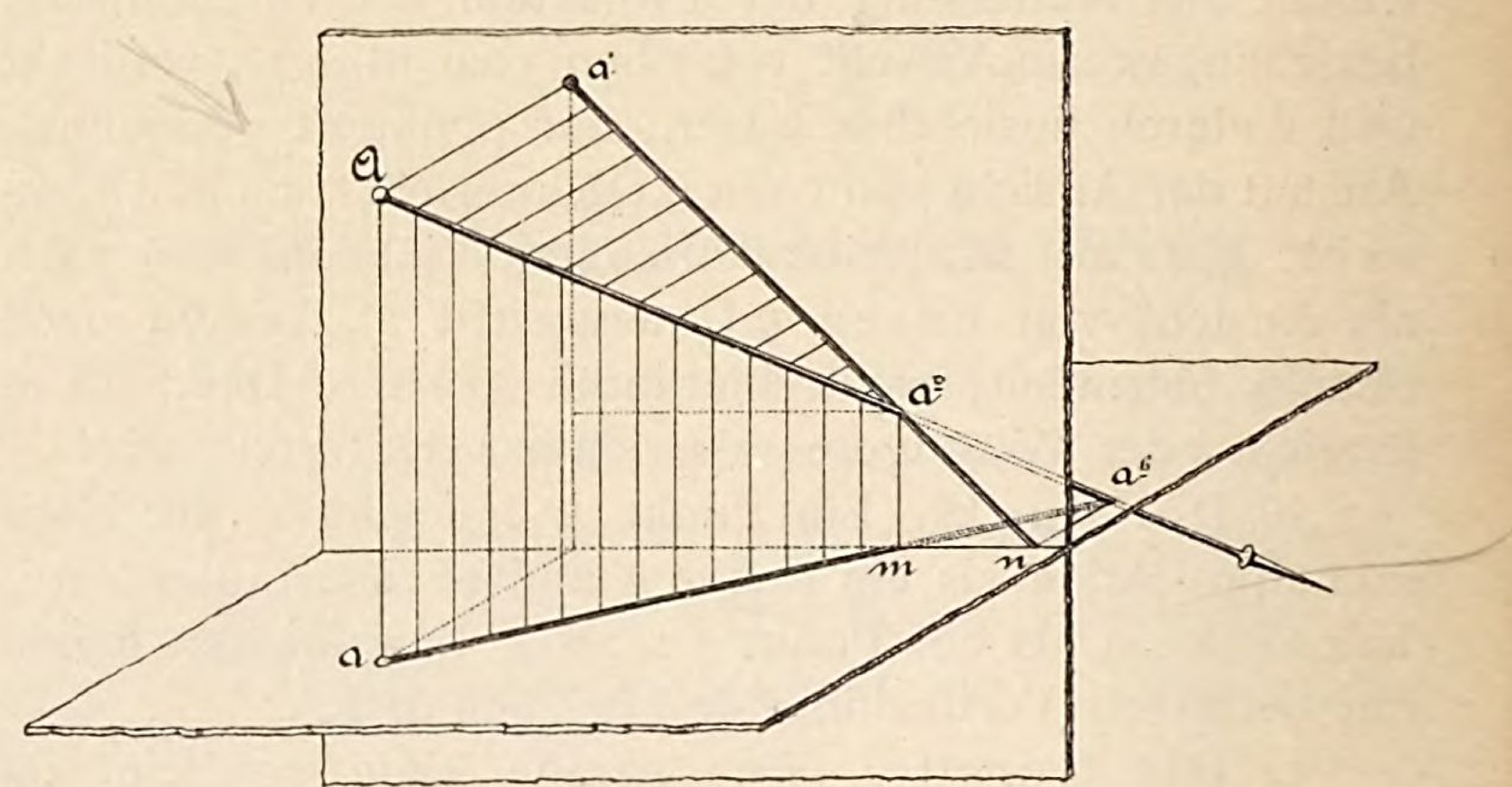


Figur 9a.



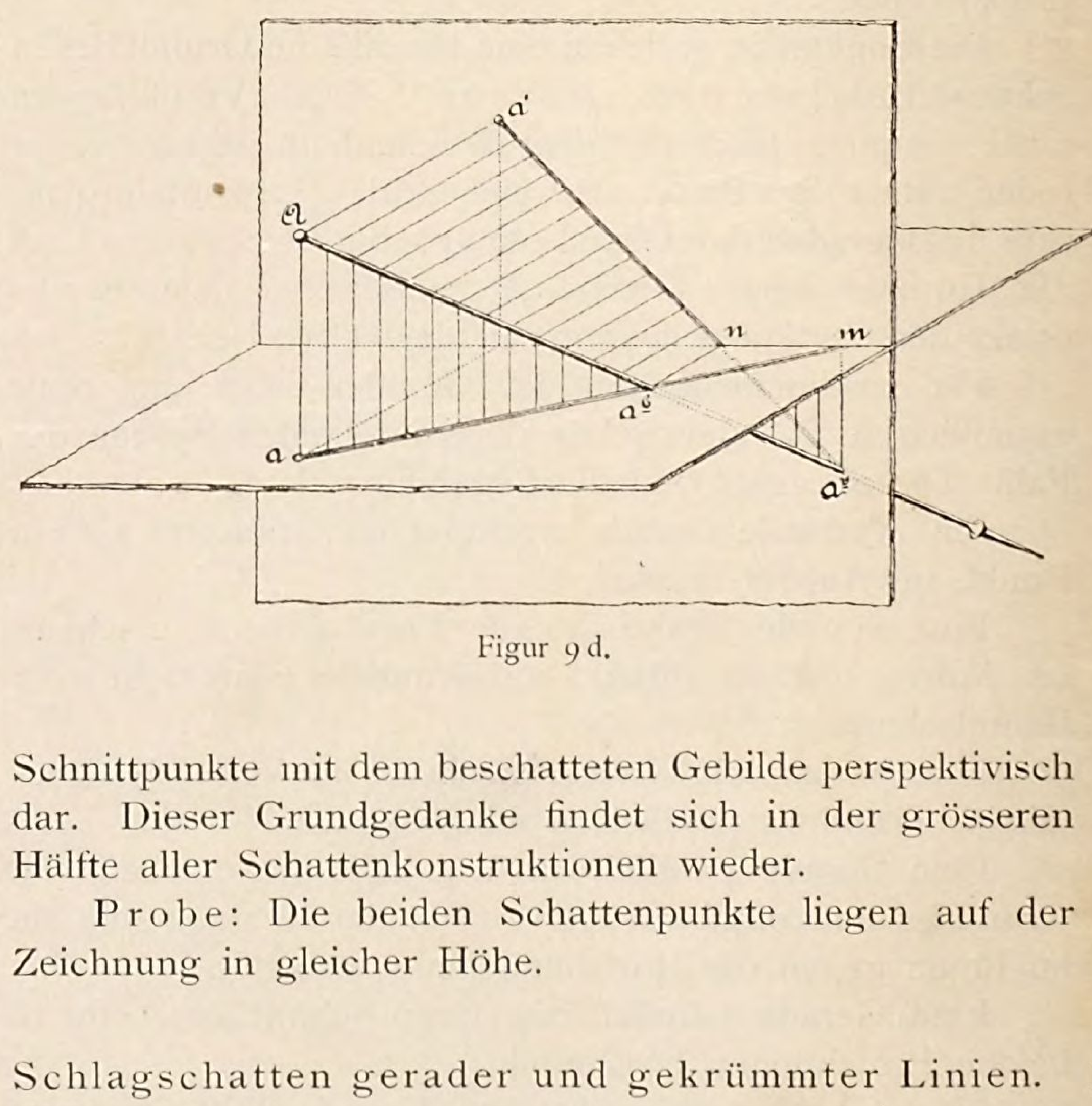
Figur 9b.

Graphische Ausführung (Figuren 9a u. b): Man zieht durch den Grundriss a des Punktes eine Linie unter 45° zum Grundschnitt geneigt, ebenso durch den Aufriss a' des Punktes. Im Schnittpunkt jeder solchen Linie mit dem Grundschnitt — also in m und n — errichtet man ein Lot bis zum Schnitt mit der andern Linie. Die beiden Schnittpunkte dieser Lote mit den Projektionen des Lichtstrahls sind die Schattenpunkte a^v und a^h. Die zuerst vom Lichtstrahl getroffene Grundebene enthält den wirklichen Schattenpunkt, die andere den nur gedachten Schattenpunkt, der erscheinen würde, wenn die erste Grundebene nicht da wäre.



Figur 9c.

In Figur 9a ist a^v der wirkliche Schattenpunkt; in Figur 9b ist es a^h. Die Figuren 9c und 9d stellen den Grundgedanken der Konstruktion, die Benützung der projizierenden Ebenen des Lichtstrahls zur Bestimmung seiner



Figur 9d.

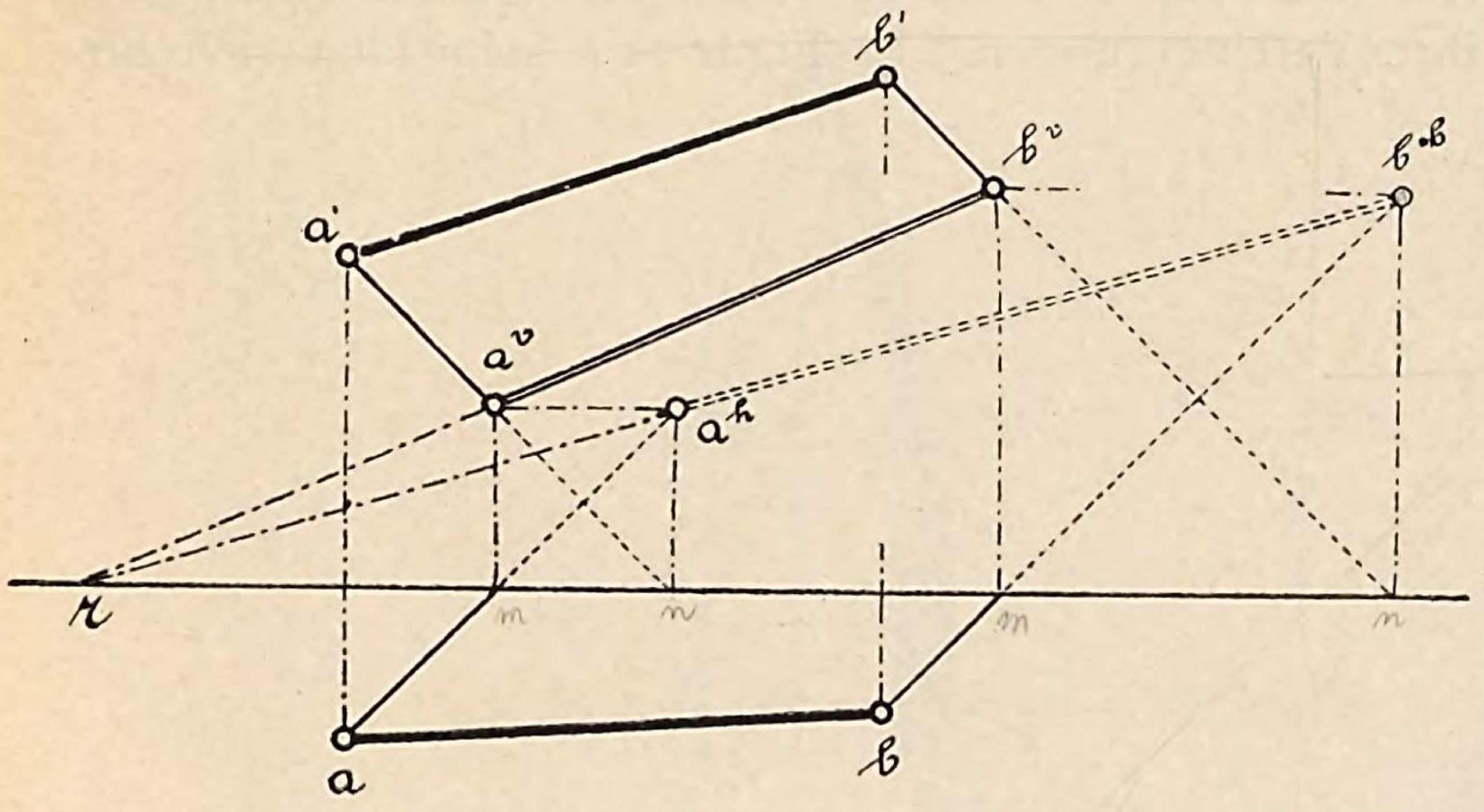
Schnittpunkte mit dem beschatteten Gebilde perspektivisch dar. Dieser Grundgedanke findet sich in der grösseren Hälfte aller Schattenkonstruktionen wieder.

Probe: Die beiden Schattenpunkte liegen auf der Zeichnung in gleicher Höhe.

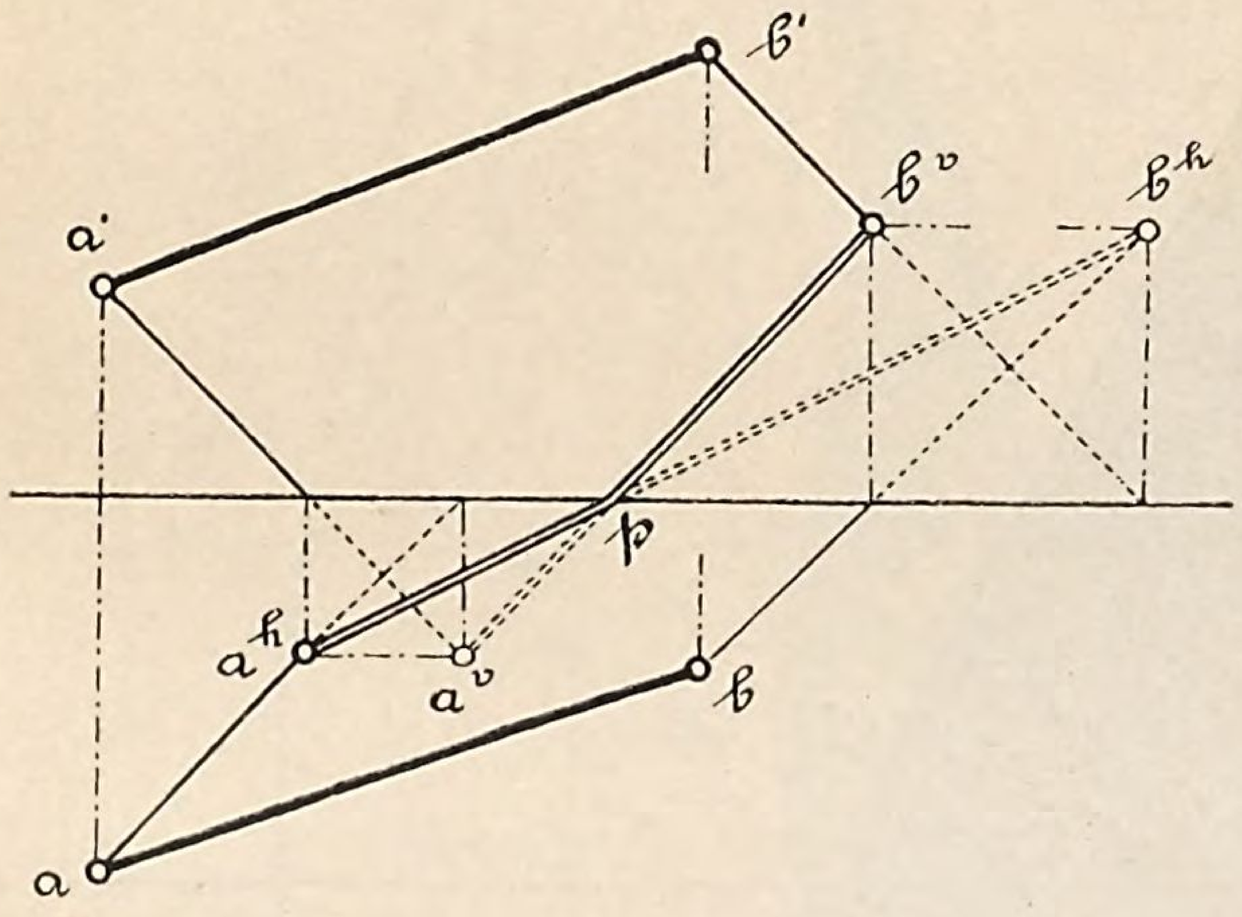
Schlagschatten gerader und gekrümmter Linien. 10.

Der Schlagschatten einer geraden Linie ab auf einer Grundebene (Figur 10a) wird gefunden, indem man die Schatten der Endpunkte auf dieser Grundebene bestimmt und geradlinig verbindet (a^v mit b^v und a^h mit b^h). Wirklicher Schatten ist nur diejenige Schattenlinie ($a^v b^v$ in Figur 10a), welche zuerst von den Lichtstrahlen getroffen wird; die zweite Schattenlinie bildet nur einen gedachten Schatten, wie er bei Fehlen der andern Grundebene auf-

treten würde. Verteilt sich der Schatten auf beide Grundebenen (Figur 10b), so sucht man ihn ganz auf beiden Grundebenen und erhält als wirklichen Schatten eine gebrochene Linie $a^h p b^v$ mit Ecke im Grundschnitt.



Figur 10a.



Figur 10b.

Probe für beide Fälle: Die beiden Schatten schneiden sich im Grundschnitt, im ersten Fall verlängert (in r), im zweiten unmittelbar (in p).

Um den Schlagschatten einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve zu konstruieren, bestimmt man die Schlagschatten einer genügenden Zahl ihrer Punkte und verbindet die Schattenpunkte in richtiger Reihenfolge durch eine stetige Linie (Beispiel Figur 17c).

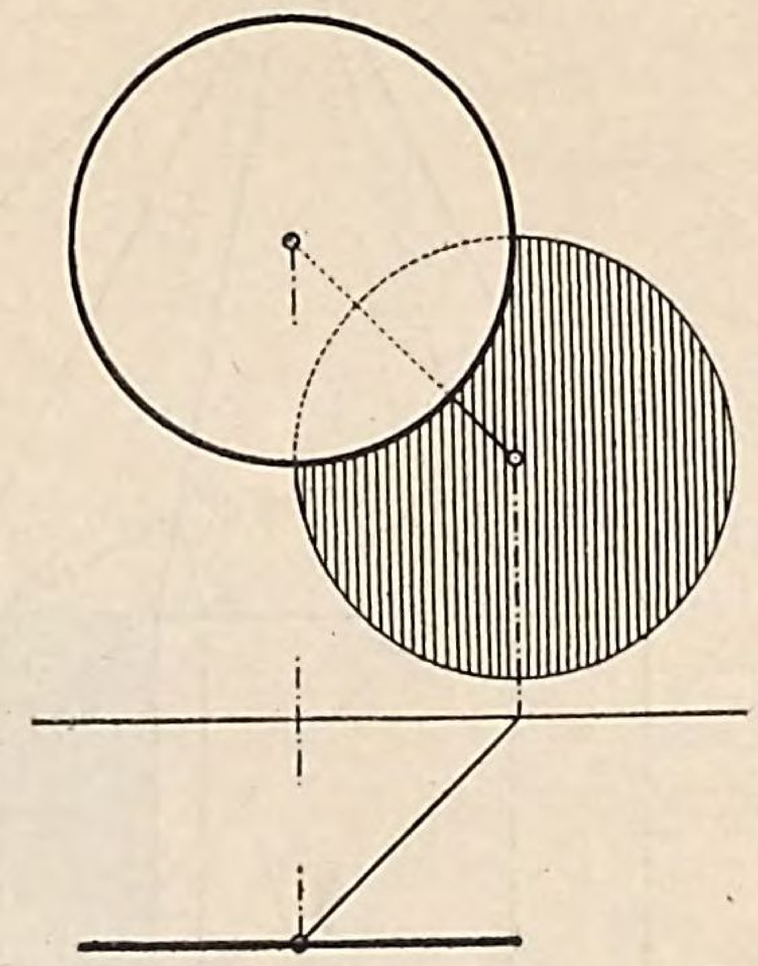
Für besondere Fälle der Form und Lage der Linien ergeben sich folgende oft verwertbaren Sätze:

a) Eine Gerade parallel einer Grundebene wirft auf diese einen parallelen Schatten; eine horizontale Gerade parallel zum Grundschnitt hat auf beiden Grundebenen einen horizontalen Schatten; eine vertikale Gerade wirft auf die Vertikalebene einen vertikalen Schatten.

b) Der Schatten einer Geraden auf einer Grundebene geht immer durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Grundebene. (Dieser selbstverständliche Satz gewinnt seinen Wert erst bei getrennter Lage von Linie und Grundebene, in welchem Fall er nicht immer unmittelbar aus der Figur herausgefühlt wird.)

c) Der Schatten einer Geraden, die senkrecht zur Vertikalebene steht, ist auf dieser unter 45° geneigt; der Schatten einer vertikalen Geraden auf der Horizontalebene bildet einen Winkel von 45° mit dem Grundschnitt.

d) Eine Kurve, deren Ebene parallel zu einer Grundebene steht, wirft auf diese einen ihr kongruenten Schatten. (Denn die Schattenkurve entsteht als Schnitt der von den Lichtstrahlen gebildeten Cylinderfläche durch eine Ebene parallel zur Basis.)



Figur 10c.

e) Ein Kreis, dessen Ebene parallel zu einer Grundebene steht, wirft auf diese als Schatten einen kongruenten Kreis. Man findet diesen (Figur 10c) am raschesten, indem man den Schatten des Mittelpunktes bestimmt und aus dem Schattenpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser des schattenwerfenden Kreises beschreibt. (Der Schattenkreis entsteht als der ebene Schnitt eines von den Lichtstrahlen gebildeten schiefen Kreiscylinders parallel zu dessen Basis.)

f) Ein Kreis wirft im allgemeinen einen elliptischen Schatten auf die Grundebenen. In besonderen Fällen ist der Schatten ein Kreis oder eine gerade Linie. Der zuvor unter e) genannte Fall ist aber nicht der einzige, in dem ein kreisförmiger Schatten entstehen kann.

Schlagschatten eines Körpers mit ebenen Grenzflächen. 11.

Die nächste Aufgabe wird die folgende sein: „Es ist der Schlagschatten zu konstruieren, den ein Körper mit ebenen Flächen auf die Grundebenen wirft, und die Selbstschattengrenze auf dem Körper zu bestimmen.“

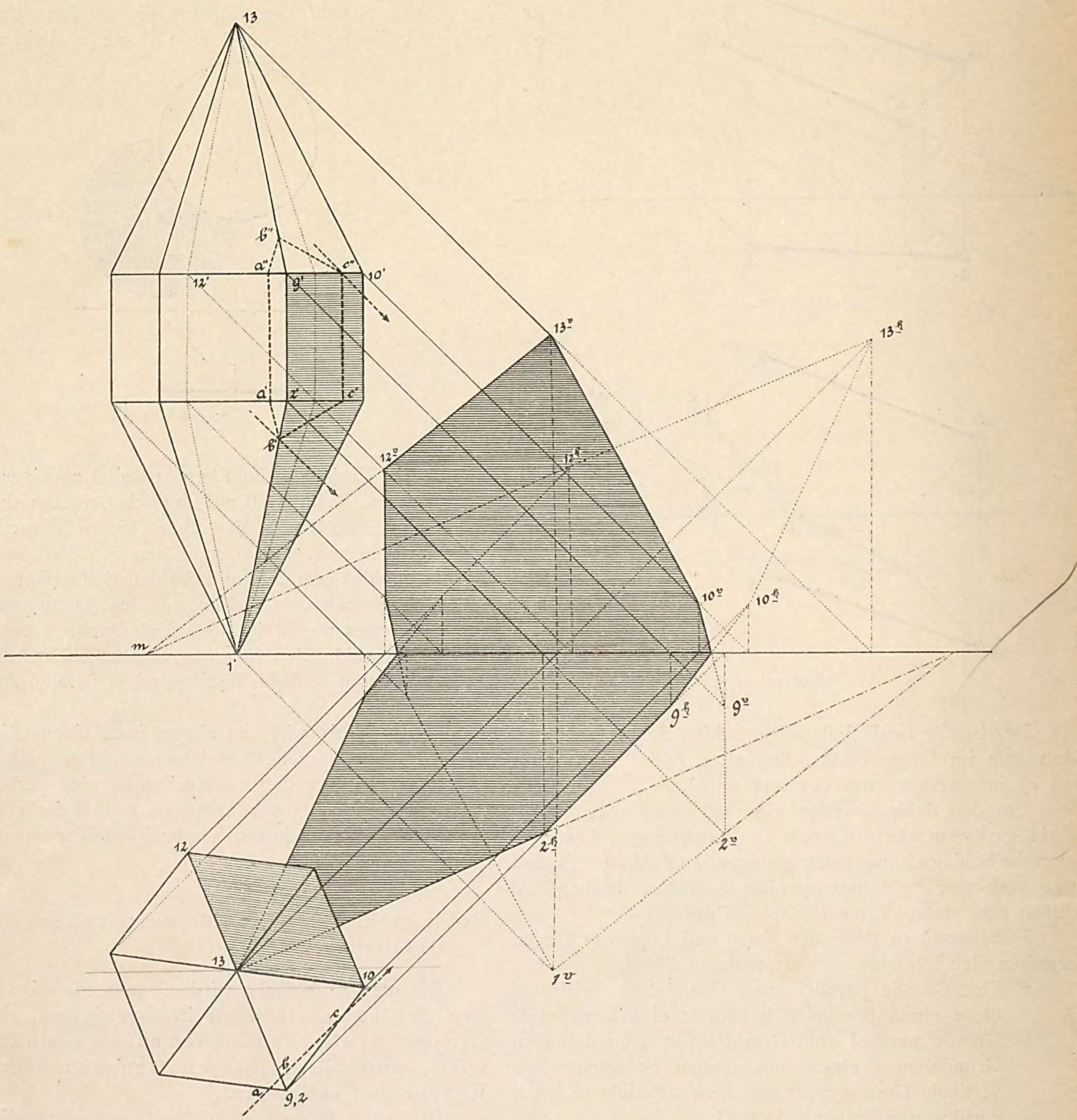
Lösung: Man sucht auf den Grundebenen die Schatten der einzelnen Eckpunkte und verbindet die Schattenpunkte den bestehenden Kanten entsprechend; es bildet sich dann durch die äussersten Schattenlinien die Schlagschattengrenze. Die innerhalb dieser liegenden Schattenpunkte bleiben ohne Verwertung; wenn man daher schon zuvor weiss, dass ein Eckpunkt keinen Schatten wirft, so kann die Konstruktion seines Schlagschattens unterbleiben. Das Numerieren der Eckpunkte ist zu empfehlen, ebenso das Numerieren der gefundenen Schattenpunkte mit Be-

zeichnung ihrer Grundebenen durch *h* und *v*, z. B. Schatten des Eckpunktes *13* auf der Horizontalebene 13^h, auf der Vertikalebene 13^v.

Im allgemeinen verteilt sich der Schatten auf beide Grundebenen. Zur Übung und Vervollständigung der Anschauung empfiehlt es sich, den Schlagschatten auf beiden

Proben: 1) Die zwei Schatten eines jeden Punktes liegen auf der Zeichnung in gleicher Höhe, z. B. 13^v mit 13^h in Figur 11 a.

2) Die zwei Schatten einer jeden Kante schneiden sich im Grundschnitt, entweder die Schatten selbst oder ihre Verlängerungen. In Figur 11 a schneiden sich un-



Figur 11 a.

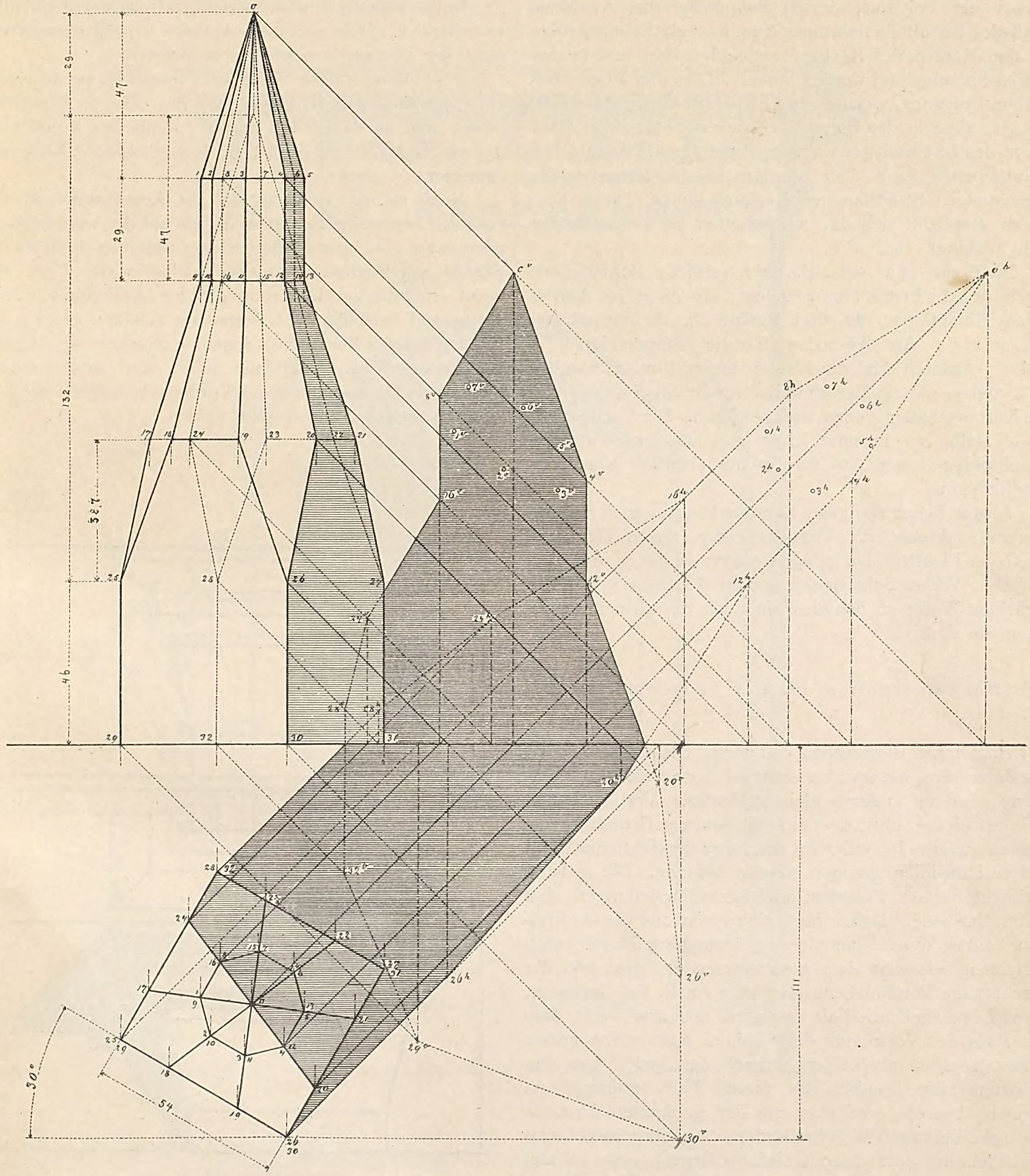
Grundebenen ganz zu suchen, das heisst die nur gedachten Schattengrenzen auf der hinteren Horizontalebene und unteren Vertikalebene als Fortsetzung der wirklichen Schattengrenzen mit punktierten Linien einzutragen. Die Figuren 11 a und 11 b geben ein einfaches und ein schwierigeres Beispiel mit Beifügung dieser nur gedachten Schatten auf den verdeckten Grundebenen.

mittelbar im Grundschnitt die Schatten der Kante *10—9*; verlängert schneiden sich im Punkt *m* des Grundschnitts die Schatten der Kante *13—12*.

3) Kanten, die im Raum parallel sind, haben parallele Schatten. In Figur 11 a z. B. erscheinen parallel die Schattengrenzen $12^h—13^h$ und $1^h—2^h$.

12. Selbstschatten auf Körpern mit ebenen Flächen.

Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Vielflach, einer windschief gebrochenen Linie aus einer Reihe von Kanten zusammengesetzt, geschieht nach folgender Regel: „*Diejenigen Kanten des Körpers, deren Schatten im Umriss der Schlagschattenfigur erscheinen, sind die Grenzen von Licht und Schatten auf dem Körper.*“ In Figur 11a sind z. B. die Kanten $9 - 10$ und $10 - 13$ dadurch als Körperschattengrenzlinien nachgewiesen, dass im Schlagschattenumriss die Linien $9^h - 10^h$ und $10^v - 13^v$ erscheinen.



Figur 11 b.

Ein zweites Hilfsmittel zur Bestimmung der Körperschattengrenze, deren windschief gebrochene Linie zuweilen das „Streifpolygon“ des Lichtes genannt wird, weil die Lichtstrahlen längs dieser Linie den Körper streifen,

ist das Schneiden des Körpers durch einige Ebenen parallel zur Lichtrichtung, und zwar meist durch vertikale Ebenen, die im Grundriss als Linien von 45° Neigung erscheinen. Jede solche Ebene giebt als Schnitt mit dem Körper ein Polygon, dessen Eckpunkte (bei Annahme vertikaler Schnittebenen) im Grundriss als Schnittpunkte mit den Kanten des Körpers vorhanden sind und in den Aufriss hinaufgelotet werden können. Diejenige Ecke eines solchen Polygons, welche der Lichtstrahl streift (das heisst berührt, ohne in das Polygon einzudringen), gehört einer Kante des Streifpolygons an. Eine genügende Anzahl von Schnittebenen kann über alle Kanten des letzteren, die sogenannten „Streifkanten“, Auskunft geben. Dieses Verfahren empfiehlt sich da, wo Schatten auf Grundebenen nicht verlangt sind.

In Figur 11a ist z. B. eine vertikale Schnittebene durch den Lichtstrahl *a b c* gelegt; sie giebt im Aufriss durch Hinaufloten der drei Punkte das Schnittpolygon *a' b' c' c'' b'' a''*. An diesem streifen die Lichtstrahlen in *b'* und *c''*; dadurch sind die Kanten dieser Punkte, nämlich *1—2* und *9—10* als Bestandteile des Streifpolygons oder der Körperschattengrenze nachgewiesen. Die Vertikallinie *2'—9'* stellt ein in eine Linie zusammengeschrumpftes Schnittpolygon vor und ist deshalb ebenfalls Kante des Streifpolygons.

Anstatt dieser vertikalen Schnitte könnten auch Schnittebenen senkrecht zur Vertikalebene durch die Aufrisse der Lichtstrahlen gelegt werden; sie geben in ebenso einfacher Weise Schnittpolygone im Grundriss, die in derselben Weise zu benützen sind, wie die zuvor beschriebenen im Aufriss.

13. Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss.

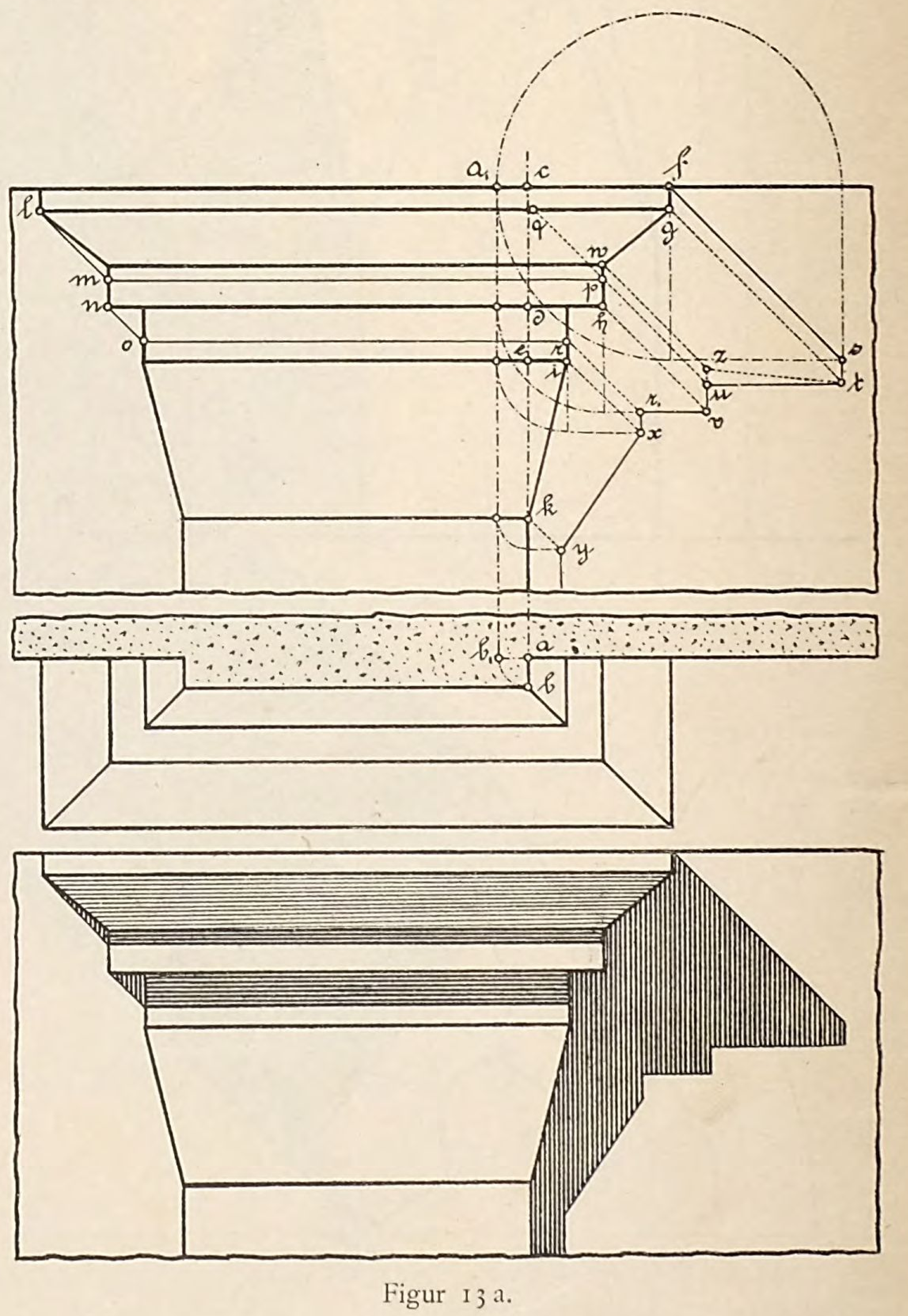
Bei vielen technischen Gebilden, besonders solchen des Bauwesens, hat man Schatten auf der vertikalen Grundebene oder auf anderen gleichgerichteten Vertikalebenen zu konstruieren, ohne dass ein vollständiger Grundriss vorhanden wäre, in welchem Lichtstrahlprojektionen und andere Hilfslinien gezogen werden könnten. Die meisten architektonischen Fassaden und Einzeldarstellungen sind hiefür Beispiele. Dabei lässt sich meist aus der Aufrissfigur selber durch Summierung bestimmter Masse rasch abstechen, wie weit ein schattenwerfender Punkt von der beschatteten Vertikalebene absteht, so z. B. bei Gesimsen, deren Ecke als Umrisslinie erscheint, weil man weiss, dass das Mass des Vortretens der Gesimse nach vorne immer ebensogross ist als dasjenige nach der Seite. Um den Schatten eines Punktes für diesen Fall bestimmen zu können, braucht man aber nur den genannten Abstand.

Aus der für die Schattierung eingebürgerten Lichtstrahlrichtung geht folgende einfache Regel hervor: „Wenn ein Punkt seinen Schlagschatten auf die vertikale Grundebene oder auf eine andere gleich gerichtete Ebene wirft, so fällt sein Schatten so weit unter ihn (oder auch so weit rechts von ihm), als er von der Ebene entfernt ist. Man erhält hieraus als einen geometrischen Ort des Schattenpunktes eine Horizontallinie (beziehungsweise Vertikallinie). Einen zweiten geometrischen Ort hat man in der Vertikalprojektion des Lichtstrahls als in einer Linie unter 45° durch den schattenwerfenden Punkt gezogen; hiedurch ist der Schattenpunkt bestimmt.

Indem man die schattenwerfenden Punkte nacheinander so behandelt, erhält man die Eckpunkte der Schattengrenze, ohne den Grundriss beiziehen zu müssen.

(Das obengenannte Summieren zweier Masse geschieht am raschesten dadurch, dass man das erste in den Zirkel nimmt und an das zweite ansetzt, dann den Zirkel über das zweite Mass hinweg bis zu dessen anderem Endpunkt erweitert.)

Noch mehr vereinfacht sich die Konstruktion für die Grenzen derjenigen Schatten, die ein auf der Vertikalebene oder einer gleichgerichteten Ebene sitzendes horizontales Gesims mit Eckbildung auf sich selber wirft. Unter der meist erfüllten Voraussetzung gleicher Ausladungen nach vorne und nach der Seite muss der Schatten eines jeden Eckpunktes der linken Kehrungslinie (Gesimseckprofillinie) wieder auf die Kehrungslinie fallen, und anschliessende horizontale Gesimskanten der Vorderseite müssen horizontale Schatten auf das Gesims werfen.



Figur 13a.

Figur 13a bietet ein einfaches Beispiel für diese Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss. An der linken Kehrungslinie des Gesimses sind die Schattenpunkte *m* und *o* als Schnitte mit den Lichtstrahlen durch

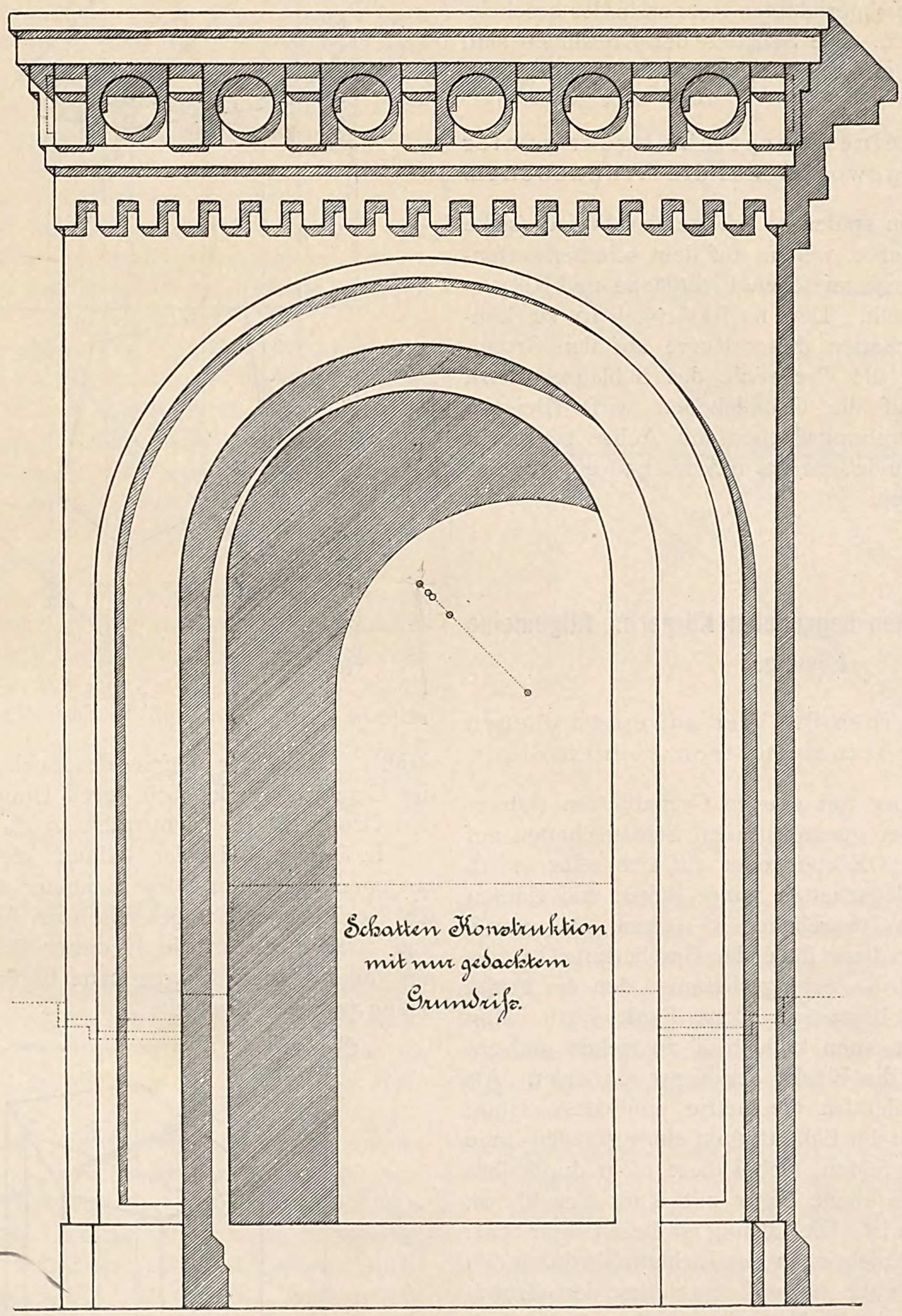
l und n erhalten und die horizontalen Schattengrenzen mp und or daran angeschlossen. Die zur Wandfläche senkrechten Kanten in l und n liefern die unter 45° geneigten Schattengrenzen auf der Wandfläche lm und no.

Der Schatten der rechtseitigen Kehrungslinie ist erhalten wie folgt:

linie durch t haben; auch dadurch fällt die Linie tz als Schattengrenzlinie wieder hinaus.

Schattenpunkt v liegt vertikal unter h um $ab + dh$; Schattenpunkt x liegt vertikal unter i um $ab + ei$; Schattenpunkt y liegt vertikal unter k um ab.

Um das Mass ab zu summieren zu cf, dh und ei,



Figur 13b.

Schattenpunkt s liegt vertikal unter f um $ab + cf$, ausserdem auf dem Lichtstrahl; Schattenpunkt t liegt vertikal unter g um $ab + cf$.

Schattenpunkt z, von w geworfen, würde vertikal unter w liegen um $ab + dh$; da aber Punkt w selbst im Schatten ist, so kann er keinen Schatten werfen. Wenn ferner g seinen Schatten nach t wirft, so muss die Kante gl, weil parallel zum Grundschnitt, als Schatten eine Horizontal-

kann man sich der Vertikalen a, b, bedienen, die im Abstand ab parallel zu ck gezogen ist. Die Kreise machen das Umklappen der Masse ersichtlich.

Proben: Zieht man durch p einen Lichtstrahl rückwärts bis q, so ist mp der Schatten von lq; also muss ut der Schatten von qg, als des Restes von lg sein. Das heisst u ist ebenfalls Schatten von q; also liegen die drei Punkte $q\ p\ u$ auf einem Lichtstrahl; mit andern Worten:

p u muss eine Linie von 45° Neigung sein, und dieselbe Bedingung muss erfüllt werden durch $r\,r_1$.

Ein ausgedehnteres Beispiel der Schattenkonstruktion mit nur gedachtem, beziehungsweise nur zum Abstechen von Massen benütztem Grundriss bietet Figur 13b. In dieser sind nicht nur Schatten auf der Wandfläche, sondern auch auf anderen gleichgerichteten Ebenen in der beschriebenen Weise erhalten. Die Schatten der Kreislinien sind konstruiert wie oben in Artikel 10, Folgerung e) angegeben.

14. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche, geworfen auf die Grundebenen.

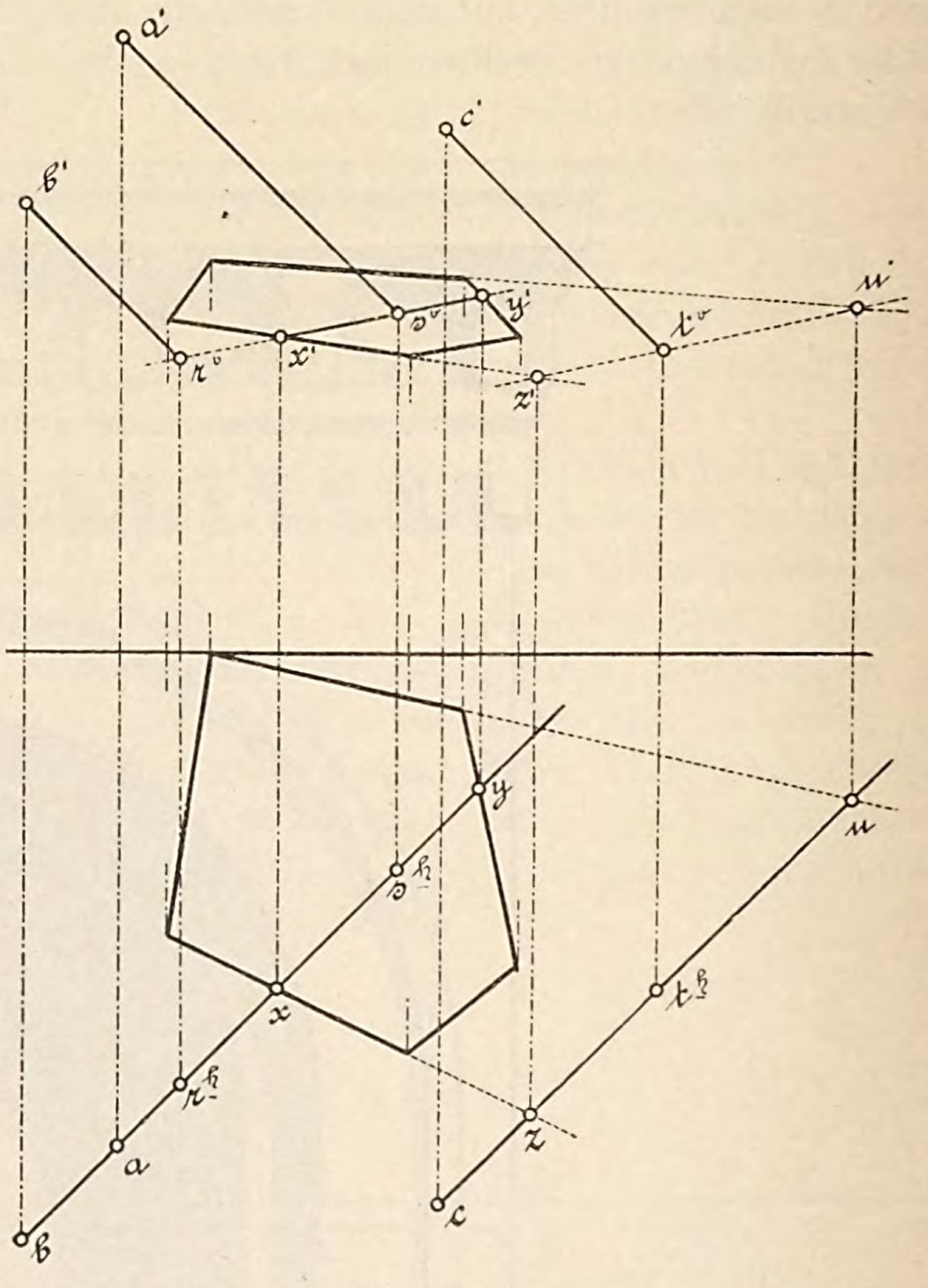
Man bestimmt in später zu erklärender Weise (siehe Kap. IV u. ff.) die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze zwischen Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Artikel 10 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf den Grundebenen ist zugleich die Grenzlinie des Schlagschattens, den der Körper auf die Grundebenen wirft (Beispiel Figur 30b). Für Drehungsflächen mit Achse senkrecht zur beschatteten Grundebene ist in Artikel 59 ein weiteres Verfahren beschrieben.

III. Schatten auf eben begrenzten Körpern. Allgemeine Lösung.

15. Schlagschatten eines Punktes auf einem ebenen Polygon oder einer anderen ebenen Figur.

Wenn ein Körper mit ebenen Grenzflächen (kürzer Vielflach und Polyeder genannt) einen Schlagschatten auf einen andern solchen Körper oder auf sich selber wirft, so hat man die Schlagschatten seiner Ecken und Kanten auf den beschatteten Grenzebenen zu suchen. Das grundlegende Problem für diese Fälle der Beschattung ist hienach das Aufsuchen des Schlagschattens, den ein Punkt auf eine geradlinig begrenzte ebene Figur wirft. Man hat durch den Punkt einen Lichtstrahl zu ziehen und zuzusehen, wo dieser die Fläche der Figur schneidet. Als Problem der darstellenden Geometrie aufgefasst, lautet dies wie folgt: Es ist der Schnittpunkt einer geraden Linie und einer Ebene zu finden, wobei diese nicht durch ihre Spuren, sondern als ebene Figur mit einer Anzahl von Eckpunkten gegeben ist. Die Lösung ist diese (Figur 15a):

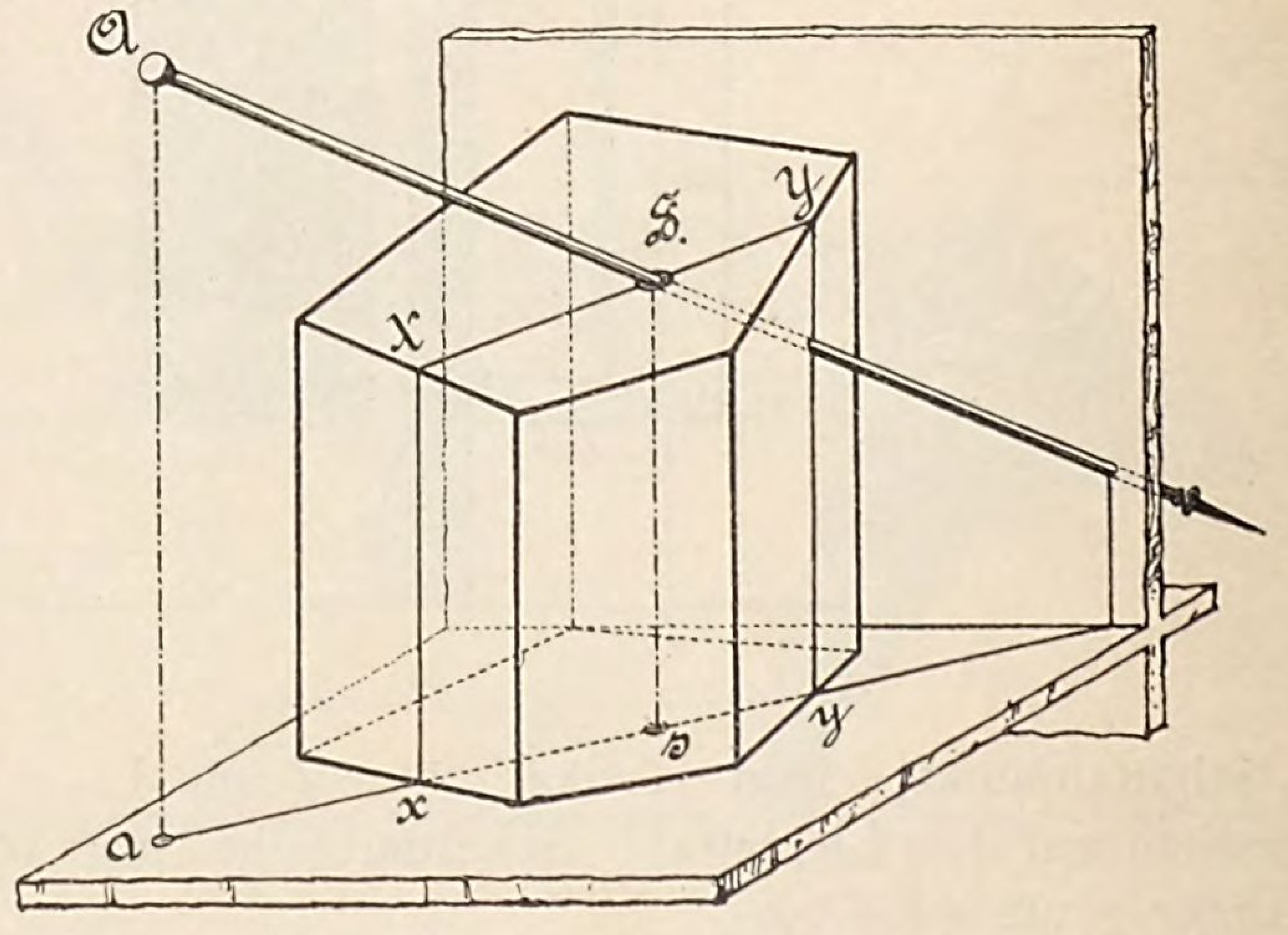
Man zieht die Projektionen des Lichtstrahls durch den schattenwerfenden Punkt *aa'* und betrachtet den Grundriss des Lichtstrahls als die Darstellung seiner horizontalprojizierenden Ebene. Diese vertikalstehende Ebene schneidet die gegebene Figur oder deren Erweiterung nach einer geraden Linie, deren Horizontalprojektion zusammenfällt mit dem Grundriss des Lichtstrahls. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Kanten der gegebenen Figur müssen also im Grundriss zusammenfallen mit den Schnittpunkten der Kanten und des Lichtstrahls. Man hat also diese im Grundriss nach Ziehen des Lichtstrahls erscheinenden Punkte *x* und *y* nur hinaufzuloten auf die entsprechenden Aufrisskanten nach *x'* und *y'* und erhält in der Verbindungslinie *x' y'* die Vertikalprojektion jener Schnittlinie. Wo sie getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls, da ist der Aufriss des Schlagschattenpunktes s^v;



Figur 15a.

der Grundriss findet sich durch Hinunterloten von s^v auf den Grundriss des Lichtstrahls in s^h.

In Figur 15b ist der Gedanke dieser für die Schatten auf ebenbegrenzten Körpern immer wieder zu verwertenden Konstruktion perspektivisch zur Anschauung gebracht, und zwar erscheint sie in dieser Darstellung so, als ob ein volles Prisma die gegebene Figur auf die Horizontalebene projizieren würde.



Figur 15b.

Der Schatten des Punktes *aa'* hat sich innerhalb der Grenzlinien der gegebenen Figur gefunden. Ein zweiter Fall ist der, dass zwar der Schatten des Punktes *bb'* ausser-

halb der Figur fällt, dass aber doch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Kanten der Figur unmittelbar schneidet, so dass die Lösung völlig dieselbe bleibt, wie im ersten Fall (Schattenpunkt r^v mit Grundriss in r^h), und nur $x' y'$ zu verlängern ist.

Ein dritter Fall erscheint, wenn nicht nur der Schatten des Punktes cc' ausserhalb der Figur fällt, sondern auch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Seiten der Figur nicht mehr unmittelbar schneidet. Man muss dann geeignete Seiten oder Diagonalen der Figur verlängern, bis zwei Schnitte mit der Horizontalprojektion des Lichtstrahls erhalten werden (in z und u). Diese Schnittpunkte lotet man wieder hinauf nach z' und u', zieht $z' u'$ und erhält als Schnitt dieser Linie mit dem Aufriss des Lichtstrahls den Schattenpunkt t^v im Aufriss. Das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls giebt den Schattenpunkt im Grundriss t^h.

Ungenaue spitzwinklige Durchschnitte zwischen den Seiten der Figur und dem Grundriss des Lichtstrahls oder den Projektionsloten können immer durch bessere Durchschnitte ersetzt werden, indem man bestimmte andere Seiten der Figur verlängert oder bestimmte Diagonalen zieht. Auch die Unsicherheit, welche durch zu geringe Länge der Strecken xy oder zu hereinkommt, lässt sich auf diesem Weg umgehen.

Beim Aufzeichnen der Projektionen des Vielecks ist zu beachten, dass beliebig angenommene n Eckpunkte nur dann eine ebene Figur bilden, wenn die in Art. 8e genannte Bedingung erfüllt ist.

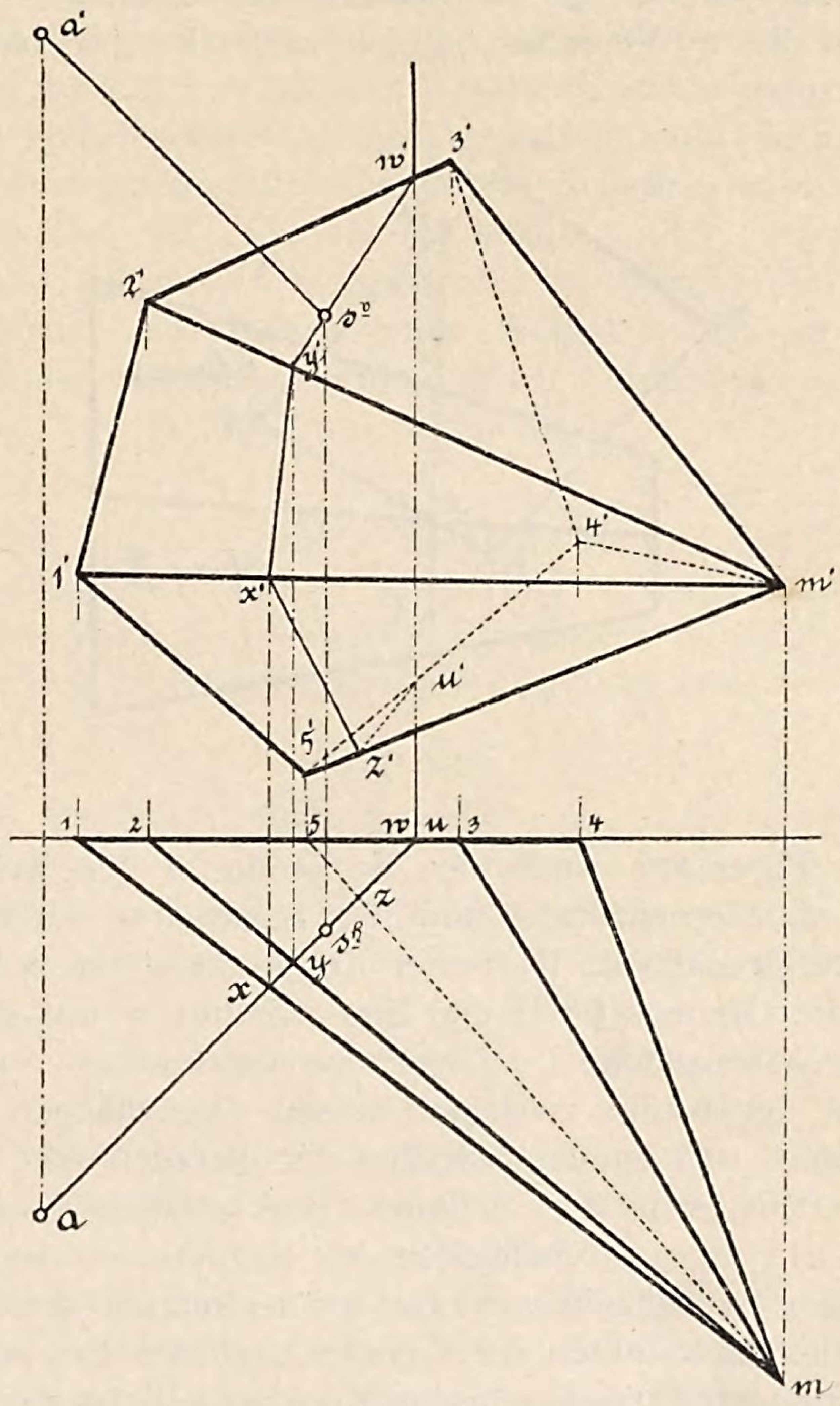
Ist der Schlagschatten eines Punktes auf einer ebenen Figur mit gekrümmter Umrisslinie zu bestimmen, so wählt man auf dieser Linie einige Punkte als Eckpunkte eines Vielecks und konstruiert den Schlagschattenpunkt auf diesem in der zuvor beschriebenen Weise.

16. Schlagschatten eines Punktes auf einem Vielflach.

Auf Grund der vorgeführten Konstruktion ist folgendes Problem lösbar: „Den Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen." Man hat die Konstruktion nur auf die einzelne Grenzebene des Körpers anzuwenden.

Nicht immer, wenn der Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen ist, weiss man nun aber zum voraus, auf welche der ebenen Grenzflächen des Körpers der Schatten fällt. Es ist daher meist notwendig, die Schnittlinie der lotrechten Lichtstrahlenebene nicht nur mit einer Körperfläche zu suchen, sondern mit mehreren, ja oft mit allen, die von ihr geschnitten werden, so dass eine gebrochene Schnittlinie, ein „Schnittpolygon", an die Stelle der früheren geraden Schnittlinie tritt. Die Horizontalprojektionen der Eckpunkte der gebrochenen Schnittlinie sind sämtlich im Grundriss des Lichtstrahls und des Polyeders schon vorhanden und dürfen nur auf die Kanten der Vertikalprojektion des Körpers hinaufprojiziert werden. Wo der Lichtstrahl die gebrochene Schnittlinie schneidet, da ist der Schatten des Punktes auf dem Polyeder.

Es sei z. B. in Figur 16 der Schlagschatten des Punktes aa' auf der fünfseitigen Pyramide mit Basis in der Vertikalebene zu suchen. Nachdem die Lichtstrahl-



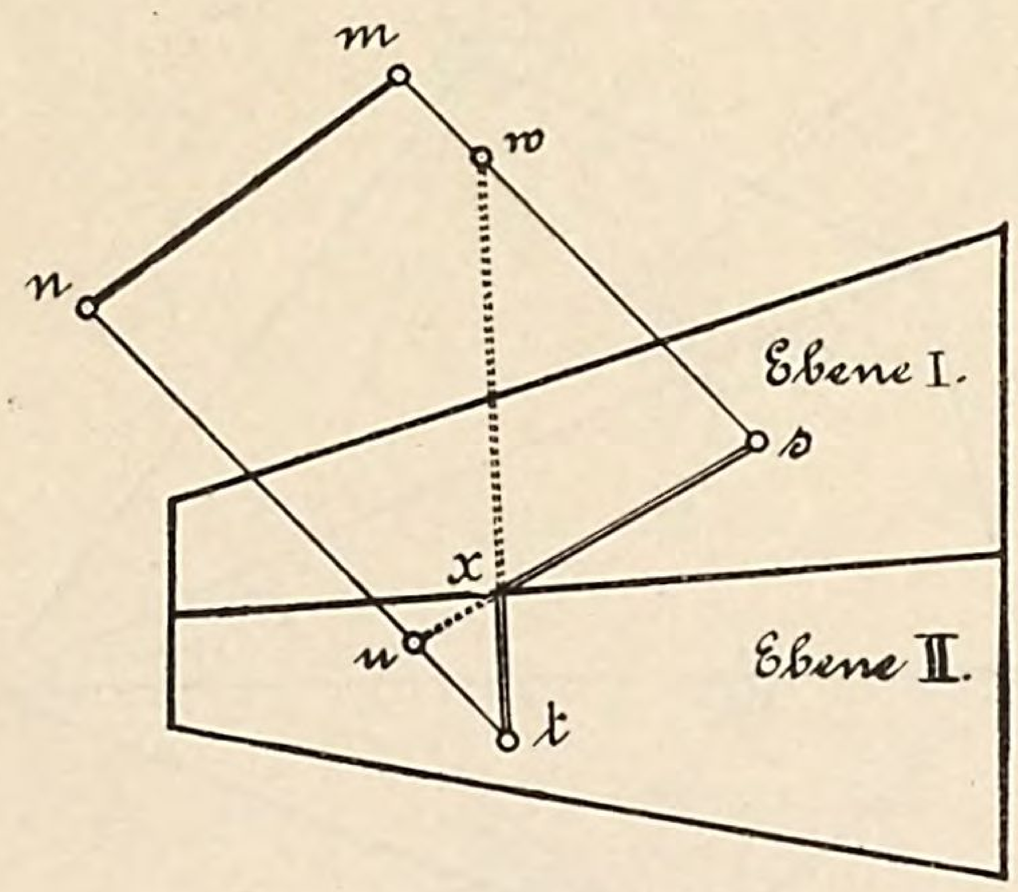
Figur 16.

projektionen gezogen sind, lotet man aus dem Grundriss die Schnittpunkte $u\,z\,x\,y\,w$ hinauf nach $u'\,z'\,x'\,y'\,w'$ und erhält hiedurch im Aufriss die gebrochene Schnittlinie $u'\,z'\,x'\,y'\,w'$. Sie wird vom Aufriss des Lichtstrahls im Punkt s^v getroffen; dieser ist Schlagschattenpunkt im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach s^h giebt den Schlagschattenpunkt im Grundriss.

Schlagschatten einer geraden oder gekrümmten Linie auf einem Vielflach. Schlagschattenpunkte einer Linie auf einer andern. 17.

Der nächste Schritt wird zu folgendem Problem führen: Den Schatten einer begrenzten geraden Linie auf einem Polyeder zu suchen. Man hat dabei zunächst zu suchen die Schatten der beiden Endpunkte der Geraden. Gewöhnlich werden sie auf zwei verschiedene, aber benachbarte Flächen des Körpers fallen, und man weiss dann zunächst über die Richtung der gebrochenen Schattenlinie nichts, wenn man auch die beiden Endpunkte derselben hat. Es ist daher notwendig, wenigstens für einen Endpunkt den Schatten auch auf der Erweiterung derjenigen Grenzebene zu bestimmen, die der andere Punkt beschattet. Um den Schatten eines

Punktes auf der Erweiterung einer Grenzebene zu erhalten, darf man nur die auf dieser befindliche Strecke der gebrochenen Schnittlinie bis zum Schnitt mit der Vertikalprojektion des Lichtstrahls verlängern. Verfährt man in dieser Weise für beide Endpunkte, so hat man eine Probe.



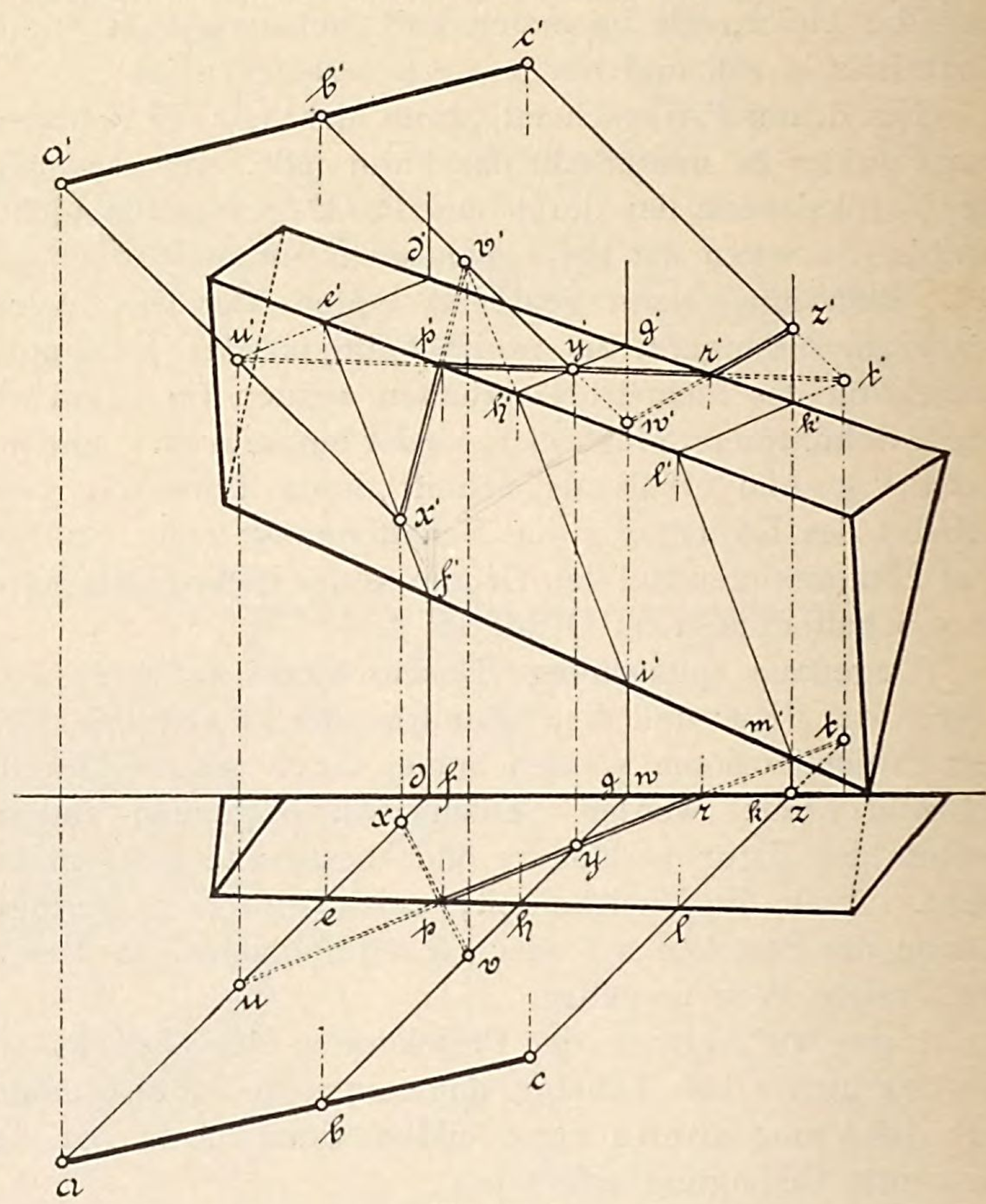
Figur 17a.

In Figur 17a werfe der Endpunkt m den Schatten s auf die Grenzfläche I und den Schatten w auf die erweiterte Grenzfläche II, ferner Endpunkt n den Schatten t auf die Grenzfläche II und den Schatten u auf die erweiterte Grenzfläche I. Zur Probe müssen sich $s\,u$ und $t\,w$ auf der Kante zwischen beiden Grenzflächen in x schneiden; $s\,x\,t$ ist der Schatten der Geraden $m\,n$.

Verteilt sich der Schatten der geraden Linie auf mehr als zwei Grenzflächen des Körpers, so ist jede getroffene Grenzfläche erweitert zu denken und der Schatten jedes Endpunktes der Geraden auf der Erweiterung zu bestimmen. Die graphische Konstruktion ist dabei zunächst dieselbe wie bei den vorhergehenden Problemen; man bestimmt zuerst die gebrochenen Schnittlinien der beiden lotrechten Lichtstrahlenebenen mit dem Körper und verlängert jede Strecke der Schnittlinien, die auf einer beschatteten Grenzfläche liegt, bis zum Schnitt mit beiden Lichtstrahlprojektionen.

Oft fällt ein Teil des Schattens der Geraden auf die Grundebenen, der andere auf den Polyeder; doch macht dies für die Lösung der Aufgabe keinen wesentlichen Unterschied, sondern man behandelt die Grundebene, als ob sie eine Grenzfläche des Polyeders wäre. Zur vollständigen Lösung gehört das Hinunterloten der Schattenpunkte und das Ziehen der Schattenlinien in der Horizontalprojektion.

Beispiel. Die gerade Linie $a\,b\,c$ in Figur 17b werfe ihren Schatten teils auf das schräge Prisma, teils auf die Vertikalebene. Die gebrochenen Schnittlinien der drei durch die Punkte $a\,b\,c$ gehenden vertikalen Lichtstrahlenebenen, erhalten wie zuvor in Art. 16, seien $d'\,e'\,f'$ $g'\,h'\,i'$ $k'\,l'\,m'$. Unmittelbar werden als Schnitte dieser Linien mit den drei Lichtstrahlen erhalten die Schattenpunkte $x'\,y'\,z'$. Durch Verlängerung von $d'\,e'$ wird erhalten u' als Schatten von a' auf der erweiterten oberen Grenzfläche; durch Verlängerung von $i'\,h'$ wird erhalten v' als Schatten von b' auf der erweiterten unteren Grenzfläche; durch Verlängerung von $l'\,k'$ wird erhalten t' als Schatten von c' auf der erweiterten oberen Grenzfläche, und durch Ziehen von $g'\,i'$ wird erhalten w' als Schatten von b' auf der Vertikalebene. Nun sind zu ziehen die Linien $x'\,v'$



Figur 17b.

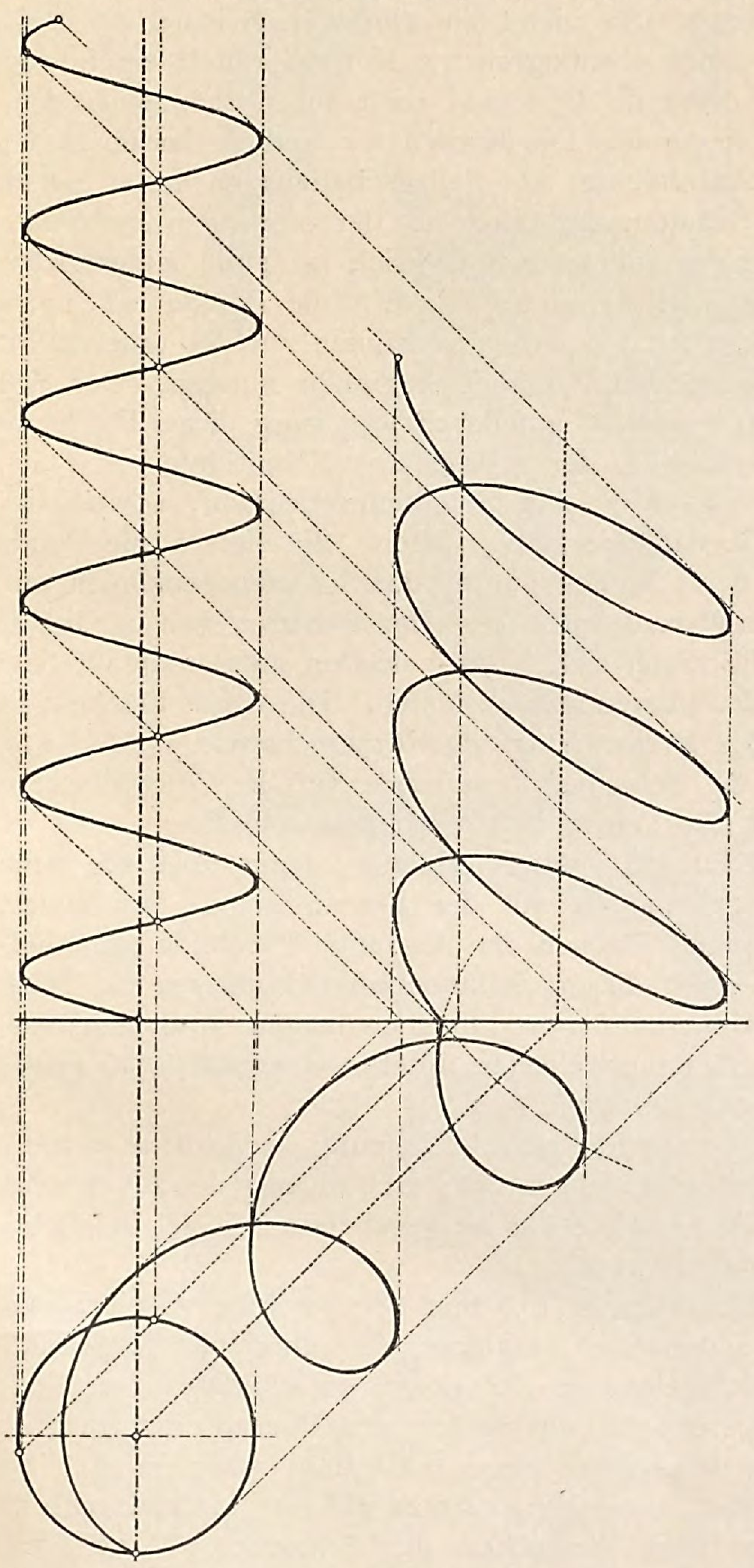
$u'\,y'\,t'$ $w'\,z'$; zur Probe muss $u'\,y'\,t'$ eine Gerade werden und die Schnittpunkte der drei Linien p' und r' müssen auf die Kanten fallen. Die gebrochene Linie $x'\,p'\,y'\,r'\,z'$ ist der Schlagschatten von $a'\,b'\,c'$. Durch Hinunterloten ihrer Punkte auf die Lichtstrahlprojektionen und Kanten in den Grundriss findet sich in diesem die Schattenlinie $x\,p\,y\,r\,z$.

Ein zweites, mittelbar bestimmendes Verfahren ist das Aufsuchen des Schlagschattens der Geraden und der Schlagschatten der Kanten des Vielflachs auf einer Grundebene. Wo der Schlagschatten der Geraden den Schlagschatten einer Kante schneidet, da ist der Schlagschatten desjenigen Punktes, in welchem die auf dem Vielflach zu suchende Schlagschattenlinie über die Kante weggeht; ein rückwärts durch den Schattenpunkt auf der Grundebene gezogener Lichtstrahl führt also zu dem Schattenpunkt auf der Kante. Hat man auf allen beschatteten Kanten solche Punkte bestimmt, so führt deren geradlinige, in richtiger Reihenfolge vollzogene Verbindung ebenfalls zu der gesuchten gebrochenen Schlagschattenlinie. Dieses Verfahren kann zuweilen rascher zum Ziel führen als das erstbeschriebene; auch bei dem zuvor betrachteten Beispiel würde dies zutreffen.

Der Schlagschatten einer gekrümmten Linie auf einem Vielflach findet sich dadurch, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Punkten der Linie auf dem Vielflach aufsucht und stetig verbindet. Zur schärferen Bestimmung des Verlaufs der gebrochenen Schattenkurve,

insbesondere der Eckpunkte, die sie auf den Kanten des Körpers bildet, ist es zu empfehlen, für jedes Schattenkurvenstück auch noch ein Stück weit die beiden Verlängerungen auf der Erweiterung der beschatteten Grenzebene aufzusuchen.

Wenn etwa nur die Schlagschattenpunkte auf den Kanten des Vielflachs verlangt sind, so lassen sich diese Punkte rascher dadurch erhalten, dass man die Schlag-



Figur 17 c.

schatten der Kanten des Vielflachs und diejenigen der Kurve auf einer Grundebene aufsucht. Der Schnittpunkt der hiedurch erhaltenen Schattenkurve mit dem Schatten einer Kante ist der Schatten desjenigen Punktes der Kante, auf welchen die gegebene Kurve ihren Schatten wirft.

Eine in der praktischen Schattenkonstruktion kaum selbständig vorkommende Aufgabe: „Den Schlagschattenpunkt oder die Schlagschattenpunkte einer geraden oder gekrümmten Linie auf einer anderen solchen Linie zu suchen", kann immerhin als Bestandteil zusammengesetzter Aufgaben Bedeutung gewinnen, etwa wenn es sich darum handelt, wichtige Punkte der Schlagschattengrenzen unabhängig von der übrigen Lösung scharf zu bestimmen. Diese Aufgabe löst sich dadurch, dass man die Schlagschatten beider Linien auf einer Grundebene sucht. Wo sich die hiedurch erhaltenen Schattenlinien schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschattenpunkt derjenigen zwei Linienpunkte, die einander in Schatten setzen, und die zuweilen als „Fixpunkte" beider Linien bezeichnet werden. Ein rückwärts gezogener Lichtstrahl führt also zu beiden. Eine naheliegende Aufgabe: „Es sind die Punkte der Selbstbeschattung einer Schraubenlinie aufzusuchen" ist in Figur 17 c behandelt.

Schlagschatten eines Vielflachs auf einem andern Vielflach und Selbstbeschattung von Körpern mit ebenen Flächen. Schatten im Innern hohlgedachter ebenbegrenzter Körper. 18.

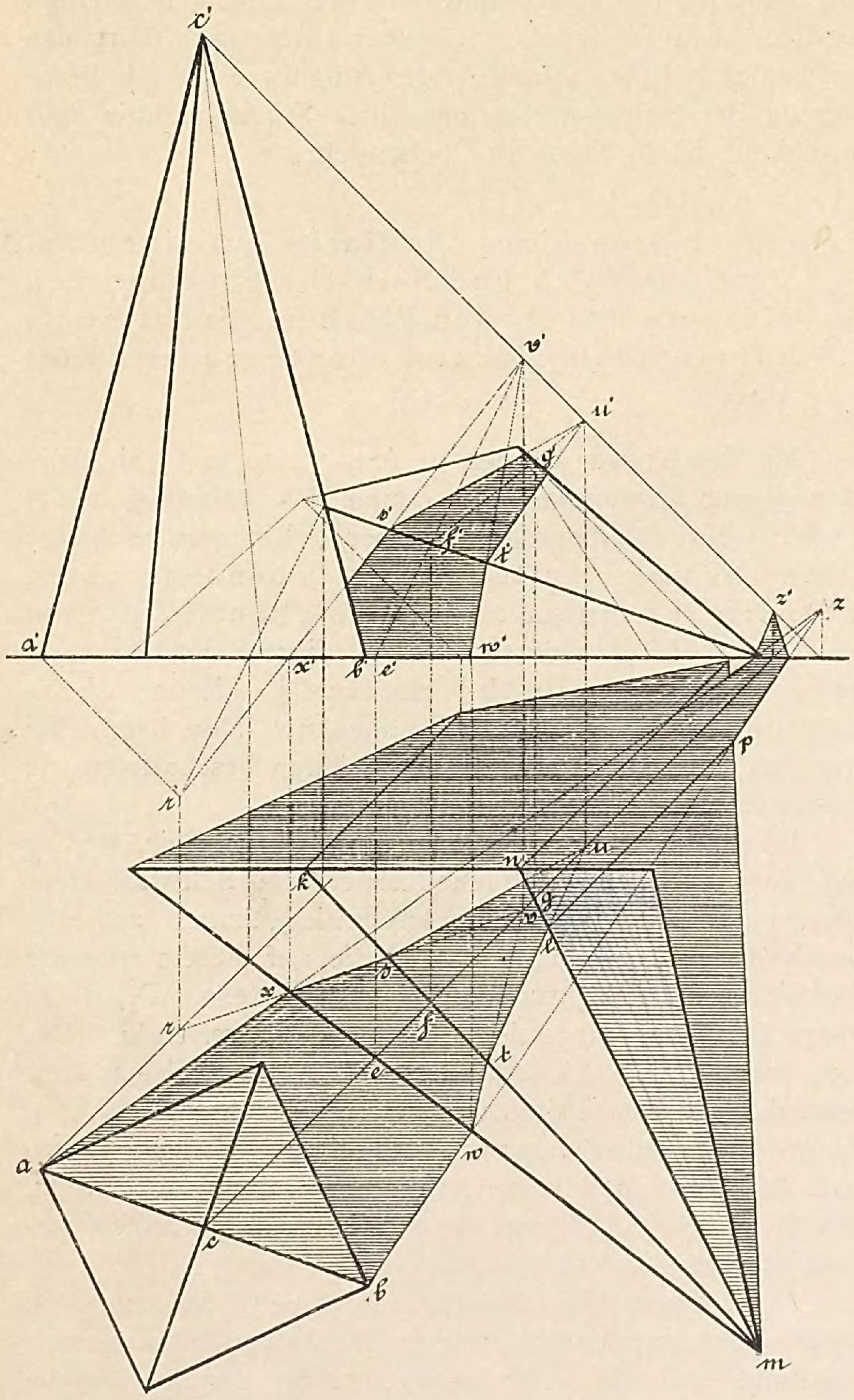
Mit den Konstruktionen in Art. 15, 16 u. 17 sind die Grundlagen gewonnen, auf denen das weitest gehende Problem für ebenbegrenzte Körper gelöst werden kann: „Den Schlagschatten eines ebenbegrenzten Körpers auf einem andern solchen Körper zu suchen." Eingeschlossen ist in diesem Problem das andere: „Die Selbstbeschattung eines ebenbegrenzten Körpers zu bestimmen." Man hat hiebei nur den schattenwerfenden Teil und den beschatteten wie zwei getrennte Körper zu behandeln.

Indem die gebrochene oder Streifpolygonlinie, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze darstellt, ihren eigenen Schlagschatten auf den beschatteten Körper wirft, erzeugt sie auf diesem zugleich die Grenzlinie des gesuchten Schlagschattens. Denn die längs der Streifpolygonlinie den schattenwerfenden Körper berührenden Lichtstrahlen bilden ein Prisma; nur ausserhalb dieses Prismas kann der beschattete Körper Lichtstrahlen aufnehmen; was von seiner Oberfläche innerhalb liegt, ist im Schatten, und zwar im Schlagschatten, soweit es dem Licht zugewendet, im Körperschatten, soweit es vom Licht abgewendet ist.

Die Lösung wird also darin bestehen, dass man auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze bestimmt und die Schlagschatten ihrer geraden Stücke auf den Grenzebenen des beschatteten Körpers nach Art. 17 aufsucht.

Diese Selbstschattengrenze kann in vielen Fällen oft schon nach der Anschauung festgestellt werden; ein Fehler in dieser Richtung macht sich später im Resultat meist von selbst bemerklich und hat nur ein wenig vergebliche Arbeit zur Folge. Wo die Entscheidung schwieriger ist, bestimmt man das genannte Streifpolygon etwa mit Hilfe des Schlagschattens, den der schattenwerfende Körper auf eine Grundebene wirft, unter Anwendung des in Art. 12 ausgesprochenen Satzes für die Selbstschattengrenze. Häufig fällt ohnehin ein Teil des Schlagschattens auf die Grundebene. Oder man macht von den in Art. 12, zweiter Teil, genannten Schnittpolygonen auch für die

Selbstschattengrenze auf dem schattenwerfenden Körper Gebrauch, wie es für den beschatteten ohnehin nahe liegt. Denn die geraden oder gebrochenen Schnittlinien, die auf diesem zur Bestimmung der Schlagschattenpunkte dienen, sind ja Bestandteile der Schnittpolygone, mit welchen seine Körperschattengrenze bestimmt werden kann, und können also, genügend weit fortgesetzt, auch in dieser zweiten Richtung verwertet werden.



Figur 18a.

Ein besonderer Fall der Selbstbeschattung ebenbegrenzter Körper erscheint im Innern von solchen, wenn man ihre Oberfläche als dünne Schale auffasst, wie sie etwa in einem Papier- oder Blechmodell geboten ist. Die Selbstschattengrenze, von bestimmten Kanten als „Streifpolygon" gebildet, ist für das Innere eines solchen Hohlkörpers ganz dieselbe wie für das Aeussere; die Lichtflächen des Aeussern erscheinen im Innern als die Körperschattenflächen, da sie vom Licht abgewendet sind; die Körperschattenflächen des Aeussern sind im Innern dem Lichte zugewendet, aber durch die andern Flächen verdeckt; sie sind also durchaus Schlagschattenflächen. Erst wenn ein Teil der Grenzflächen weggebrochen wird, kann ein Teil dieser dem Lichte zugewendeten inneren Flächen beleuchtet werden; die Grenzlinie zwischen diesem inneren Licht und dem inneren Schlagschatten hat für das Aeussere keine Bedeutung, wie es auch äussere Selbstbeschattung geben kann, ohne dass deren Grenzlinien auf den Lichtflächen für das Innere etwas bedeuten.

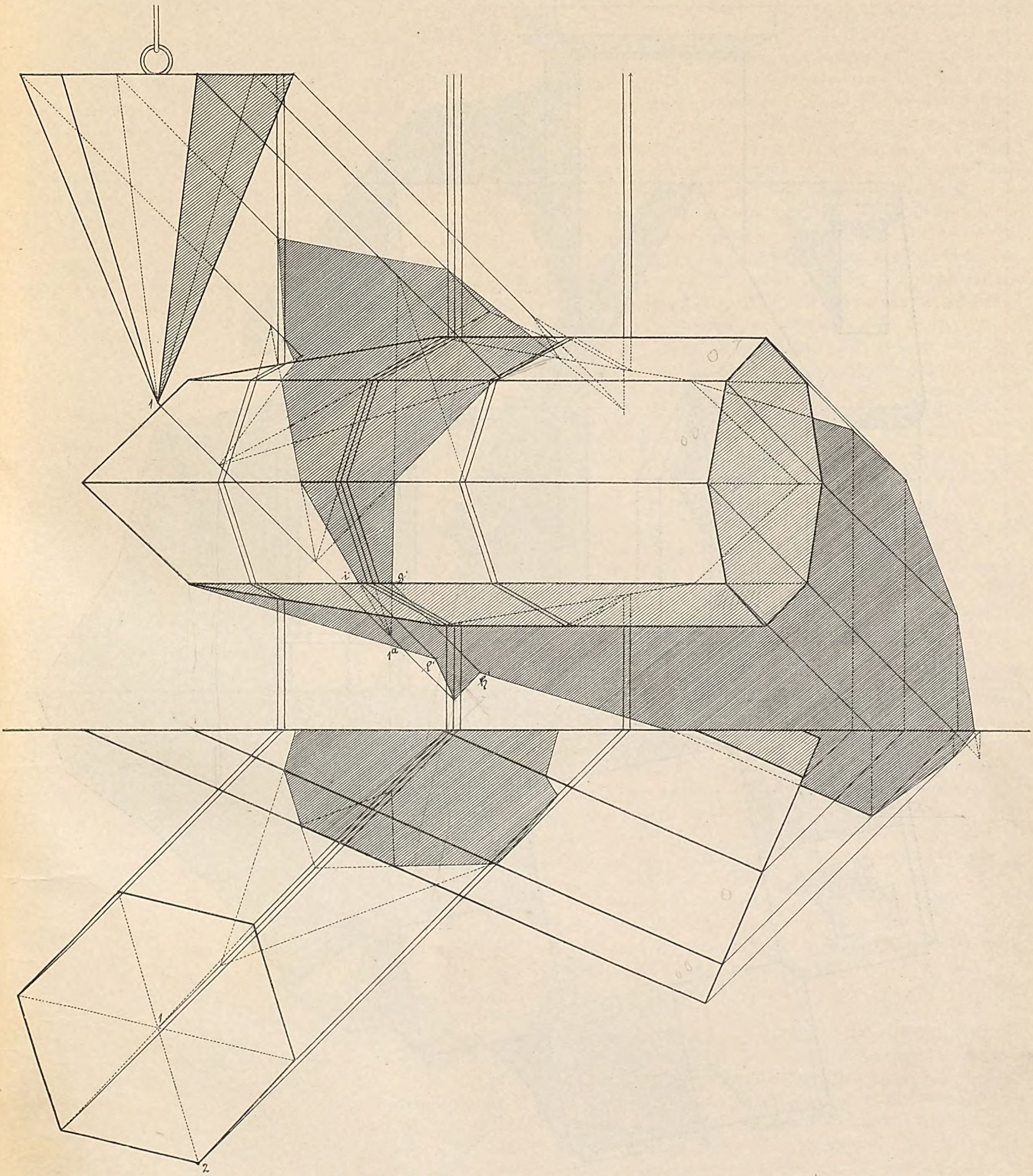
Figur 18a bietet ein einfaches Beispiel der Beschattung eines ebenbegrenzten Körpers durch einen andern; eine stehende Pyramide wirft ihren Schlagschatten auf eine liegende. Die Kanten ac und bc lassen sich nach der Anschauung als Selbstschattengrenzlinien erkennen. Der Schatten der Spitze cc' der stehenden Pyramide auf der Horizontalebene findet sich in z; die beiden Schattengrenzlinien az und bz liefern die Punkte xx' und ww', an denen die Schattengrenzlinien auf der unteren Fläche der liegenden Pyramide beginnen müssen. Der Schlagschatten von cc' auf der Erweiterung dieser Fläche findet sich mit Hilfe der gebrochenen Schnittlinie $e'f'g'$ in vv'; $x'v'$ und $w'v'$ sind Schattengrenzlinien, soweit sie auf die Grenzfläche selber fallen. Sie liefern die Punkte s' und t' als Anfangspunkte der Schattengrenzlinien auf der obern Pyramidenfläche. Der Schatten von cc' auf dieser Fläche findet sich in uu'; dorthin müssen die Grenzlinien auf der oberen Fläche laufen. Die dritte Fläche der liegenden Pyramide ist im Körperschatten, weil die Kante mn die Schlagschattengrenze auf die Grundebene wirft, kann also keinen Schlagschatten aufnehmen.

Proben werden erhalten, wenn noch die Schatten von aa' und bb' auf den Erweiterungen der beiden beleuchteten Flächen der liegenden Pyramide gesucht werden; nach diesen Schattenpunkten müssen die Schattengrenzlinien auf diesen Flächen laufen. Z. B. Schatten von aa' auf der erweiterten unteren Grenzfläche in rr'; dorthin läuft die Linie $v'x'$.

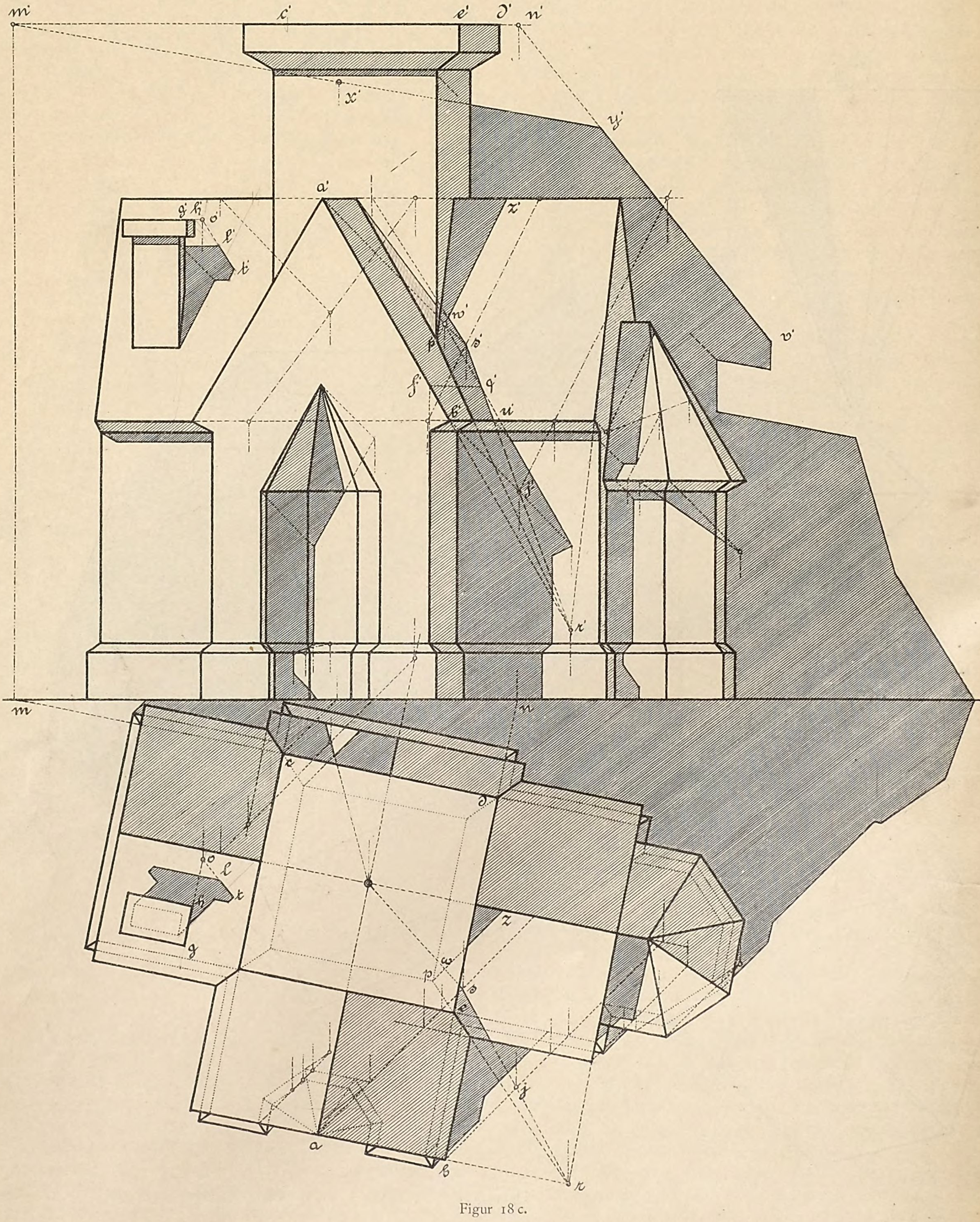
Die unmittelbare Bestimmung der Linie $r'v'$ mit Hilfe von rr' wäre die strenge Durchführung des zuvor erklärten Verfahrens ohne die im gegebenen Beispiel mögliche Abkürzung gewesen.

Die Figuren 18b und 18c, welche schwierigere Beispiele darstellen, erklären sich durch die Konstruktionslinien, welche in der ersten vollständig, in der zweiten wenigstens für die wichtigeren Punkte eingetragen sind. Figur 18c bietet einen Fall der früher in Art. 15 erwähnten Umgehung spitzwinkliger Liniendurchschnitte, indem beim Aufsuchen des Schattens ss' der vorderen Giebelspitze aa' auf der langseitigen Dachfläche nicht die steile Kehllinie zwischen beiden Dächern, sondern die Verlängerung der langseitigen Trauflinie benützt ist. Ebenso ist beim Aufsuchen des Schattens jj' der unteren Giebelecke bb' auf der Erweiterung der langseitigen Dachfläche nicht die steile Randlinie der letzteren, sondern die Verlängerung ihrer Firstlinie benützt.

Selbstverständlich wird man die in Figur 18b zu grösserer Anschaulichkeit vollständig gezeichneten Schnittpolygone in der praktischen Verwertung des Verfahrens nur bruchstückweise, soweit sie sich als notwendig vermuten lassen, in die Zeichnung aufnehmen.



Figur 18b.



Figur 18 c.

19. Die Umkehrung der in Art. 18 erklärten allgemeinen Lösung.

Alle Lösungen, die bisher für Schatten auf ebenen Figuren und Körpern mit ebenen Flächen gezeigt wurden, lassen sich auch in der Weise durchführen, dass zum Schneiden des beschatteten Gebildes nicht die vertikale Ebene des Lichtstrahls gewählt wird, sondern die unter 45° geneigte, die ihn auf die vertikale Grundebene projiziert (die sogenannte vertikalprojizierende Ebene). Man erhält dann die Schnittpolygone im Grundriss anstatt im Aufriss, und der Schattenpunkt erscheint zuerst im Grundriss. Diese Lösung ist nichts anderes als eine Umkehrung des allgemeinen Verfahrens mit Vertauschung von Horizontal- und Vertikalprojektion; sie ist etwa vorzuziehen, wenn man die Schatten nur im Grundriss braucht. Da jedoch weitaus in den meisten Fällen die Benützung der vertikalen Schnittebenen näher liegt, so mag die Lösung mit diesen auch fernerhin als die „allgemeine“ für Schatten auf Polyedern bezeichnet werden.

Noch eine zweite Abänderung der allgemeinen Lösung erscheint in der Benützung der später zu erklärenden Seitenprojektion anstatt des Grundplans und der seitlich projizierenden Ebenen der Lichtstrahlen anstatt der vertikalen. Diese Lösung wird beizuziehen sein, wenn etwa das zu schattierende Gebilde nur durch Aufriss und Seitenprojektion gegeben ist, so dass die allgemeine Lösung das Zeichnen eines Grundplans erfordern würde. Ein weiterer Fall ist geboten bei prismatischen und cylindrischen Körpern parallel zum Grundschnitt, worüber auf Kap. IV zu verweisen ist.

20. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem Vielflach.

Man bestimmt in später zu erklärender Weise die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze von Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Art. 17 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf dem Vielflach ist zugleich die Grenze des Schlagschattens, den der Körper auf das Vielflach wirft.

21. Hilfssätze für die Schatten auf Körpern mit ebenen Flächen.

Beim Aufsuchen der Schattengrenzen auf Polyedern (und zum Teil auch andern Körpern) gelangen fortwährend folgende Sätze zur Verwertung, indem sie entweder als Konstruktionsmittel dienen oder Proben liefern. Eines Beweises bedürfen sie nicht.

a) Was im Schatten ist, kann keinen Schatten werfen. In keiner Schattengrenze kann ein Punkt oder eine Kante als schattenwerfend auftreten, der oder die ringsum von Körperschatten oder Schlagschatten umgeben ist.

b) Punkte und Kanten, die ringsum von Lichtflächen umgeben sind, können ebenfalls keine Schatten werfen. Nur die Grenzlinien zwischen Licht- und Körperschatten erscheinen als schattenwerfend in den Schlagschattengrenzen.

c) Der Schatten einer geraden (oder gekrümmten) Linie auf einer Ebene (oder anderen Fläche) beginnt da, wo die Linie mit der Fläche zusammentrifft. Dieser selbstverständliche Satz bietet willkommene Proben besonders dann, wenn der Schnittpunkt nicht unmittelbar am Gebilde vorliegt, sondern Linie und Fläche räumlich getrennt liegen, in welchem Fall das Gerichtetsein der Linie nach dem Schnittpunkt nicht unmittelbar aus dem Bild herausgefühlt wird.

So läuft z. B. in Figur 18c der Schatten der Kante *c d* auf der Vertikalebene, *x' y'* nach dem Punkte *m'*, der den Schnittpunkt dieser Kante mit der Vertikalebene darstellt; ebenso läuft *v' y'* nach *n'*, dem Schnittpunkt von *e' d'* mit der Vertikalebene. Am Körper selbst läuft *z' w'* nach *p'* und *s' u'* nach *r'*, dem Schnittpunkt der Kante *a' b'* mit der langseitigen Dachfläche. Für den Schatten des Kamins auf der Dachfläche bestimmt sich leicht *o o'* als Schnittpunkt der Kante *g h* mit der Dachfläche; nach diesem Punkt muss in Grundriss und Aufriss der Schatten dieser Kante *t l* laufen.

d) Der Schatten einer Geraden auf jeder ihr parallelen Ebene ist eine Parallellinie. So ist z. B. in Figur 18c der Schatten der Giebelkante *a' b'* auf der Langwand dieser Kante parallel; die linke geneigte Kante der Nische in der Giebelwand hat auf der vertikalen Rückwand der Nische einen parallelen Schatten und ebenso die rechte Giebelkante der langseitigen Dachfläche auf der ersten Chor-Dachfläche einen parallelen Schatten in Grundriss und Aufriss.

e) Die Schattenstücke einer Geraden auf zwei verschiedenen Ebenen treffen sich auf der Schnittlinie dieser Ebenen. Auch dieser Satz, selbstverständlich wenn die Ebenen am Gebilde selbst sich schneiden, liefert oft willkommene, nicht sofort in die Augen springende Proben, wenn die Ebenen räumlich getrennt liegen. In Figur 18c ist z. B. *f' q'* die Schnittlinie der vertikalen Langwand mit der langseitigen Dachfläche. Die Giebelkante *a' b'* wirft getrennte Schattenstücke auf diese beiden Ebenen. Dasjenige auf der vertikalen Wand muss verlängert nach *q'* als dem Schnittpunkt von *f' q'* und *s' u'* laufen.

f) Wenn der Schatten einer Geraden am Rand einer Ebene aufhört, um auf einer anderen getrennt liegenden Ebene sich fortzusetzen, so liegen die Endpunkte beider Schattenstücke auf einem Lichtstrahl. Das heisst sie liegen in beiden Projektionen auf einer Linie von 45° Neigung. So liegen z. B. in Figur 18a die Punkte *l* und *p*, in Figur 18b die Punkte *g'* und *h'*, ferner *i'* und *l'* auf einem Lichtstrahl, und besonders häufig findet sich die genannte Probe in Figur 18c, wofür mehrere Linien eingezeichnet sind.

g) Der Schatten einer senkrecht zur Vertikalebene gerichteten Geraden auf einem Vielflach (und auf jedem anderen Körper) fällt im Aufriss mit der Lichtstrahlprojektion zusammen, ist also immer eine gerade Linie von 45° Neigung.

Ebenso fällt der Schatten einer Vertikallinie auf jedem Körper im Grundriss mit der Lichtstrahlprojektion zusammen.

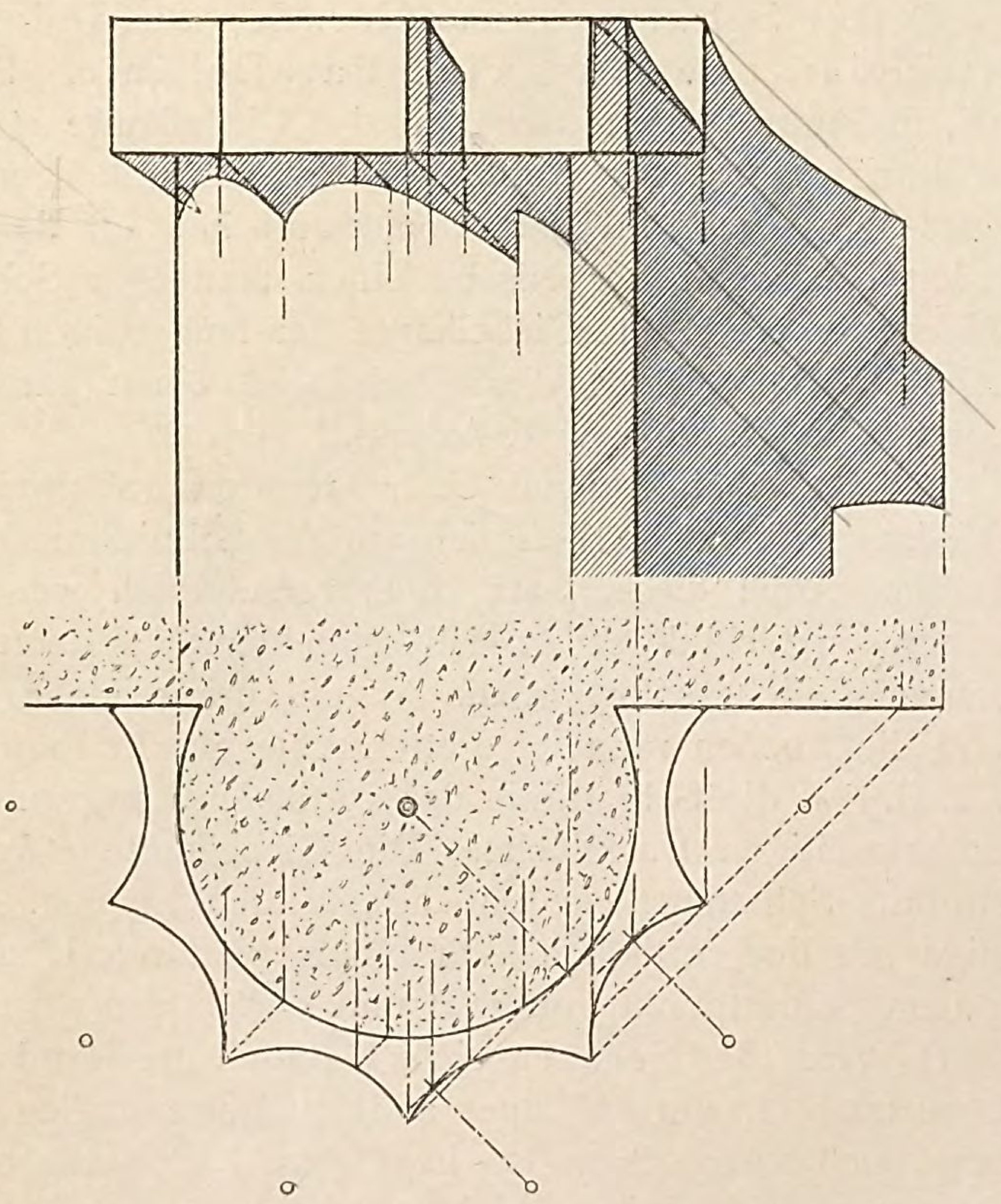
h) Eine gerade Linie parallel zum Grundschnitt hat auf jeder Ebene parallel zum Grundschnitt einen horizontalen Schatten im Grundriss und Aufriss. (Besonderer Fall von *d.*)

i) Eine vertikale Gerade wirft auf jede vertikalstehende Ebene einen vertikalen Schatten. Der Schatten einer Geraden, die senkrecht zur Vertikalebene steht, ist auf jeder zur Vertikalebene senkrecht stehenden Ebene ebenfalls senkrecht zur Vertikalebene. (Besondere Fälle von *d.*)

k) Der Schatten einer parallel zum Grundschnitt liegenden Geraden auf einer Ebene normal zum Grundschnitt ist unter 45° geneigt.

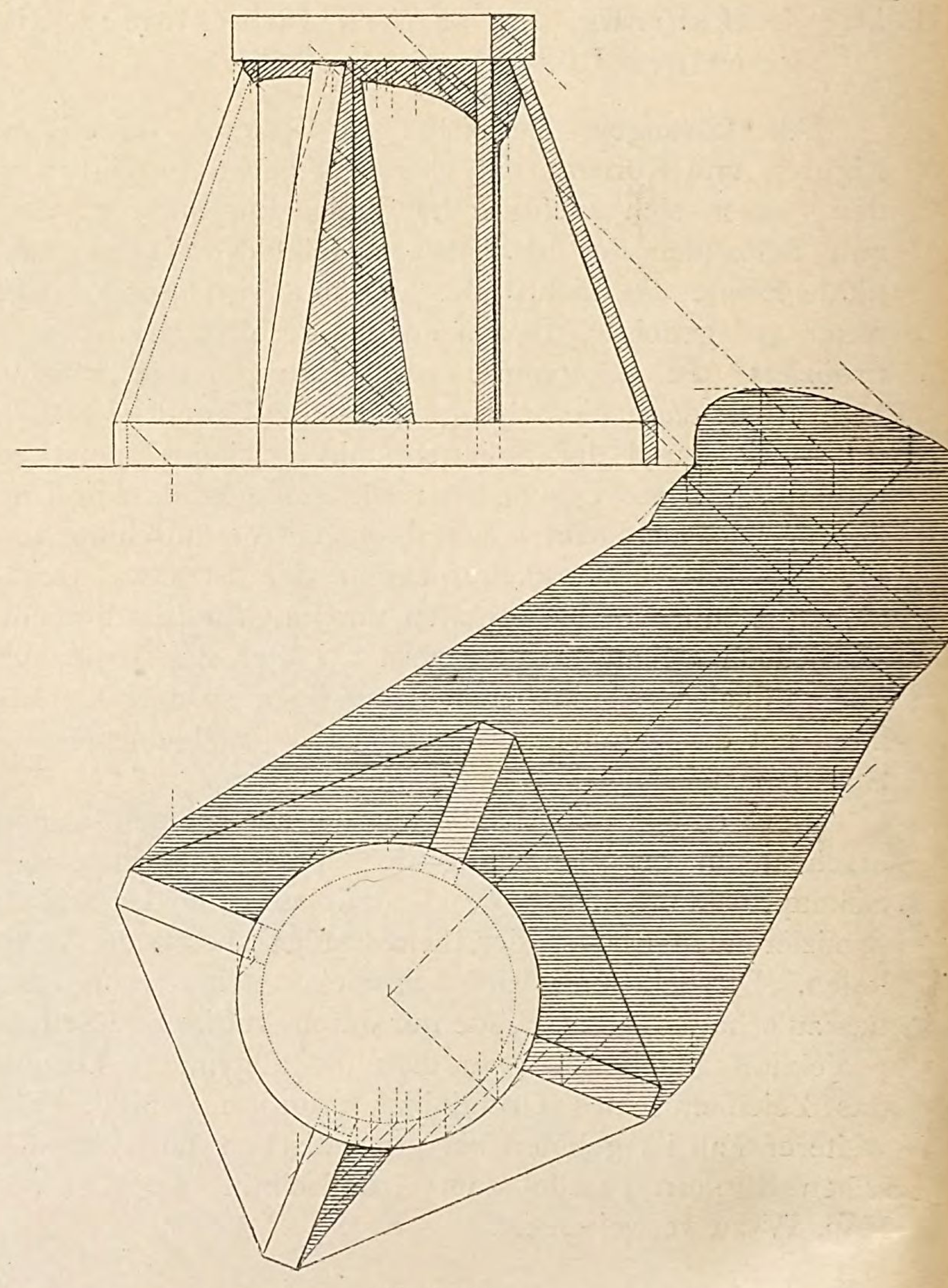
22. Schatten auf vertikalstehenden prismatischen und cylindrischen Flächen.

Die Anwendung der in Art. 18 beschriebenen allgemeinen Lösung für Schatten auf ebenbegrenzten Körpern auf diesen besonderen Fall gestaltet sich sehr einfach, indem für jeden schattenwerfenden äusseren Punkt die Schnittlinie der Vertikalebene des Lichtstrahls mit der be-

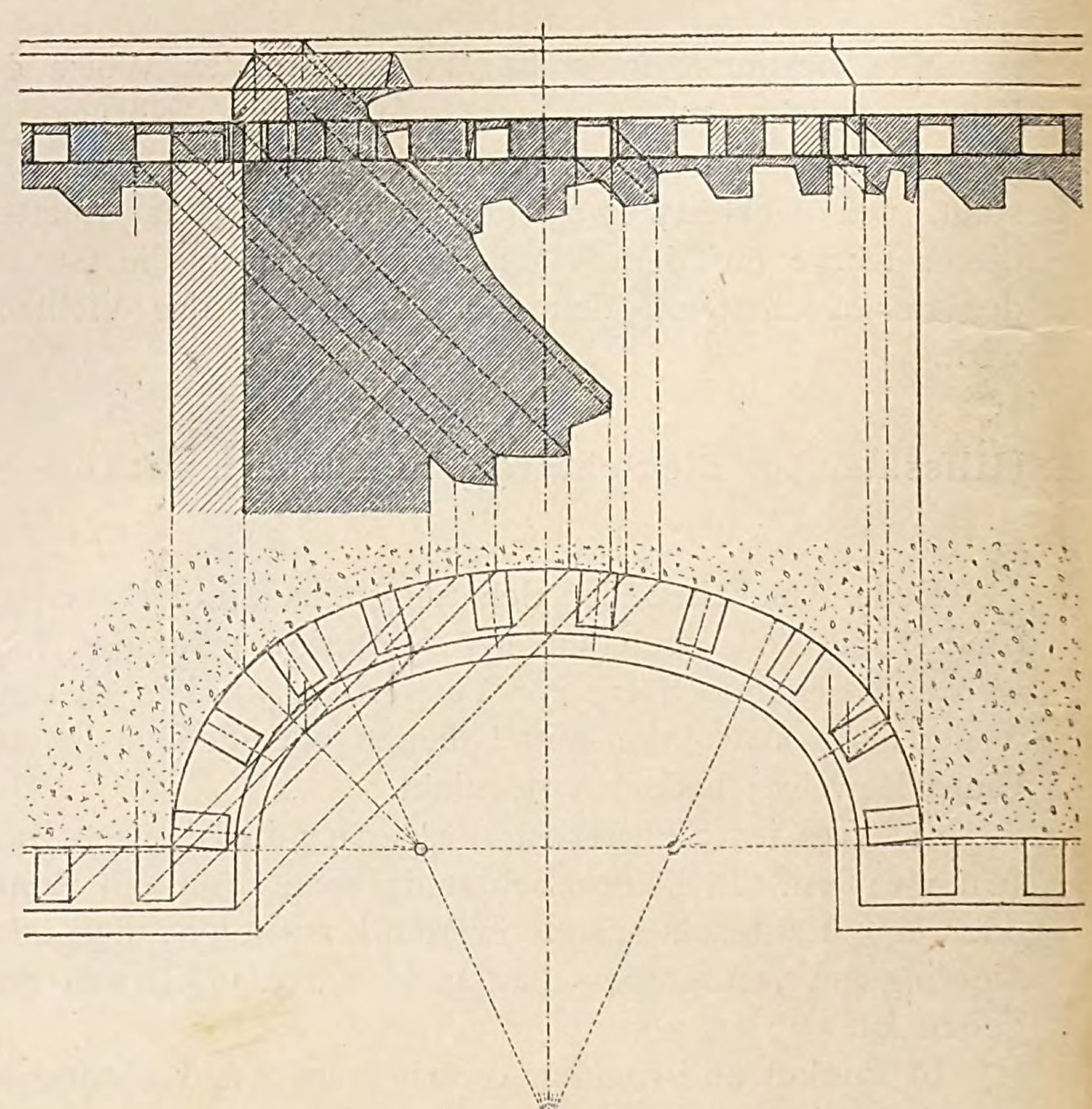


Figur 22a.

schatteten Fläche eine vertikale Gerade wird, die im Grundriss als ein Punkt vorhanden ist, sobald die Lichtstrahlprojektionen gezogen sind. Cylindrische Flächen, obgleich gekrümmt, können hier einbezogen werden, indem der Cylinder als ein Prisma von sehr vielen kleinen Seiten aufgefasst wird und als Schnittlinie mit der Vertikalebene des Lichtstrahls ebenfalls eine vertikale Gerade, nämlich eine Mantellinie des Cylinders, erscheint. Die Körperschattengrenze auf dem Cylinder ist die Mantellinie durch den Berührungspunkt des als Tangente am Cylinder im Grundriss gezogenen Lichtstrahls, wie auch aus dem Früheren folgt, daß die Vertikalkanten in denjenigen Ebenen der Grundrißfigur, welche von Lichtstrahlen gestreift werden, Körperschattengrenzlinien sind.



Figur 22b.

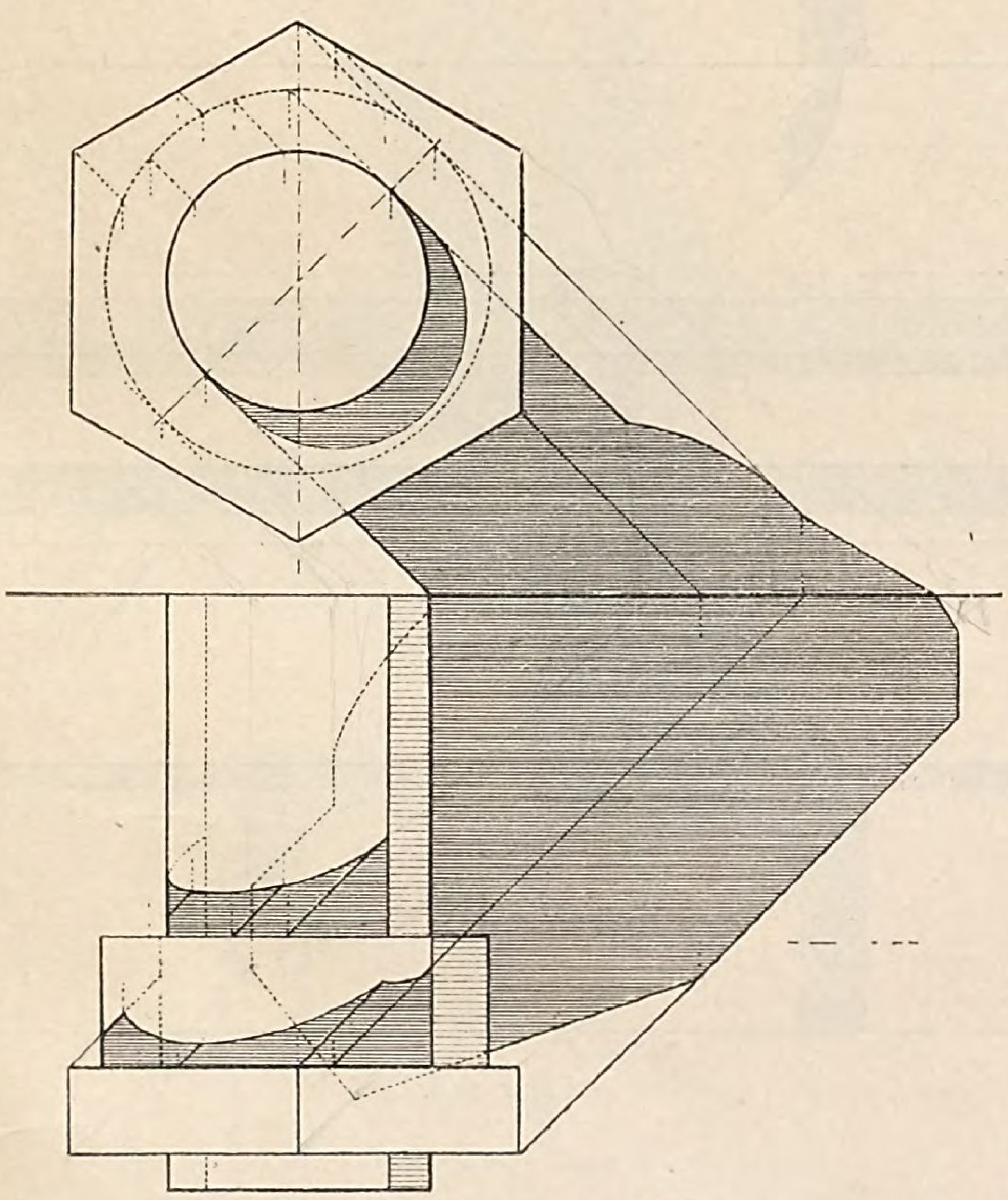


Figur 22c.

Die 3 Beispiele, Figuren 22a, 22b, 22c, erklären sich durch die für einige Schlagschattenpunkte und die Körperschattengrenzen eingezeichneten Lichtstrahlen.

23. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene.

Wenn man die allgemeine Lösung für Schatten auf eben begrenzten Körpern auf diesen besonderen Fall anwendet, so findet sich, dass im Aufriss die Schnittlinien, welche die Vertikalebenen des Lichtstrahls mit den Grenzflächen bilden sollen, mit dem Umriss des beschatteten Körpers zusammenfallen. Man erhält nun zwar trotzdem die Schattenpunkte im Aufriss und kann sie auf den Lichtstrahl im Grundriss hinunterloten; doch wird dieses Verfahren einfacher erklärt als die in Art. 19 beschriebene Umkehrung der allgemeinen Lösung, entstanden durch Vertauschung von Horizontal- und Vertikalprojektion, wo-



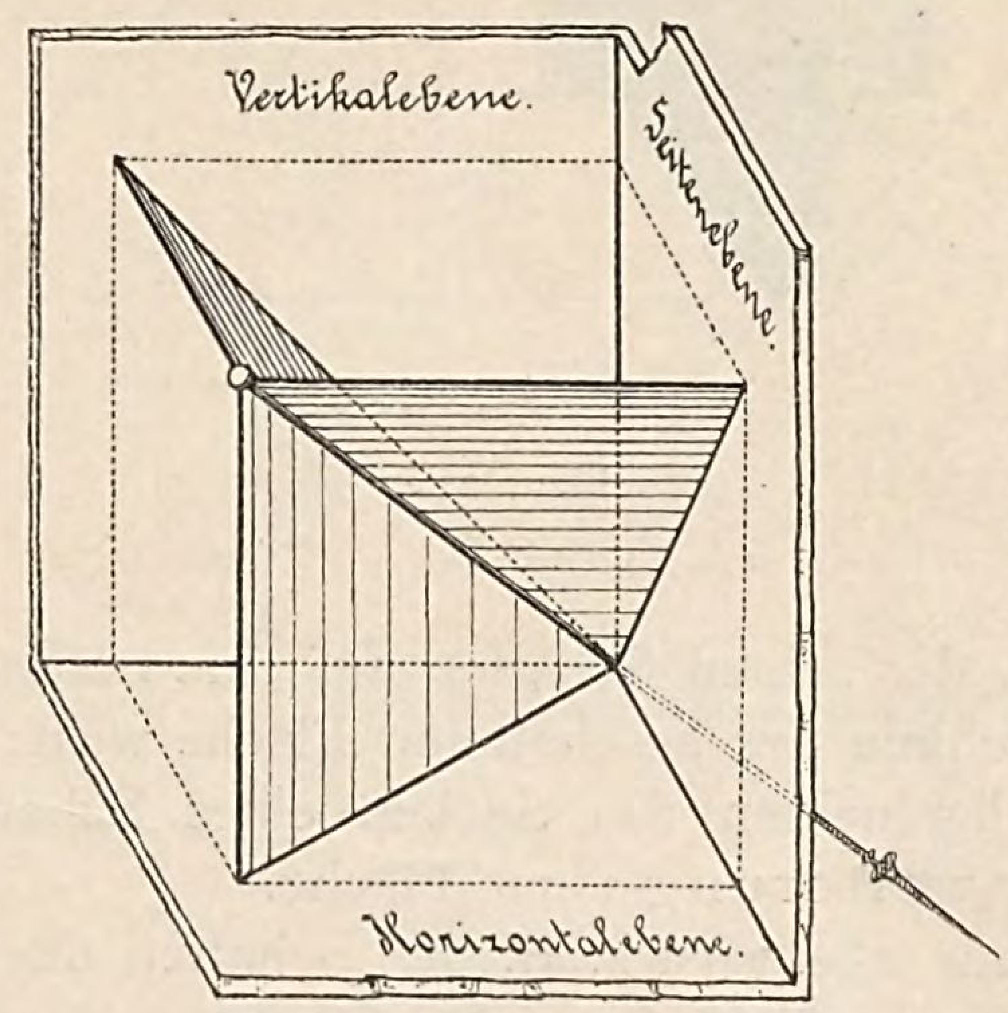
Figur 23.

nach die vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen als Schnittebenen des beschatteten Körpers auftreten. Auch die hiehergehörigen Probleme lösen sich äusserst einfach; Figur 23 erklärt sich durch die Lichtstrahlen, die für einige Schlagschattenpunkte und die körperschattenabgrenzenden Mantellinien der Cylinder gezogen sind.

IV. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen parallel zum Grundschnitt.

24. Grundlagen aus der darstellenden Geometrie.

Als neues Element aus der darstellenden Geometrie erscheint für die hieher gehörigen Lösungen die „Seitenprojektion" der Körper, auch „Seitenriss" und „Kreuzriss" genannt. Ausser den früher besprochenen Projektionen auf eine horizontale und vertikale Grundebene benützt nämlich die darstellende Geometrie zuweilen auch die Projektion auf eine dritte Grundebene, welche senkrecht zum Grundschnitt steht, eben die Seitenprojektion oder Seitenansicht der Körper. Sie zeigt den Körper so, wie er von der Seite, entweder von der linken oder von der rechten Seite, aus unendlicher Entfernung gesehen erscheinen würde; im ersten Fall denkt man sich die Seitenebene rechts vom Körper, im zweiten links. Die Projektionslote sind dabei parallel zum Grundschnitt. In der Seitenprojektion müssen alle Punkte gleich hoch liegen wie im Aufriss, und mit denselben horizontalen Entfernungen voneinander auftreten, die sie im Grundriss in der Richtung senkrecht zum Grundschnitt darbieten. Es geht aus dieser Definition hervor, dass die Projektion des Lichtstrahls auch auf der Seitenebene unter 45° geneigt ist, und zwar ist sie in einer Ansicht des Körpers von der



Figur 24.

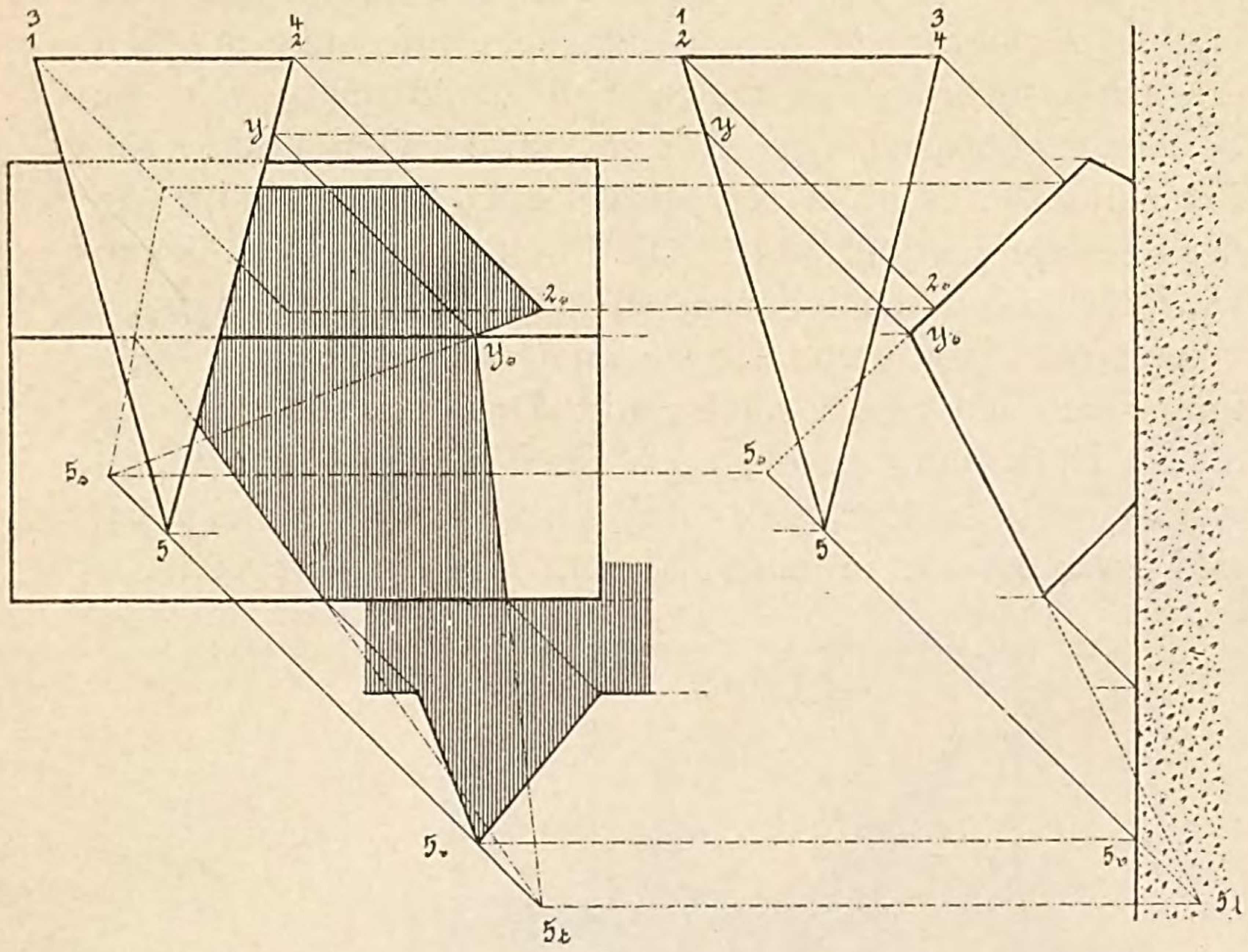
rechten Seite nach rechts unten geneigt. Figur 24 zeigt einen Lichtstrahl mit seinen drei projizierenden Ebenen perspektivisch: dabei ist die Seitenebene rechts angenommen.

Die allgemeine Lösung nicht der kürzeste Weg. Benützung der Seitenprojektion. 25.

Die zuletzt behandelte allgemeine Lösung für Schlagschatten von Polyedern auf Polyedern ist zwar auch möglich für den besonderen Fall, dass der beschattete Körper prismatisch oder cylindrisch und parallel zum Grundschnitt ist. Aber die allgemeine Lösung bildet nicht den kürzesten Weg für diesen besonderen Fall, indem die Schnittlinie der vertikalen Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche eine gebrochene Linie oder Kurve, mit einer andern Schnittebene dagegen weit einfacher wird. Daher folgende bessere Lösung: Man zeichnet die Seitenprojektion der beiden Körper, zieht durch jeden schattenwerfenden Punkt einen Lichtstrahl im Aufriss und in der Seitenprojektion und betrachtet die unter 45° geneigte Ebene, die den Lichtstrahl auf die Seitenebene projiziert. Die Schnittlinie dieser Lichtstrahlenebene mit der beschatteten

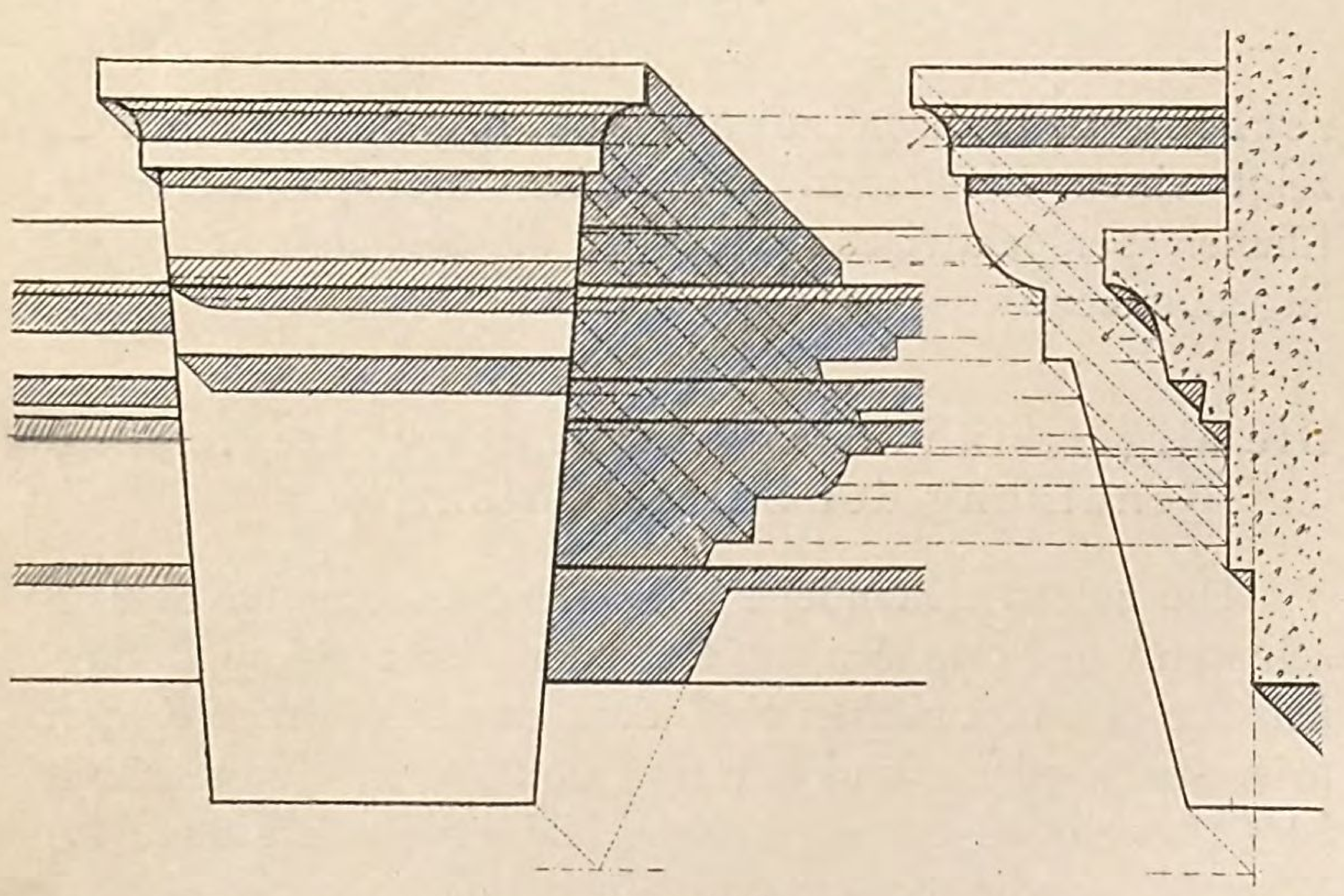
Fläche ist eine horizontale Gerade und in der Seitenprojektion als ein Punkt vorhanden; sie kann durch die Reissschiene in den Aufriss hinüber liniiert werden. Wo sie geschnitten wird vom Aufriss des Lichtstrahls, da ist der Schattenpunkt.

Das Verfahren lässt sich auch derart umkehren, dass derjenige Punkt einer schattenwerfenden Kante gesucht wird, der seinen Schatten auf eine bestimmte Kante oder Mantellinie der beschatteten Fläche wirft; es erspart dies im allgemeinen das Suchen eines Schattenpunktes auf der Erweiterung einer Fläche.



Figur 25 a.

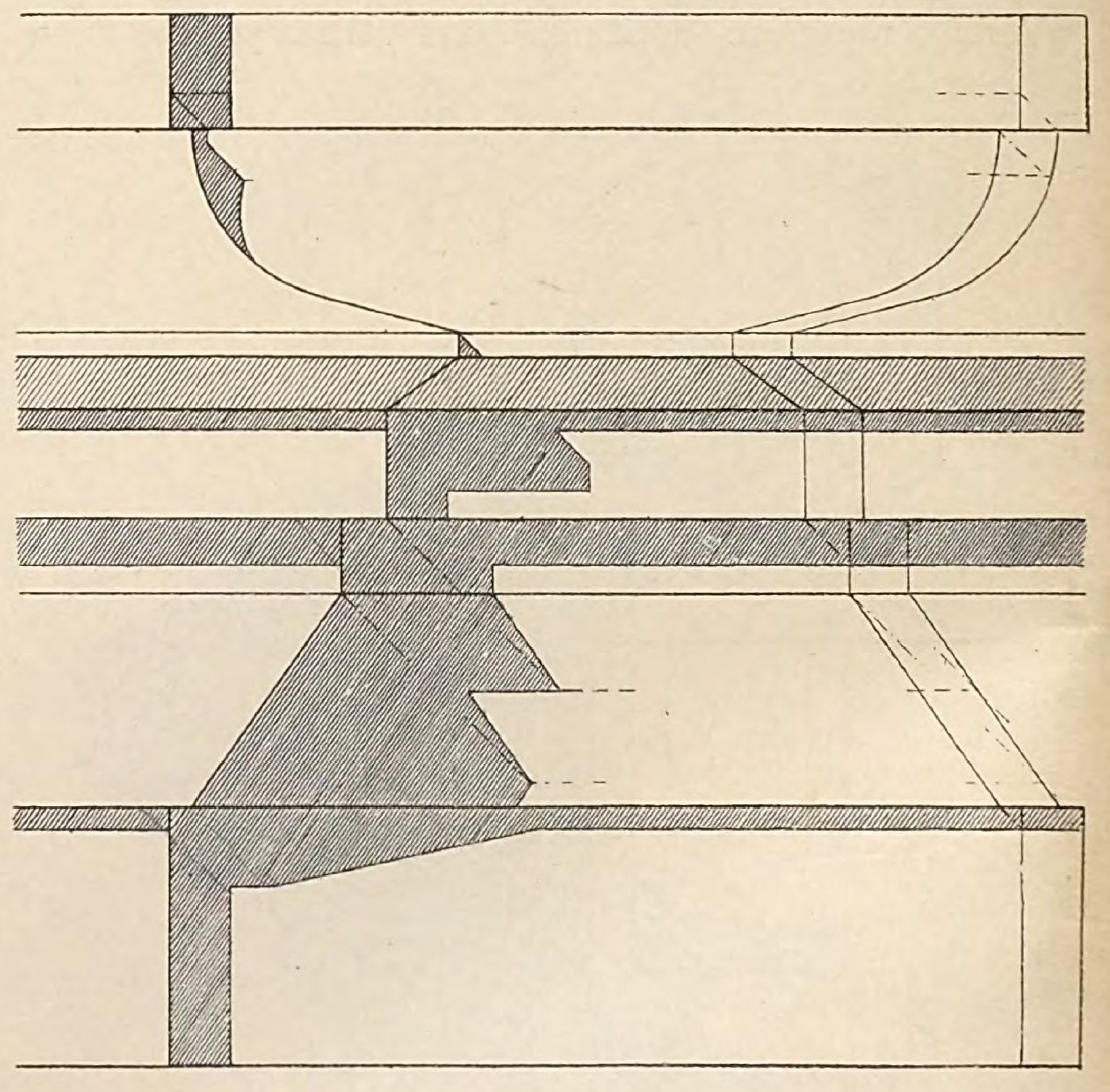
In Figur 25a wird z. B. der Schatten des Punktes 2 erhalten durch Aufsuchen des Punktes in der Seitenprojektion, Ziehen des Lichtstrahls in der Seitenprojektion bis zum Schnitt mit der oberen Prismenfläche in 2^s und horizontales Hinüberliniieren auf den Lichtstrahl im Aufriss nach 2^s. Der Schatten der Pyramidenspitze 5 auf der Erweiterung der oberen Prismenfläche wird erhalten durch Rückwärtsziehen des Lichtstrahls in der Seitenprojektion bis 5^s und Hinüberliniieren dieses Punktes auf den im



Figur 25 b.

Aufriss rückwärts verlängerten Lichtstrahl nach 5^s. Die Pyramidenkante 2—5 wirft also auf die obere Prismenfläche den Schatten 2^s—5^s; von diesem ist jedoch nur das Stück 2^s—y^s wirklicher Schatten.

Anstatt den Punkt 5^s zu bestimmen, hätte man sich auch fragen können: „Welcher Punkt der Pyramidenkante 2—5 wirft seinen Schatten auf die vordere Kante des Prismas?“ Der gesuchte Schattenpunkt ist in der Seitenprojektion der Kante, also im Punkt y^s schon vorhanden; der durch diesen Punkt rückwärts gezogene Lichtstrahl liefert in der Seitenprojektion als Schnitt mit der Kante 2—5 den schattenwerfenden Punkt y; dieser giebt in den Aufriss auf Kante 2—5 hinüberliniiert den schattenwerfenden Punkt y im Aufriss und der Lichtstrahl durch diesen Punkt auf der Prismenkante den Schattenpunkt y^s im Aufriss. So hätte das Schattenstück 2^s—y^s auch ohne die Bestimmung



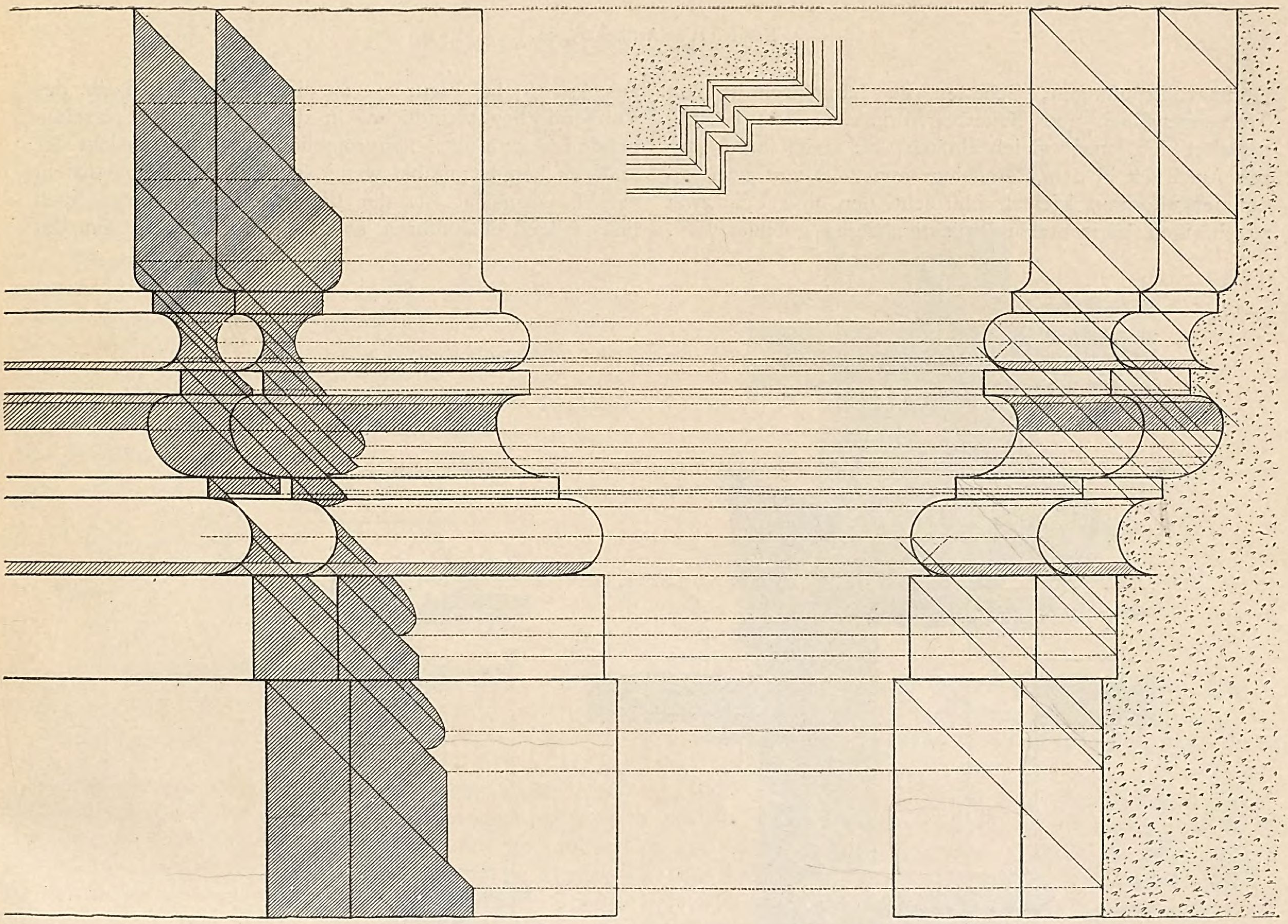
Figur 25 c.

von 5^s gefunden werden können, wenn auch weniger sicher. Die Verbindung beider Wege liefert eine Probe.

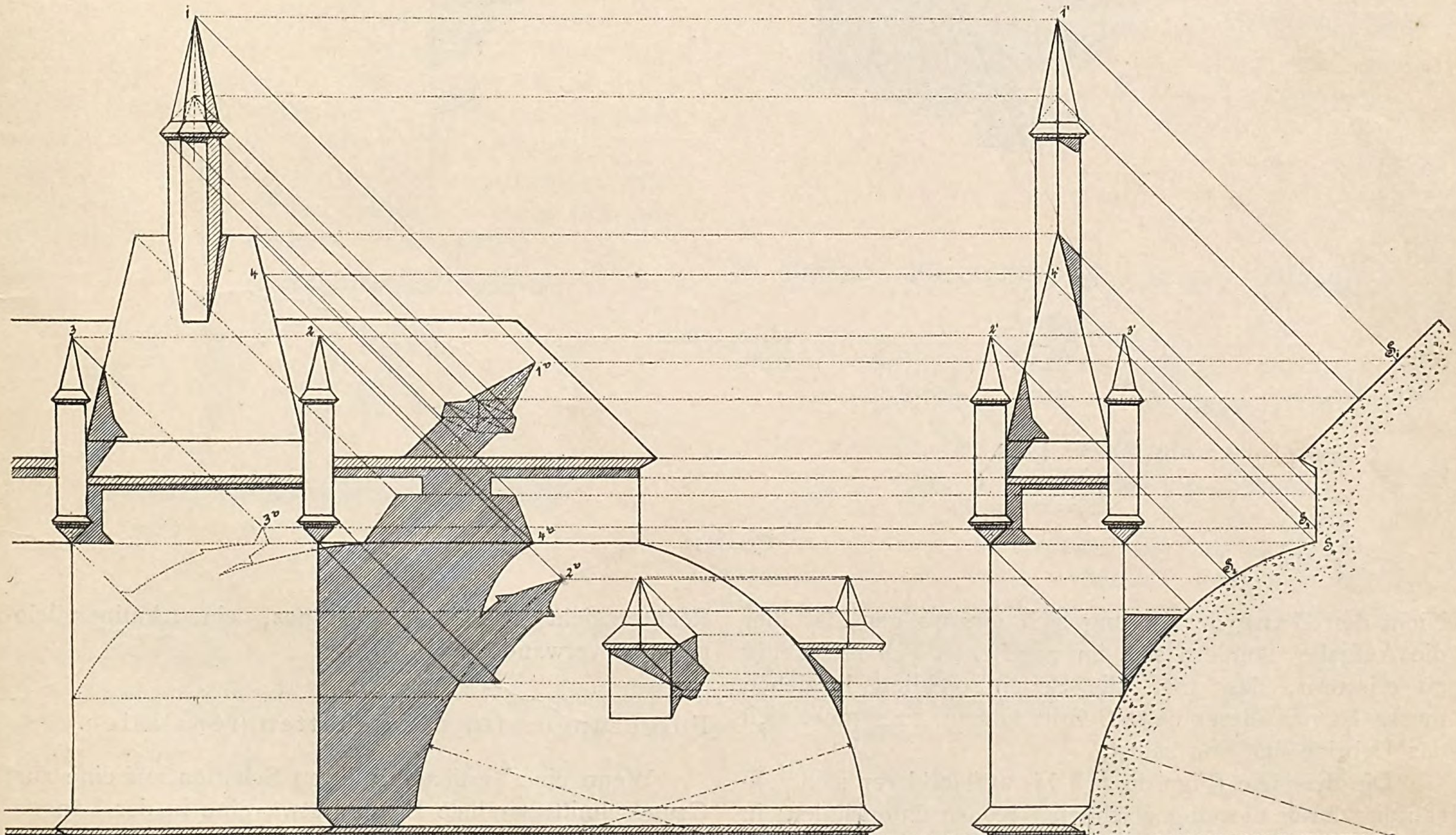
Wie in der Figur die Bestimmung des Schattens der Pyramidenspitze 5 auf der erweiterten unteren Prismenfläche in 5^t die Fortsetzung des Schattens der Kante 2—5 auf der unteren Prismenfläche geliefert hat, bedarf keiner Erklärung.×

Obgleich eine Lösung für einen besonderen Fall der Gestalt und Lage der beschatteten Fläche, kann das beschriebene Verfahren doch ausserordentlich häufig beim Schattieren technischer Gebilde verwertet werden; denn überwiegend häufig erscheinen in diesen horizontale prismatische und cylindrische Flächen in der Längenansicht, das heisst parallel zum Grundschnitt. Es gehören hieher die Schatten von Türmen, Giebeln, Fialen, Kaminen auf ebenen, gebrochenen und cylindrischen Dachflächen, ferner Schatten von Gesimsen und

× Aus dem Früheren folgt, daß diejenigen Horizontalkanten des Gesimses, welche in der Seitenprojektion von Lichtstrahlen gestreift werden, Körperschattengrenzlinien sind, ebenso die Mantellinien von Cylinderflächen in den Berührungspunkten tangierender Lichtstrahlen.

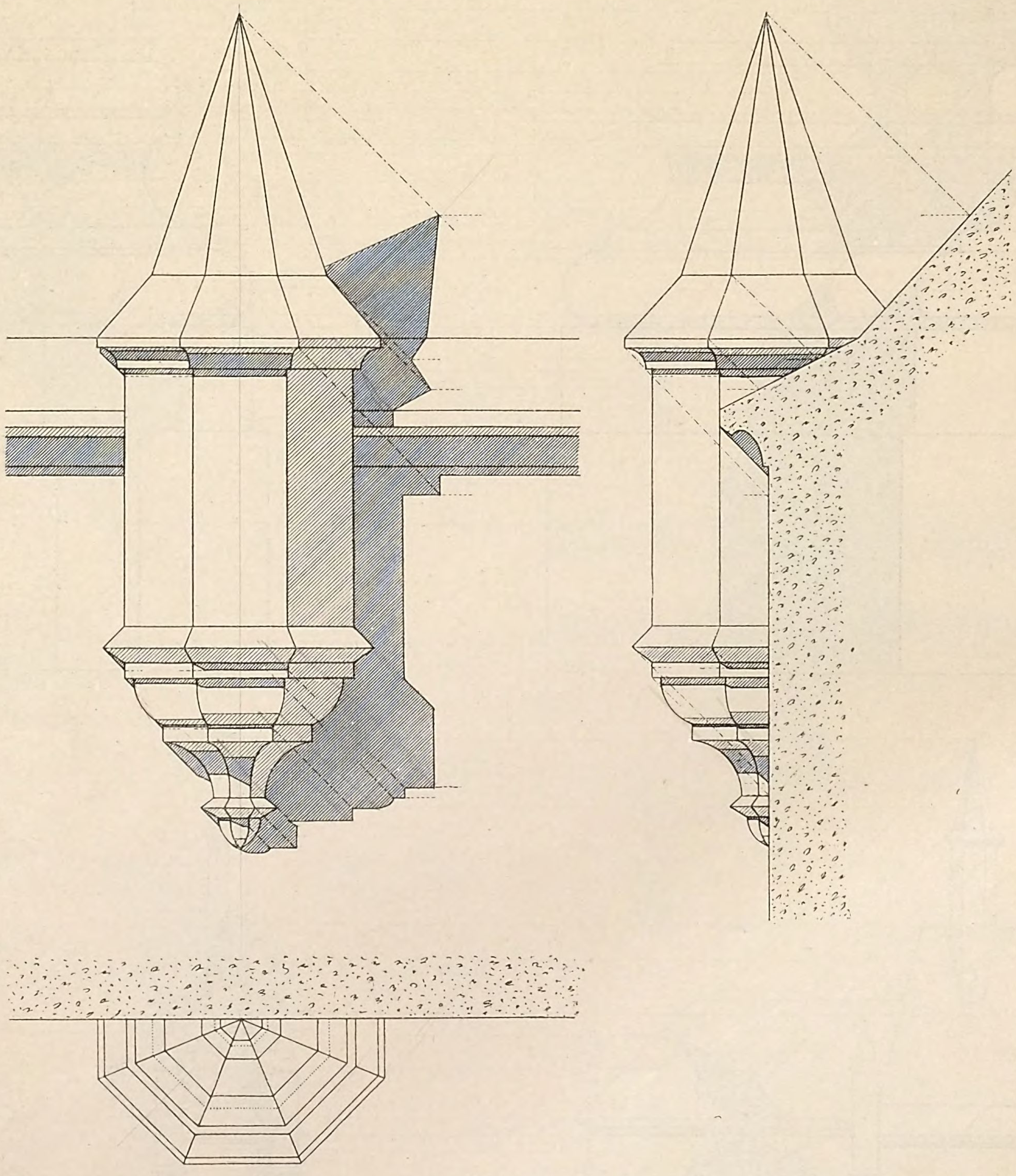


Figur 25 d.



Figur 25 e.

Gesimsverkröpfungen, Schatten im Längenschnitt von Tonnengewölben und Mauerbögen u. s. f. Die Lösung gestaltet sich immer gleich einfach; sie findet ihren ganzen Ausdruck in dem Parallelogramm, das von zwei zusammengehörigen Lichtstrahlprojektionen und den zwei zugehörigen horizontalen Projektionslinien gebildet wird. aus Art. 18; bei Figur 24e ist die auf der Nebenseite des Tonnendaches befindliche, in der Seitenansicht erscheinende Lukarne als Seitenprojektion zur Vorderansicht der anderen benützt; dabei war jedoch, da die Seitenansicht eine Linksansicht ist, der Lichtstrahl von rechts nach links fallend einzuführen, so dass das Parallelogramm der Rechtsansicht sich in ein Trapez, ein „Antiparallelogramm" verwandelte.



Figur 25 f.

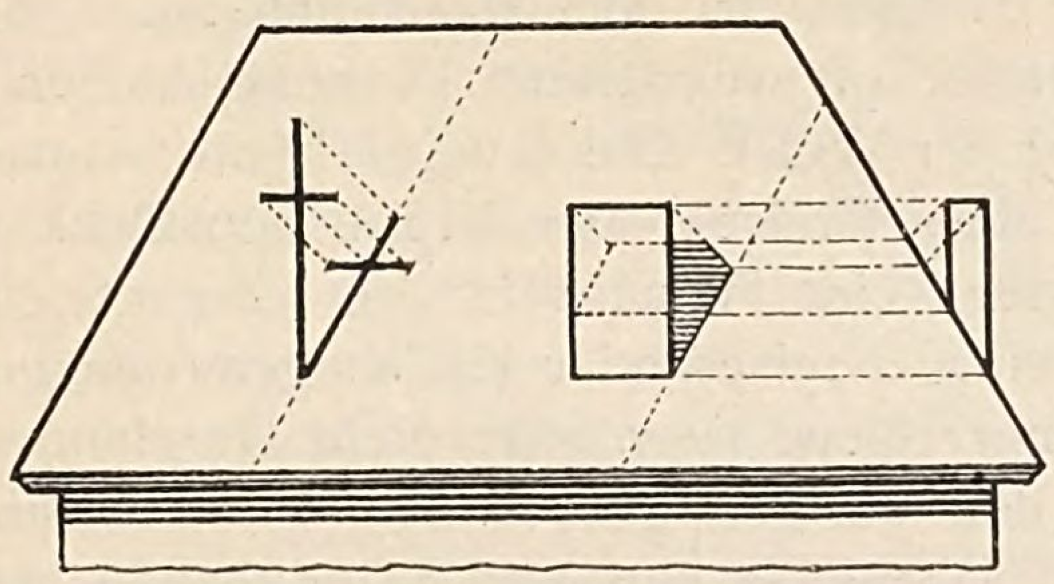
Nicht den Gang der Lösung sich einzuprägen, ist hier die Aufgabe, sondern sich im gegebenen Fall rechtzeitig zu erinnern, dass man die Seitenprojektion beiziehen muss. Ist nur dieser erste Schritt gethan, so ergiebt sich das Uebrige fast von selbst.

Die Beispiele (Figuren 25b bis 25f) erklären sich vollständig durch die eingezeichneten Konstruktionslinien; in Figur 24f war die Lösung zu verbinden mit derjenigen

Folgerungen für die Schattengrenzlinien. 26.

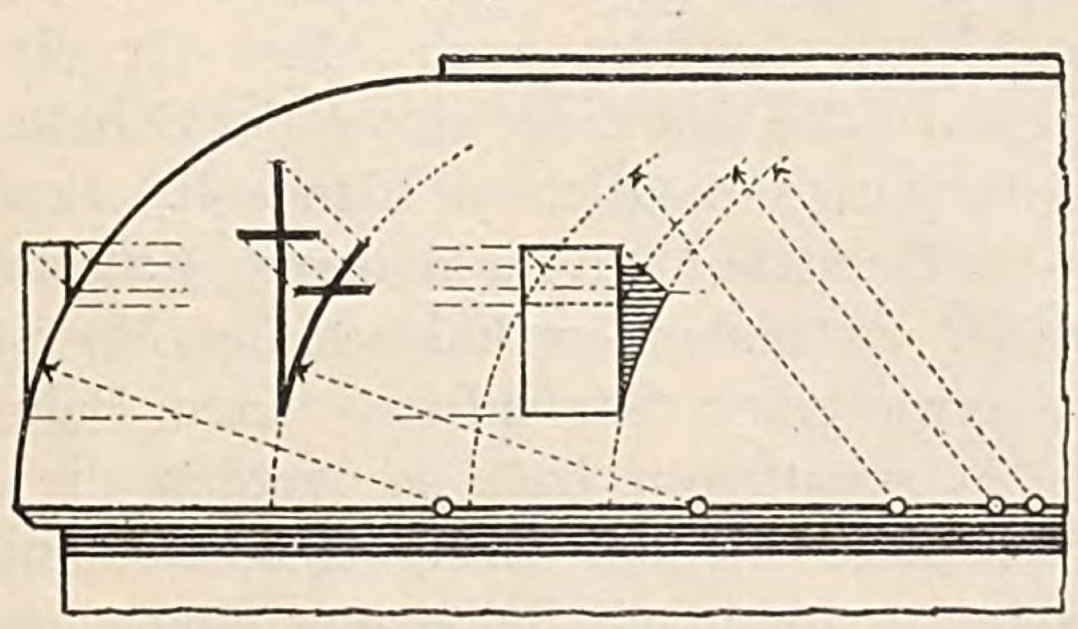
Wenn eine Vertikallinie ihren Schatten auf eine zum Grundschnitt parallele Ebene, etwa eine in der Längenansicht gezeichnete Dachfläche wirft (Figur 26a), so er-

giebt folgende Betrachtung, dass der Schatten dieser Vertikallinie eine gerade Linie wird mit derselben Neigung wie die der Ebene. Denkt man sich den Grundriss, so erscheint in diesem der Schlagschatten als Linie mit einem Winkel von 45 ^{0} gegen die Vertikalebene wie gegen die Seitenebene, also symmetrisch zu diesen beiden Grundebenen. Die Projektion der im Raum schräg ansteigenden Schattenlinie muss also auf der Vertikalebene dieselbe Neigung darbieten wie auf der Seitenebene. Auf dieser fällt aber die Projektion der Schattenlinie zusammen mit derjenigen der Dachfläche, also muss auch die Vertikalprojektion der Schattenlinie dieselbe Neigung zeigen wie die Dachfläche in der Seitenprojektion, oder, was dasselbe ist, wie die Dachfläche im Raum.



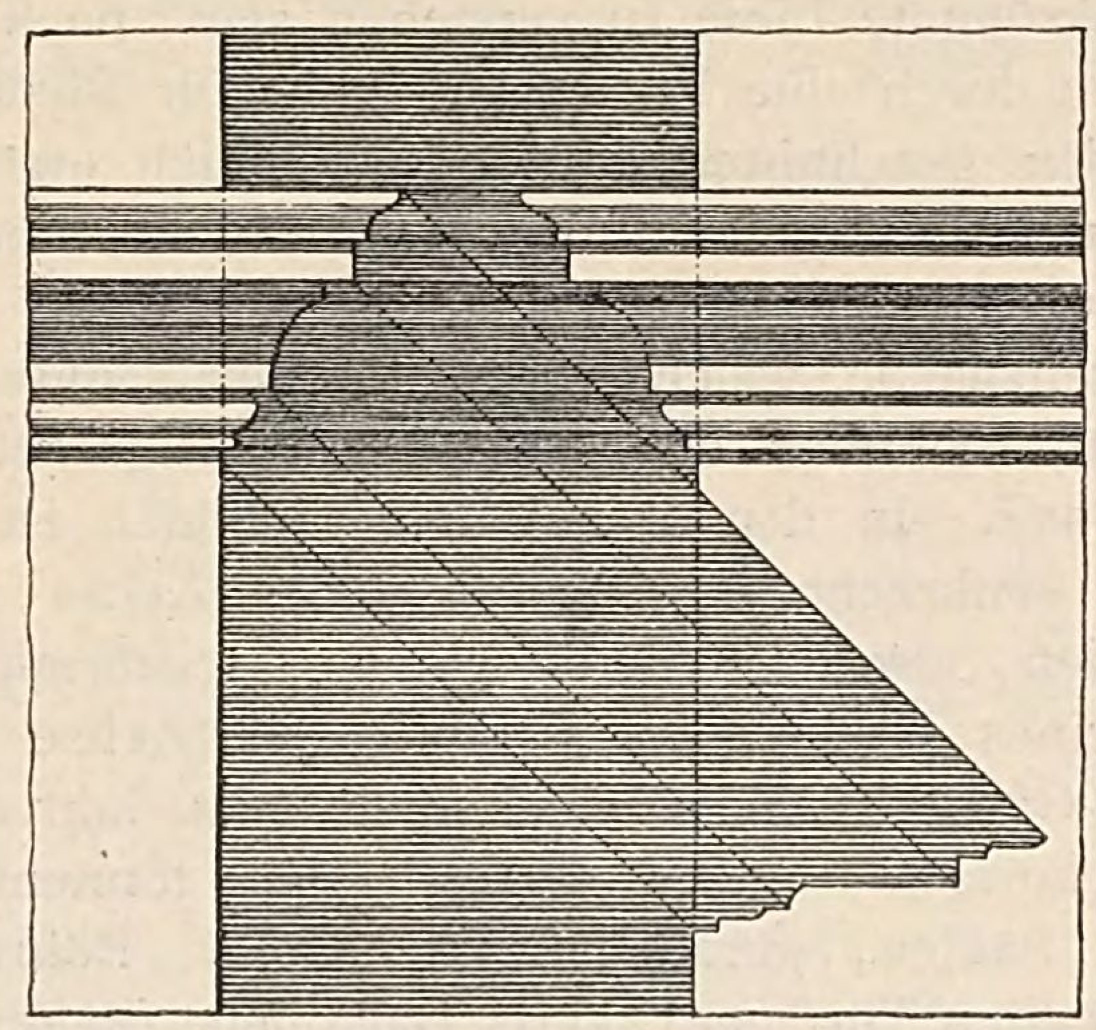
Figur 26 a.

Dieselbe Bemerkung gilt für eine gebrochene oder Mansardendachfläche; auf jeder Teilebene einer solchen erscheint der Schatten der vertikalen Geraden im Aufriss mit der Neigung, welche die Teilebene selbst hat. Ebenso ist der Schatten einer solchen Geraden auf einem cylindrischen Dach, das parallel zum Grundschnitt liegt, im Aufriss dieselbe gekrümmte Linie wie der Querdurchschnitt des Daches, also bei einem kreiscylindrischen Dach ein Kreisbogen vom gleichen Radius (Figur 26 b). Horizontale Linien parallel zur Dachfirstlinie werfen immer einen horizontalen Schatten auf ein in der Längenansicht gezeichnetes Dach, sei es eben oder cylindrisch. Ein vertikalstehendes Kreuz wirft also den Schatten nach Figur 26 a oder 26 b. Diese Folgerungen sind hier hervorzuheben, weil viel dagegen gefehlt wird.



Figur 26 b.

Aus der Symmetrie des Lichtstrahls gegen Vertikalebene und Seitenebene ergiebt sich ferner, dass der Schatten einer vertikalen Kante auf einem in der Längenansicht gezeichneten Gesims dieselbe Linie bildet wie das Profil des Gesimses, nur nach links umgelegt und unterbrochen durch die fortlaufenden Streifen von Körper- und Schlagschatten des Gesimses. Bei der Gesimsverkröpfung, Fig. 26 c, wirft die obere Wandkante einen solchen Schatten, wogegen die Gesimsecke ihren Schatten tiefer wirft und nach Art. 13 zu behandeln war. Auch gegen diese Folgerung wird oft gefehlt. Wenn der Vorsprung der einen Mauer über die andere nur klein ist,



Figur 26 c.

so greifen übrigens beide Schattenprofile übereinander; die Lösung wird dann komplizierter und verlangt die Benützung der Seitenprojektion, wofür die Figuren 25 c und 25 d Beispiele darbieten.

Die Benützung der Seitenprojektion anstatt des Grundplans ist — wie schon oben ausgesprochen — auch für andere Körper als Prismen und Cylinder parallel zum Grundschnitt möglich, und zwar können hiebei als Schnittebenen des beschatteten Körpers sowohl die seitlich projizierenden als die vertikal projizierenden Ebenen der Lichtstrahlen benützt werden. Doch liegt ein Grund zu dieser Abänderung der allgemeinen Lösung für Schatten auf eben begrenzten Körpern nur etwa dann vor, wenn das Gebilde nur durch die genannten zwei Projektionen, nicht auch durch einen Grundriss gegeben ist.

V. Schatten auf gekrümmten Flächen. Allgemeine Lösung.

Definitionen aus der darstellenden Geometrie 27.
und Beispiele technischer Verwertung.

Mit den nun bekannten Konstruktionen lassen sich die Schattengrenzen bestimmen für alle diejenigen Fälle, in welchen ein Körper mit ebenen Flächen einen Schatten wirft auf die Grundebenen, oder auf einen andern Körper mit ebenen Flächen, oder auf sich selber. Nicht minder häufig als diese Schatten erscheinen in den Darstellungen technischer Gebilde solche auf gekrümmten Flächen, insbesondere auf Cylinderflächen, Kegelflächen und Drehungsflächen. Der früheren Ankündigung entsprechend sind die Definitionen für diese Flächen als Repetition der Grundlagen aus der darstellenden Geometrie kurz einzuschalten.

Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade längs einer gekrümmten Linie, die nicht in derselben

Ebene liegt, parallel fortschreitet; jede Lage der Geraden bildet eine Mantellinie oder Erzeugende des Cylinders; die gekrümmte Linie heisst die Leitlinie; in der Folge wird aber unter Leitlinie eines Cylinders nur diejenige gekrümmte Linie zu verstehen sein, nach welcher die Fläche durch eine Ebene senkrecht zur Richtung der Mantellinien geschnitten wird. Gewöhnlich erscheint in den technischen Gebilden der gerade Kreiscylinder, das heisst der Cylinder, dessen Leitlinie ein Kreis ist. Die ebene Grenzfläche, welche einen Cylinder senkrecht oder schief zur Richtung der Mantellinien begrenzt, heisst dessen Basis. In den technischen Gebilden ist sie gewöhnlich senkrecht zur Richtung der Achse und der Mantellinien, also beim Kreiscylinder kreisförmig. Jeder Schnitt eines Kreiscylinders schief zur Achse ist eine Ellipse. Cylinderflächen erscheinen teils konvex, teils konkav, horizontal oder vertikal, bei tonnenförmigen Dächern, Säulen, geraden Rundstangen, Röhren, Gesimsen, runden Türmen, Erkern, Balkonen, Aussenmauern und Innenräumen mit kreisförmigem Grundriss, Brückenpfeilern, Mauerbögen, Tonnengewölben u. s. f.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine gerade Linie derart fortschreitet, dass sie einerseits immer durch denselben Punkt geht, andererseits an einer gekrümmten Linie gleitet, die mit dem Punkte nicht in derselben Ebene liegt. Der Punkt heisst die Spitze des Kegels; jede Lage der Geraden heisst eine Mantellinie. Eine ebene Grenzfläche, welche den Kegel abschliesst, heisst seine Basis. Gewöhnlich erscheint in den technischen Gebilden der gerade Kreiskegel, das heisst der Kegel, dessen Basis kreisförmig ist und dessen Spitze sich auf dem Lot im Mittelpunkt der Basis befindet. Das Lot heisst die Achse des Kegels. Der Schnitt eines Kreiskegels schief zur Achse liefert als Schnittlinie entweder eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel. Kegelflächen erscheinen in den technischen Gebilden teils konvex, teils konkav, mit vertikaler oder horizontaler Achse, bei runden Turmdächern, Umrahmungen von mittelalterlichen Fenstern und Thüren, bestimmten Gewölbformen, z. B. den sogenannten Stichkappen, Decken über kreisförmigen Räumen, Gesimsen auf cylindrischen Wandflächen, Gussteilen für Eisenkonstruktionen, bei zahlreichen kunstgewerblichen Gegenständen, bei runden Böschungen der Bahn- und Strassendämme oder Ufermauern und endlich bei vielen Formen im Maschinenbau.

Eine Drehungsfläche entsteht, wenn irgend eine gekrümmte oder gebrochene Linie um eine Gerade gedreht wird. Die Gerade heisst die Achse der Drehungsfläche. Jeder Punkt der gedrehten Linie beschreibt einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Drehungsachse steht und der ein Parallelkreis genannt wird. Legt man durch die Achse eine Anzahl Ebenen, so schneiden diese die Drehungsfläche nach gekrümmten oder gebrochenen Linien, die alle kongruent sind; jede solche Linie heisst ein Meridian der Drehungsfläche. Der Schnitt durch eine Ebene parallel oder schief zur Achse liefert im allgemeinen eine Kurve höherer Ordnung. — Drehungsflächen erscheinen in den technischen Gebilden teils konvex, teils konkav, teils mit konvexen Parallelkreisen bei konkavem Meridian, teils mit konkaven Parallelkreisen bei konvexem Meridian. Die Achse steht entweder vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt; schiefgerichtete Drehungsflächen liefern sehr zeitraubende Probleme, sind aber selten. Beispiele von Drehungsflächen bilden Säulenfüsse und Kapitäle, überhaupt Gesimse auf cylindrischen Wandflächen, Kuppeldächer und Kuppelräume, bogenförmige Umrahmungen von Fenstern und Thüren, bogenförmige Nischen, Masswerke der gotischen Hochfenster und Rosenfenster, Baluster und Kandelaber, verzierte Dachspitzen, gedrehte Knäufe und Rosetten, bogenförmige Röhren, Füsse und andere Stützenformen an Mobilien, überhaupt alle Arbeiten des Drehers, Vasen und Gefässe aller Art und zahlreiche Formen aus dem Maschinenbau.

Wichtige, oft verwertete Drehungsflächen sind die Kugel und der Wulst. Die Kugelfläche entsteht durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogenstücks um einen Durchmesser; eine Wulstfläche erzeugt sich durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogens um eine Achse, die in seiner Ebene liegt, aber nicht Durchmesser ist.

Von den übrigen gekrümmten Flächen sind es nur etwa noch Wendelflächen und Schraubenflächen, die in der Technik Verwertung finden, nicht nur bei Schraubengewinden flachgängig oder scharfgängig, sondern auch bei Wendeltreppen und überhaupt Treppen mit gekrümmtem Lauf; doch sind solche Gebilde selten ausführlich zu schattieren, abgesehen etwa von grossen Schrauben in Maschinenzeichnungen. Konoidische Flächen erscheinen bei bogenförmiger Durchbrechung von kreisförmigen Mauern; Röhrenflächen und Rückungsflächen sind verwirklicht in Gesimsformen, Gewölbformen, kunstgewerblichen und maschinentechnischen Gebilden u. s. f. Die Definitionen dieser seltener verwerteten Flächen folgen später. Andere gesetzmässig gekrümmte Flächen als die genannten dürften an den technischen Gebilden nur sehr selten zu finden sein.

Der Zweck des Studiums der Schattenkonstruktionen ist nicht nur der, dass man die zur vollkommenen Darstellung nötigen Schatten auf solchen Flächen konstruieren lernt, sondern auch, dass für die häufiger vorkommenden Fälle das Einzeichnen der Schattengrenzen aus freiem Auge möglich werden soll. Letzteres gilt besonders für Darstellungen im kleineren Massstab. Wenn man an einer zu malenden Fassade im Massstab 1 : 50 oder 1 : 20 etwa einen Säulenfuss, einen Baluster oder eine Vase zu schattieren hat, so werden die Schattengrenzen für diese kleinen Drehungsflächen nicht konstruiert, sondern nur nach Schätzung eingetragen. Wer einige Uebung hat, der kann solche Schatten aus freiem Auge mit solcher Sicherheit einzeichnen, dass die graphische Konstruktion nur geringe Fehler nachweisen würde und die Schattierung für den Zweck der guten Anschaulichkeit, dem sie ja allein dienen soll, vollkommen genügt. Dazu gehört nur, dass man für wenige solcher Flächen die Schatten einmal wirklich konstruiert und das Resultat aufmerksam entstehen sehen hat. Diese Ausbildung des Gefühls für richtige Schattierung ist ein ebenso grosser Gewinn aus dem Studium der Schatten-

konstruktion, als das Wissen von den Verfahren, mit deren Hilfe man die Schattengrenzen finden kann. Dies zur Ermutigung, wenn sich in der Folge zeigen sollte, dass das Konstruieren der Schattengrenzen auf vielen gekrümmten Flächen unverhältnismässig viel Arbeit erfordert. //

28. Allgemeine Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen.

Die Schatten auf gekrümmten Flächen sind wieder entweder Körperschatten oder Schlagschatten, geworfen von aussenstehenden Gebilden oder von Teilen des beschatteten Körpers selber.

Denkt man sich den Körper mit gekrümmter Oberfläche zunächst konvex, so wird eine Seite der Oberfläche von den Lichtstrahlen getroffen, die andere nicht. Zwischen beiden Flächenteilen muss eine Grenze bestehen, eben die Körperschattengrenze. Sie erscheint — wie schon früher ausgesprochen — bei runden Körpern dem Auge sehr verschwommen, indem der Uebergang von Licht zu Schatten durch zahllose feine Zwischenstufen vor sich geht, ist aber mathemathisch betrachtet doch eine scharfe Linie. /Sie bildet sich, wie leicht einzusehen — da, wo die Lichtstrahlen berührend am Körper vorbeistreifen; die Berührungspunkte sind eben die Punkte der Körperschattengrenze. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion dieser letzten:

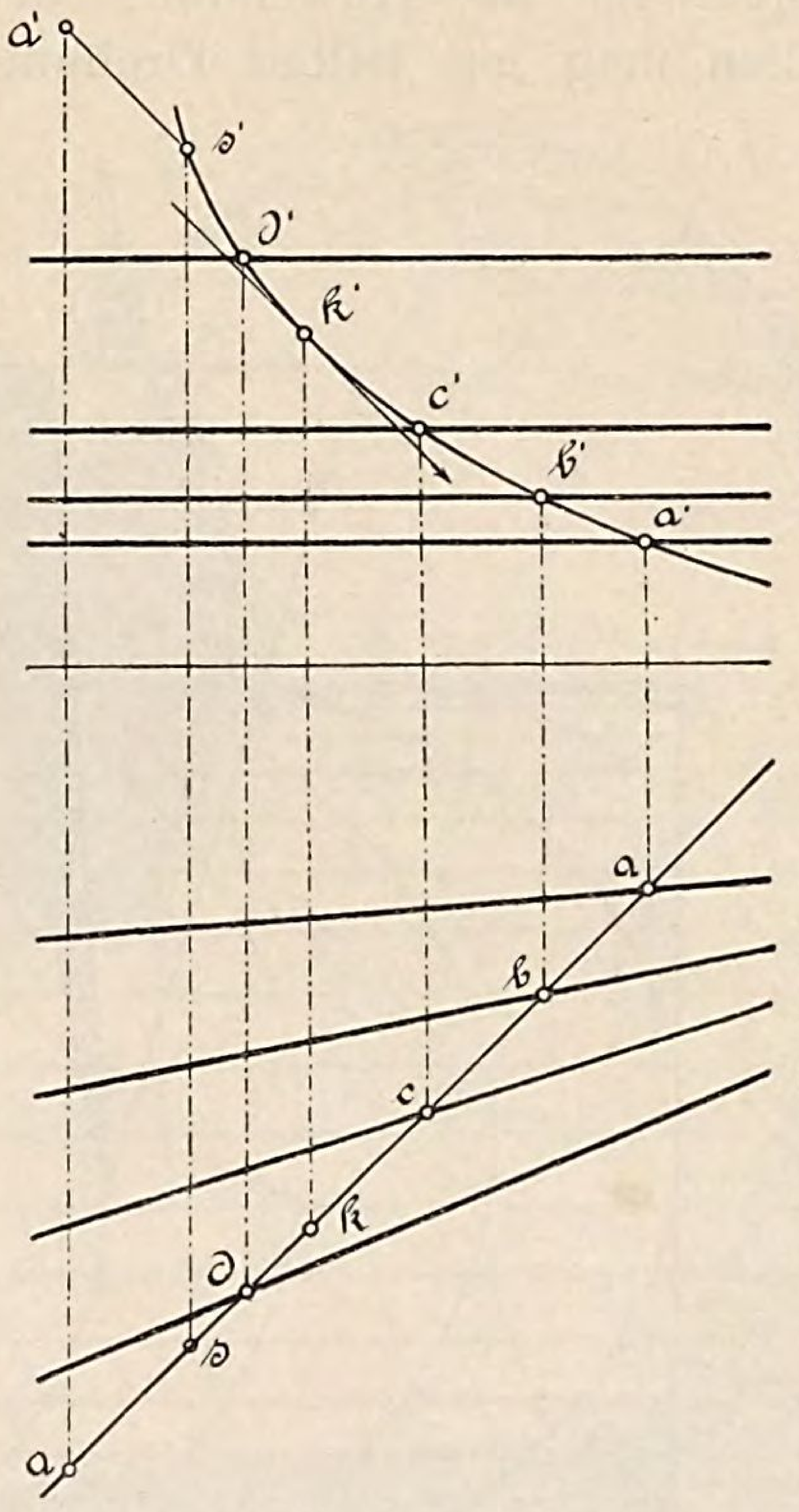
Man schneidet den Körper durch eine Anzahl von Vertikalebenen, die zur Lichtrichtung parallel stehen, also Lichtstrahlen enthalten und im Grundriss mit deren geradlinigen Projektionen zusammenfallen. Man sucht die gekrümmten Schnittlinien dieser Ebenen mit dem Körper in der Vertikalprojektion auf. Man zieht im Aufriss tangierende Lichtstrahlen an diese Schnittlinien, bestimmt die Berührungspunkte und verbindet sie durch eine stetige Kurve. Diese ist die Körperschattengrenze.

Ist der Schlagschatten eines äusseren Punktes auf einer gekrümmten Fläche zu suchen, so zieht man einen Lichtstrahl durch den Punkt, betrachtet die vertikale Ebene dieses Lichtstrahls und sucht die gekrümmte Schnittlinie dieser Ebene mit dem Körper im Aufriss auf. Wo der Aufriss des Lichtstrahls diese Kurve schneidet, da ist der Schlagschatten des Punktes. Diese Lösung ist nichts anderes als die Uebertragung der früher für Polyeder vorgeführten Konstruktion auf die runden Körper.

Das Aufsuchen der gekrümmten Schnittlinien im Aufriss gestaltet sich verschieden je nach der Art der beschatteten Fläche und ist nur durch Wahl bestimmter Arten von Flächen zu erklären.

29. Anwendung auf Regelflächen.

Ist die beschattete Fläche eine Regelfläche (das heisst durch irgend eine Bewegung einer geraden Linie erzeugt), so hat man nur die erzeugende Gerade in einer genügenden Zahl ihrer Lagen zu zeichnen und die Schnittpunkte jeder Schnittebene mit jeder Geraden aus dem Grundriss in den Aufriss hinaufzuloten. Sind in Fig. 29a in den Geraden *1 2 3 4* vier Lagen der erzeugenden Geraden gezeichnet, so hat der im Grundriss gezeichnete Lichtstrahl die vier Schnittpunkte *a b c d*; deren Hinaufloten in den Aufriss nach *a' b' c' d'* ergiebt die Schnittkurve der Fläche mit der Lichtstrahlenebene; der Berührungspunkt *k'* des als Tangente im Aufriss gezogenen



Figur 29a.

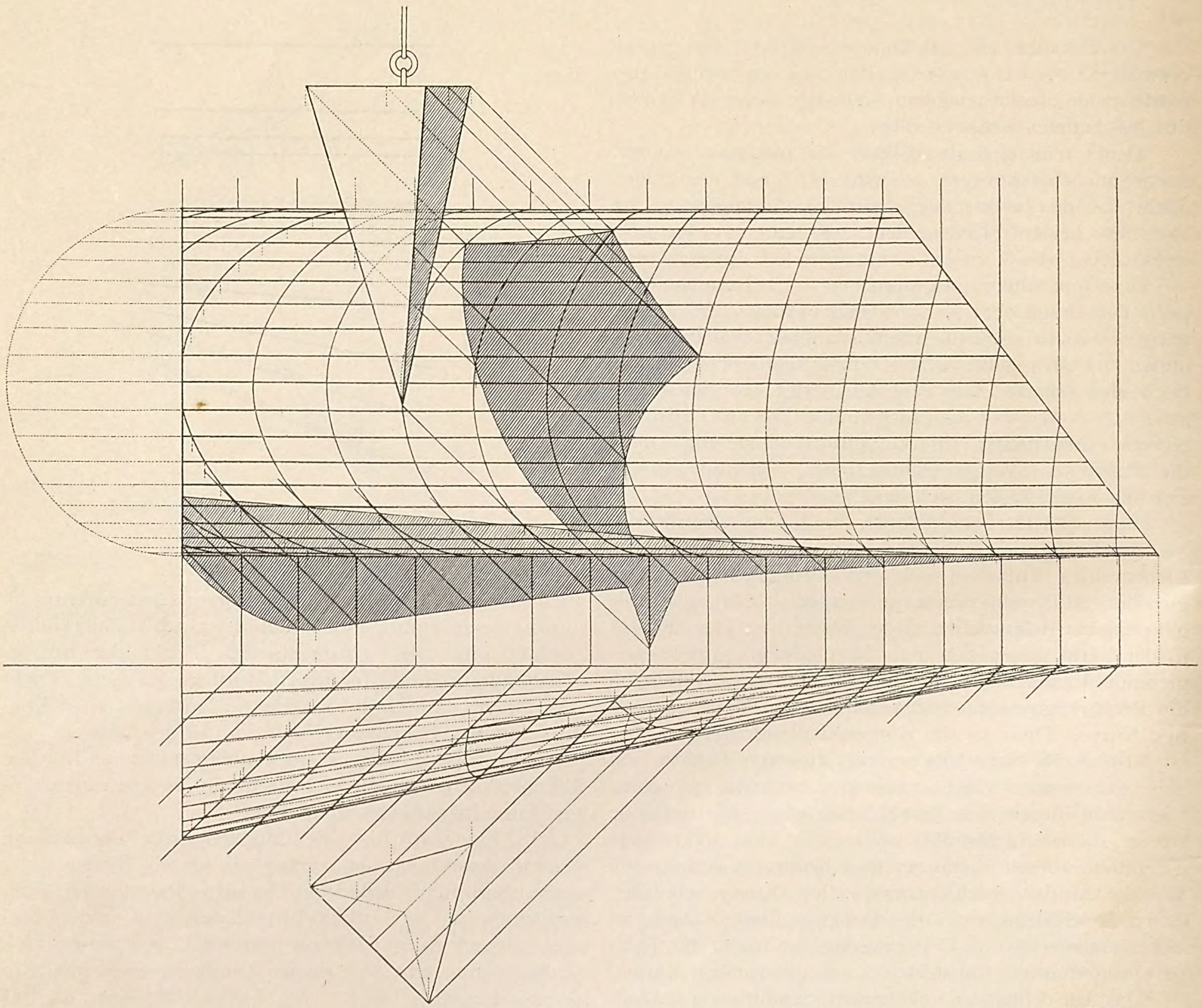
Lichtstrahls ist ein Punkt der Körperschattengrenze im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach *k* giebt den entsprechenden Punkt der Körperschattengrenze im Grundriss. Wirft ein äusserer Punkt *aa'* seinen Schatten auf die Fläche, so liefert nach Konstruktion der Schnittkurve der im Aufriss durch *a'* gezogene Lichtstrahl den Schlagschattenpunkt *s'* und dessen Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss den zugehörigen Grundrissschlagschattenpunkt *s*.

In Figur 29b ist als durchgeführtes Beispiel ein Konoid gezeichnet, das erzeugt ist durch Gleiten einer immer horizontal bleibenden Geraden einerseits an einer geneigten, in der Vertikalebene liegenden Geraden, andererseits an einem Halbkreis, dessen Ebene normal zum Grundschnitt steht und dessen Durchmesser ebenfalls in der Vertikalebene liegt. Die Fläche hat einen Selbstschatten und ist von aussen durch eine hängende Pyramide beschattet. Die Konstruktion erklärt sich durch die eingezeichneten Lichtstrahlen und Schnittkurven. Die Entfernungen der ersten im Grundriss wurden gleich gross angenommen; dies musste zur Folge haben, dass auch im Aufriss alle Mantellinien der Fläche durch die Schnittkurven in gleiche Teile geteilt wurden. Waren also zwei entfernte dieser Kurven durch Hinaufloten aus dem Grundriss abgeleitet, so mussten nur die zwischenliegenden Mantellinienstücke in gleiche Teile eingeteilt werden, um die Punkte der zwischenliegenden Schnittkurven zu erhalten.

Ein weiteres hieher gehöriges Beispiel, das zugleich die Selbstbeschattung einer Regelfläche darbietet, ist die Schraubenfläche in Figur 70.

30. Anwendung auf Drehungsflächen.

Als Beispiel für die Anwendung der Lösung auf Drehungsflächen mag ein halbes Drehungsellipsoid mit vertikaler Achse dienen, das aus der Vertikalebene vorragt. (Das Drehungsellipsoid entsteht, wenn man eine Ellipse um eine ihrer Achsen dreht; in Figur 30a ist die in der Vertikalebene liegende vertikale Achse die Drehachse.) Um die Schnittkurve der vertikalstehenden Ebene eines Lichtstrahls L mit dem Körper zu erhalten, zeichnet man im Grund- und Aufriss einige Parallelkreise *1, 2, 3* etc.; sie projizieren sich im Grundriss als konzentrische Kreise, im Aufriss als Horizontallinien. Die Schnittpunkte *1, 2, 3*, die im Grundriss zwischen Lichtstrahl und Parallelkreisen sich ergeben, lotet man hinauf auf die Parallelkreisprojektionen im Aufriss und verbindet die hiedurch erhaltenen Punkte. Die entstehende Kurve ist ein Ellipsenstück, würde aber bei anderen Drehungsflächen eine Linie höherer Ordnung sein. An dieser Schnittkurve ist in k' ein tangierender Lichtstrahl möglich; k' ist also ein Punkt der Körperschattengrenze; er ist auf den Grundriss des Lichtstrahls nach k hinunterzuloten. Weitere Lichtstrahlen ergeben weitere solche Punkte.

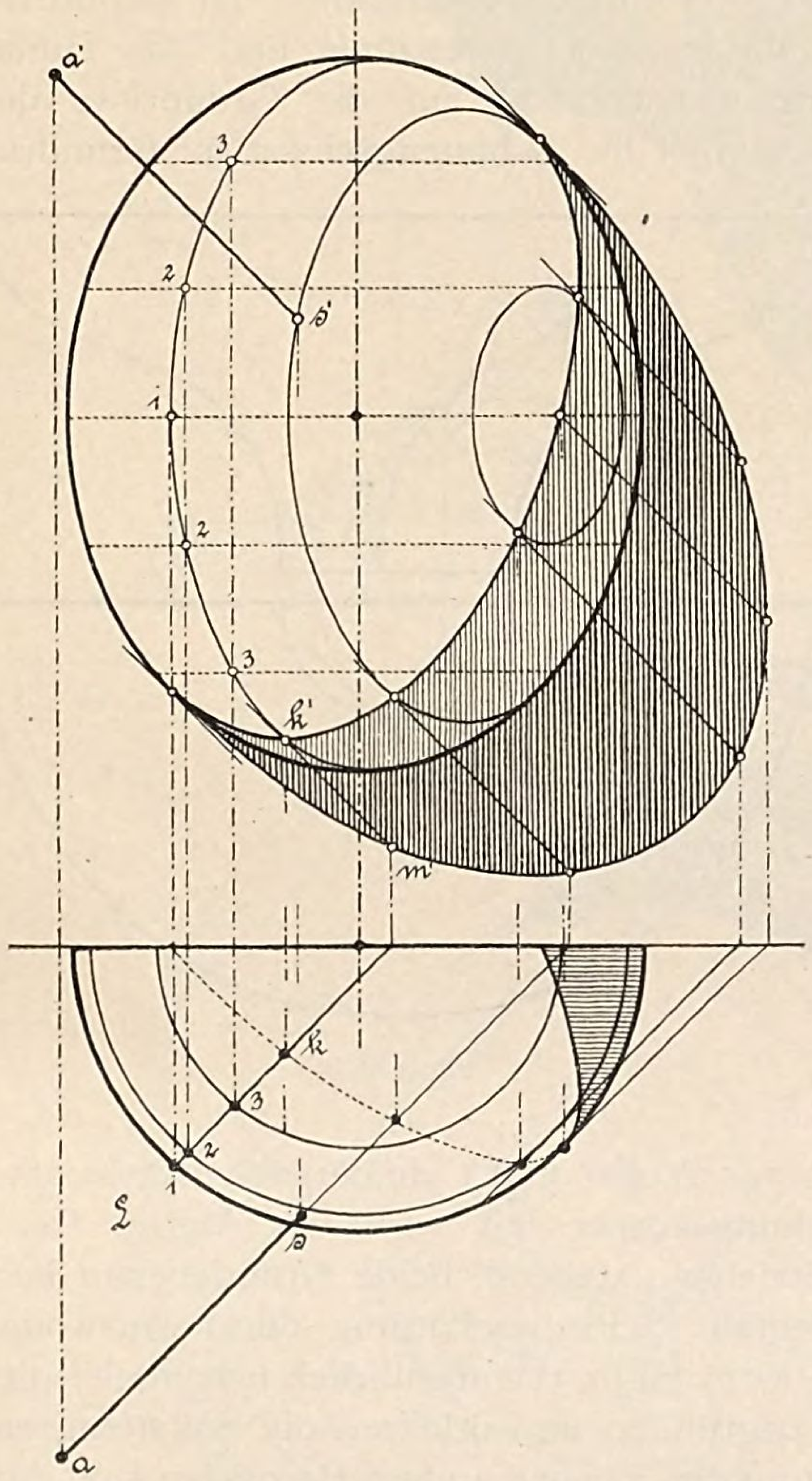


Figur 29 b.

Um den Schlagschatten eines äusseren Punktes aa' auf dem Ellipsoid zu bestimmen, zieht man seinen Lichtstrahl und konstruiert für diesen die Schnittkurve wie für die andern. Der Aufriss des Lichtstrahls schneidet die Schnittkurve in s'; dieser Punkt ist der Schlagschatten im Aufriss; durch sein Hinunterloten auf den Lichtstrahl-

grundriss wird auch die Horizontalprojektion des Schlagschattenpunktes *s* erhalten.

Wo die Tangenten, die in der Vertikalprojektion gezogen wurden, die Grundebene schneiden, da erscheinen die Punkte (*m'* u. s. w.) der Grenze des Schlagschattens, den das halbe Ellipsoid auf die Grundebene wirft. Wäre etwa statt der Grundebene eine andere Ebene vorhanden,



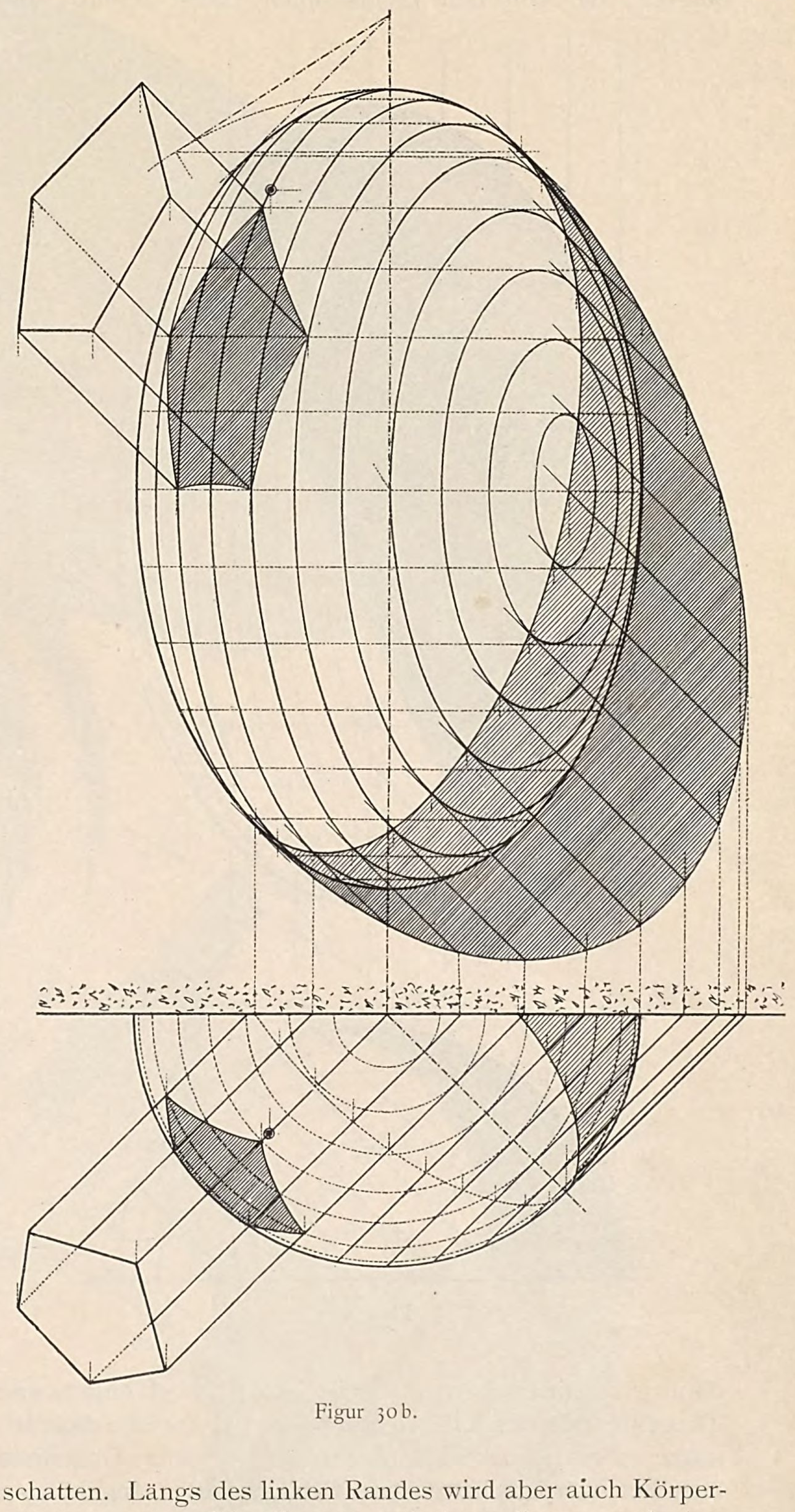
Figur 30 a.

so wäre der Schnittpunkt jeder Tangente mit dieser andern Fläche ein Punkt der Grenze des Schlagschattens, den das halbe Ellipsoid werfen würde.

In Figur 30b ist die Konstruktion mit thunlichster Vollständigkeit unter Beschattung des Ellipsoids durch eine äussere ebene Figur zur Anschauung gebracht.

31. Selbstbeschattung gekrümmter Flächen.

Es giebt zwei Arten von äusserer Selbstbeschattung gekrümmter Flächen, diejenige durch Kanten oder Grenzlinien einerseits und Beschattung durch Auswölbung andererseits. Ein einfachstes Beispiel der ersten Art erhält man, wenn man das halbe Ellipsoid nicht als Vollkörper, sondern in die Vertikalebene vertieft annimmt. Die Lösung bleibt im wesentlichen dieselbe wie beim konvexen Ellipsoid. Man konstruiert auch hier (Figur 31 a) die Schnittkurven mit Hilfe der Parallelkreise. Ein Teil der Schnittkurven öffnet sich gegen die Vertikalebene und findet seine Fortsetzungen in lotrechten Schnittlinien auf der Vertikalebene. Die oberen Endpunkte der meisten dieser Kurven, aufgefasst als äussere Punkte und wie solche behandelt, ergeben Schlagschattenpunkte auf dem Innern der Kurve; die Verbindungslinie dieser Schlagschattenpunkte giebt die Grenze von Licht und Schlag-

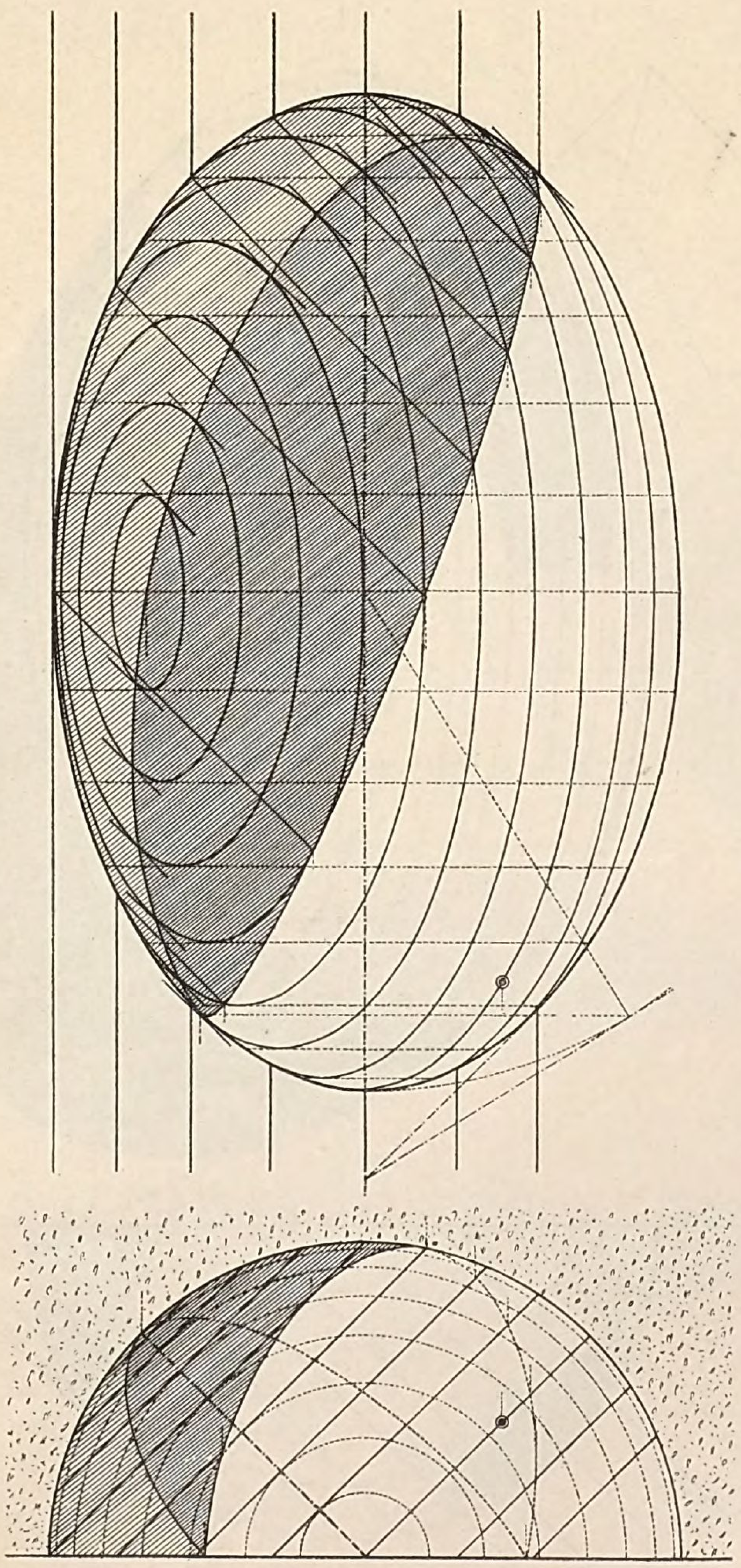


Figur 30 b.

schatten. Längs des linken Randes wird aber auch Körperschatten sein. Die Grenze zwischen diesem und dem Schlagschatten erhält man wieder durch Tangenten an die Schnittkurven und Verbindung der Berührungspunkte, denn nur was unterhalb der Berührungspunkte von den Schnittkurven sichtbar ist, hat Schatten durch Beschattung; was oberhalb ist, hat Schatten durch Abwendung vom Licht.

Selbstbeschattung durch Kanten bietet auch Figur 70.

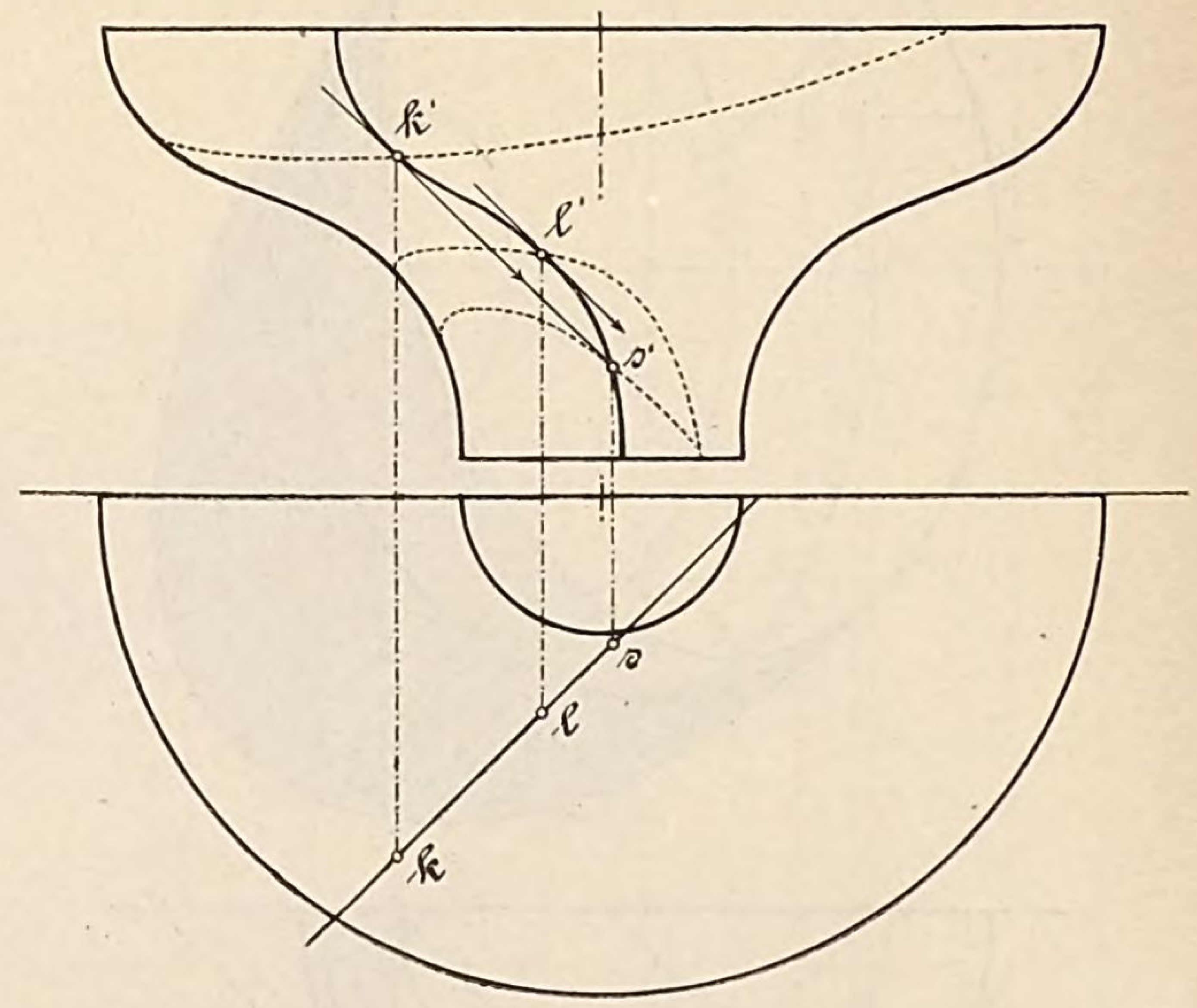
Der zweite Fall der Selbstbeschattung, diejenige durch Auswölbung, ist geboten, wenn die streifenden Lichtstrahlen zuerst die Fläche berühren und dann schneiden. Diese Thatsache gelangt in der Form der Schnittkurven zum Ausdruck (Figur 31 b). Es entstehen hier Schnittkurven, die von den Lichtstrahlen zuerst berührt und



Figur 31 a.

dann geschnitten werden. Meist ist auch noch eine zweite Tangente mit der Lichtrichtung an jede solche Schnittkurve möglich, deren Berührungspunkt einer Grenzlinie zwischen Körperschatten und Schlagschatten angehört.

In Figur 31 b liefert der im Grundriss gezogene Lichtstrahl die im Aufriss gezeichnete Schnittkurve. An dieser sind zwei Tangenten parallel zur Lichtrichtung möglich; die erste giebt den Berührungspunkt *k'* und den Schnittpunkt *s'*, die zweite den Berührungspunkt *l'*. Oberhalb *k'* ist die Kurve, als Grenzlinie der Schnittfläche aufgefasst, dem Lichtstrahl zugewendet; von *k'* bis *l'* ist sie vom Lichtstrahl abgewendet; von *l'* bis *s'* ist sie wieder dem Licht zugewendet, aber zugleich durch das mittlere Stück *k' l'* dem Licht verdeckt. Daher ist oberhalb *k'* Licht, von *k'* bis *l'* Körperschatten, von *l'* bis *s'* Schlagschatten, unterhalb *s'* wieder Licht. Also ist *k'* ein Punkt der Grenze zwischen Licht und Körperschatten, *l'* ein Punkt der Grenze zwischen Körperschatten und Schlagschatten, *s'* ein Punkt der Grenze zwischen Schlagschatten und Licht. Weitere Lichtstrahlen im Grundriss liefern weitere Punkte jeder Grenzlinie und das Hinunterloten der Aufrissgrenzpunkte auf die Grundrisse der Lichtstrahlen ergiebt die Schattengrenzen im Grundriss.

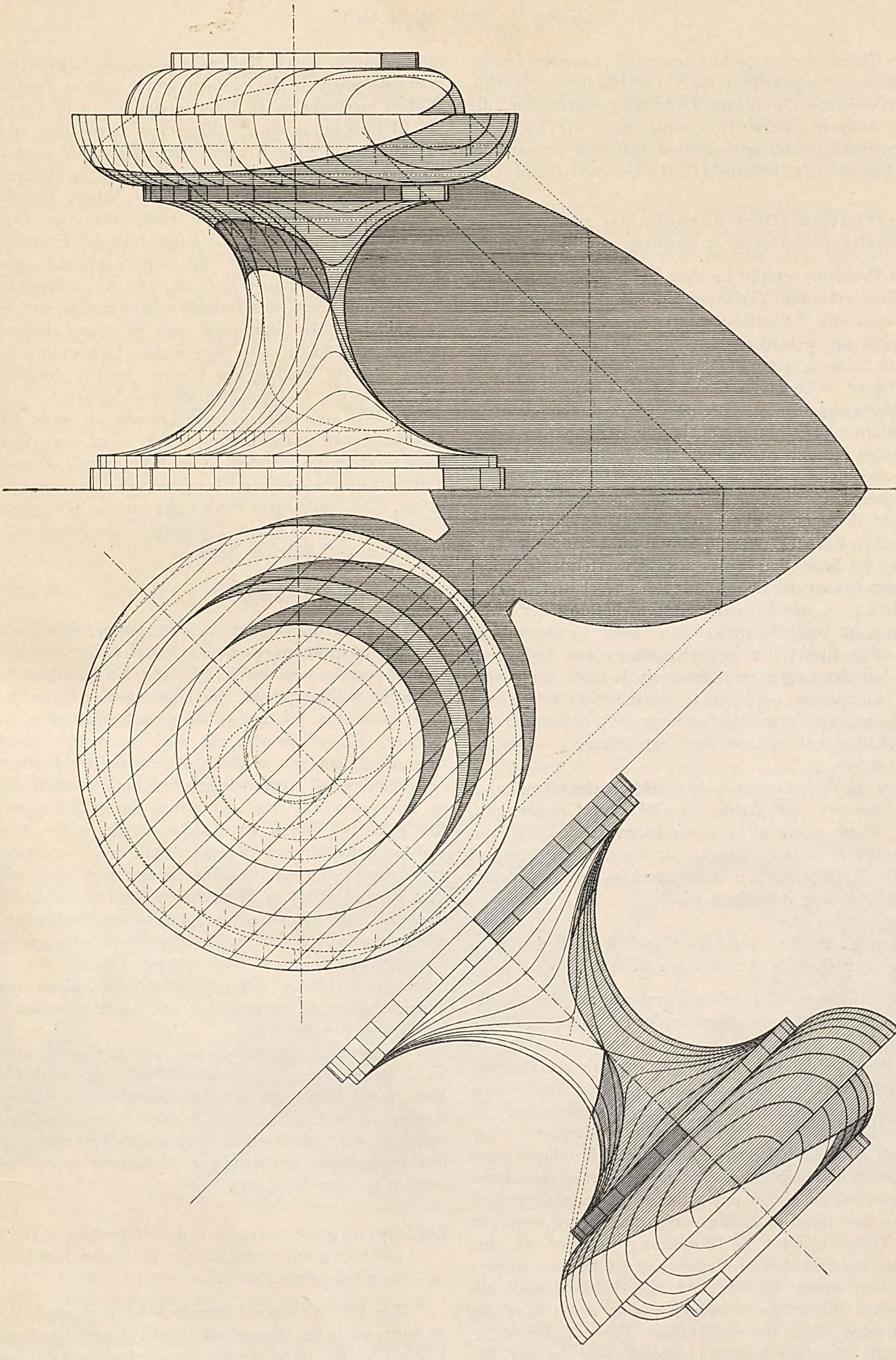


Figur 31 b.

Ein aus Wulst- und Cylinderflächen zusammengesetzter Drehungskörper mit vertikaler Achse, frei auf der Horizontalebene stehend, beide Grundebenen beschattend und ebenfalls Selbstbeschattung durch Auswölbung darbietend, ist in Figur 31 c ausführlich behandelt; die Schnittkurven begründen und erklären die Schattengrenzen. In diesem und den meisten andern Beispielen sind die Schnittkurven der beschatteten Flächen ganz gezeichnet, weil dies die Lösungen anschaulicher macht und vollständiger erklärt. In der praktischen Verwertung der Verfahren genügt es aber, nur kleine Stücke der Schnittkurven zu zeichnen, deren Lage und Ausdehnung nach Schätzung entsprechend der etwa zu erwartenden Lage der gesuchten Schattengrenze gewählt wird. Mit einiger Uebung kann diese Schätzung dem Ergebnis der Konstruktion sehr nahe kommen.

Schatten im Innern hohler Körper mit gekrümmter Oberfläche. 32.

Ein letzter besonderer Fall der Selbstbeschattung krummflächiger Körper erscheint im Innern von solchen, wenn ihre Oberfläche als papierdünne Schale aufgefasst wird. Die Körperschattengrenzlinie gilt für das Innere ganz ebenso wie für das Aeussere; nur wird im Innern zur Körperschattenfläche, was am Aeussern Lichtfläche ist, und was am Aeussern Körperschattenfläche ist, wird im Innern durchaus Schlagschatten, weil es dem Lichte zugewendet und zugleich verdeckt ist. Erst wenn ein



Figur 31 c.

Teil der Oberfläche weggebrochen wird, kann im Innern neben dem Schlagschatten auch Lichtfläche erscheinen. Sie ist von jenem durch eine Grenzlinie geschieden, die für das Aeussere keine Bedeutung hat, wie auch am Aeussern Schlagschattengrenzlinien auftreten können, die für das Innere nichts bedeuten (z. B. Figuren 69b und 69c).

33. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem andern solchen Körper.

Das Problem zerfällt in zwei Teile. Zuerst ist nach dem schon erklärten Verfahren auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze zu suchen; denn diese wirft als Schlagschatten die Grenzlinie zwischen Licht und Schlagschatten auf dem beschatteten Körper. Um diese letztere zu finden, hat man für eine genügende Zahl von Punkten jener Selbstschattengrenze nach dem ebenfalls oben erklärten Verfahren die Schlagschattenpunkte auf dem beschatteten Körper zu suchen und stetig zu verbinden.

Im allgemeinen wird man dieselben Lichtstrahlen zur Bestimmung beider Grenzlinien benützen; das heisst, man wird jede der angenommenen vertikalen Schnittebenen durch beide Körper zugleich führen und dann die Tangente an der Schnittkurve des schattenwerfenden Körpers verlängern bis zu der Schnittkurve des beschatteten. Hiedurch liefert — wie bei der Selbstbeschattung der zweiten in Art. 31 beschriebenen Art — jeder Lichtstrahl zugleich einen Punkt der Selbstschattengrenze und einen der Schlagschattengrenze. Meist wird auch noch eine Selbstschattengrenze auf dem beschatteten Körper zu suchen sein, zu deren Bestimmung die vorher für die Schlagschattenpunkte benützten Schnittkurven ebenfalls dienen können.

Figur 37 bietet eine solche Beschattung an zwei Drehungskörpern mit Achse parallel zum Grundschnitt, also an einem noch nicht behandelten Fall; doch kann das Beispiel alles hier Gesagte zur Anschauung bringen, wenn die Seitenprojektion als Grundriss mit geänderter Lichtstrahlrichtung aufgefasst wird.

34. Folgerungen für den Verlauf der Schattenkurven (s. auch Art. 69a am Schluss).

Die Auffassung der Schattengrenzen als der Berührungs- oder Schnittlinien zwischen der beschatteten Fläche und dem Lichtstrahlencylinder lehrt folgendes:

a) Wo der Umriss eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche gebildet ist durch die Reihe der Berührungspunkte der am Körper tangierenden Projektionslote, da müssen Körper- und Schlagschattengrenzkurven berührend an diesem Umriss ankommen. Im allgemeinen gehen die Schattengrenzen an diesem Umriss von ihrem sichtbaren Teil zu einem unsichtbaren (zu punktierenden) über, so dass der Berührungspunkt die Grenze zwischen beiden Teilen bildet. Die Berührung ist aber oft eine solche mit äusserst kleinem Krümmungshalbmesser, so dass sie sich von einem Aneinanderstossen beider Linien unter schiefem Winkel kaum unterscheidet. Auch kann der Fall eintreten, dass der unsichtbare Teil auf den sichtbaren fällt, also der Krümmungshalbmesser an der Berührungsstelle gleich Null wird, so dass wirklich ein Zusammenstossen beider Linien unter einem bestimmten Winkel erscheint (z. B. Umklappung in Figur 31 c).

b) Endpunkte einer Schlagschattengrenzlinie an deren Anstossen an einer Körperschattengrenzlinie sind häufig zugleich Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und einem Lichtstrahl, das heisst, die Schlagschattengrenze hat an ihrem Endpunkt eine Tangente von 45° Neigung. Dasselbe kann auch bei Eckbildungen der Schlagschattengrenze für den Eckpunkt zutreffen. Die Erscheinung findet sich da, wo die Schlagschattengrenze, als Schnitt des Lichtstrahlencylinders mit der gekrümmten Fläche aufgefasst und in dieser Eigenschaft fortgesetzt gedacht, über den letzten Lichtstrahl, den sie erreicht, nicht hinausgehen könnte, weil er die äusserste Mantellinie des Lichtstrahlencylinders bildet.

c) Wo eine Schlagschattengrenze an einer Körperschattengrenze aufhört, findet sich meist eine von derselben schattenwerfenden Linie herrührende Fortsetzung dazu auf einem anderen Körperteil oder auf einer Grundebene. Die Endpunkte beider getrennten Schlagschattenstücke müssen auf einem Lichtstrahl, das heisst auf einer Linie von 45° Neigung liegen.

Mängel der Lösung. 35.

Die Berührungspunkte der an den Schnittkurven tangierenden Lichtstrahlen müssen meist nach Schätzung bestimmt werden, wodurch oft eine Unsicherheit bis zu mehreren Millimetern für die Lage eines solchen Punktes und damit für die ganze Körperschattengrenze hereinkommt. Diese Unsicherheit vergrössert sich durch geringe Ungenauigkeit in der Konstruktion der Kurven sehr bedeutend und kann bei schwach gekrümmten Flächen so gross werden, dass die Konstruktion fast wertlos ist. Bei solchen Flächen ist übrigens auch in der Wirklichkeit die Schattierung eine solche mit breit verschwommener Grenze, die ein sicheres Einzeichnen der Linie auf dem Körper selbst nicht gestatten würde; geringe Fehler in der Hand- oder Maschinenarbeit der Ausführung, wie sie unvermeidlich sind, verändern die Schattengrenze unverhältnismässig stark und machen oft aus der gesetzmässigen Grenzlinie, die erscheinen sollte, einen ungleich breiten, regellos verlaufenden und sogar zuweilen unterbrochenen Streifen.

Ohne tieferes Eingehen auf die Erzeugungsweise der zu schattierenden gekrümmten Fläche lässt sich dieser Mangel der Konstruktion nicht beheben. Für Drehungsflächen, besonders solche mit kreisbogenförmigen Meridianstücken, wird übrigens eine Konstruktion mit grösserer, beziehungsweise vollständiger Sicherheit später gezeigt werden (s. Art. 56 u. 57).

Umkehrung der allgemeinen Lösung durch Benützung der vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen. 36.

Wie bei den eben begrenzten Körpern nach Art. 19, so kann auch bei den gekrümmten Flächen die allgemeine Lösung häufig derart umgekehrt werden, dass die vertikal-

projizierenden Ebenen des Lichtstrahls anstatt der horizontalprojizierenden verwendet werden. Bei bestimmten Arten und Lagen der Körper ist dieser Weg sogar der bessere. So liegt er z. B. bei Drehungskörpern mit Achse senkrecht zur Vertikalebene näher; die Lösung gestaltet sich dann ganz wie bei vertikalstehenden Drehungskörpern nach Art. 30; nur erscheinen Grundriss und Aufriss vertauscht.

In andern Fällen kann ein Grund für die Umkehrung der allgemeinen Lösung darin liegen, dass die Schattengrenzen nur im Grundriss, in dem sie dann zuerst erscheinen, verlangt sind.

In bestimmten Fällen empfiehlt es sich, vertikalstehende und vertikalprojizierende Schnitte nebeneinander zu verwenden, indem etwa für einen Teil der Schattenkurve jene, für einen andern Teil diese letzten ein schärferes Resultat geben oder sich rascher zeichnen, oder die einen eine willkommene Probe für das Resultat aus den andern liefern. So werden z. B. für die Selbstbeschattungsgrenze des verdrehten Stabs in Figur 107 oben besser die vertikalstehenden, unten besser die vertikalprojizierenden Schnittebenen verwendet.

37. Zuhilfenahme der Seitenprojektion.

Wie bei den ebenbegrenzten Körpern, so sind auch bei manchen solchen mit gekrümmten Flächen Aufriss und Seitenprojektion anstatt Aufriss und Grundriss zu benützen; sei es, dass die Fläche nur mit Hilfe der Seitenprojektion unzweideutig darstellbar, oder ohne Grundriss gegeben ist; sei es, dass die Benützung der Seitenprojektion den kürzeren Weg bildet. Als Schnittebenen des Körpers treten dann im allgemeinen die seitlich projizierenden Lichtstrahlebenen auf; doch können auch hier zuweilen die vertikalprojizierenden mit grösserem Nutzen verwendet werden.

Die nächstliegenden Beispiele bilden Drehungsflächen mit Achse parallel zum Grundschnitt. In Figur 37 erscheinen zwei solche Drehungskörper, die einander in Schatten setzen und mannigfaltige Selbstbeschattung darbieten. Eine Erklärung der Konstruktion würde nur die Wiederholung des für die allgemeine Lösung Ausgesprochenen mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion sein.

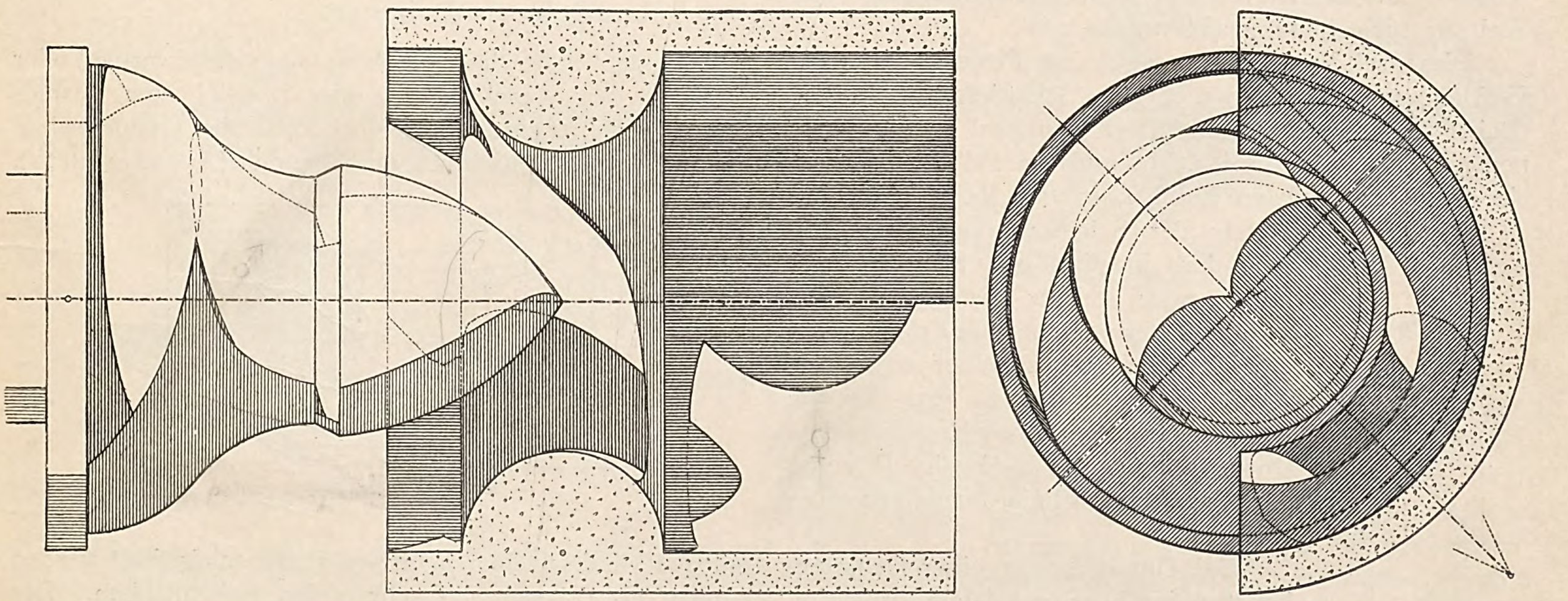
Ein weiteres Beispiel der Zuhilfenahme der Seitenprojektion und der seitlich projizierenden Schnittebenen ist in Figur 73 (Röhrenfläche mit veränderlicher Erzeugenden) gezeichnet.

Zuhilfenahme von weiteren Projektionsebenen und von Umklappungen. 38.

Bei der Schattenkonstruktion auf gekrümmten Flächen bestimmter Art nimmt man zuweilen noch andere Projektionen zu Hilfe als die bisher betrachteten auf die drei Grundebenen.

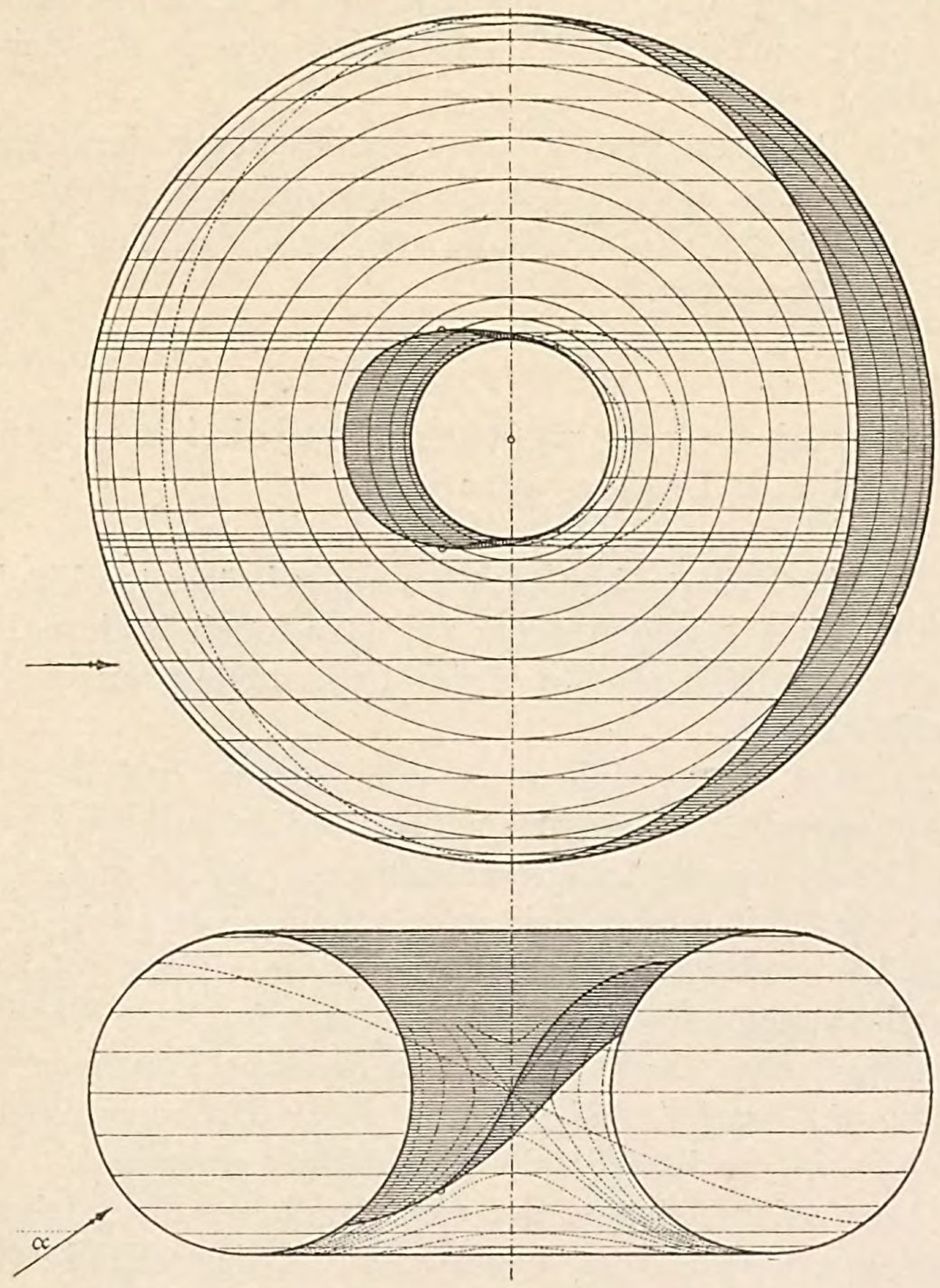
a) Man denkt sich z. B. den Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, projiziert auf eine vertikale Ebene, die der Lichtstrahlrichtung parallel steht (also selbst die horizontalprojizierende Ebene eines Lichtstrahls darstellt), und zeichnet entweder diese neue Projektion als selbständige Figur neben die ursprüngliche Vertikalprojektion, oder denkt sich die neue Projektionsebene mit der darauf erscheinenden Figur durch Drehung um ihre Fusslinie in die horizontale Grundebene umgelegt.

Eine solche in eine der ursprünglichen Grundebenen umgelegte ebene Figur bezeichnet die darstellende Geometrie als „Umklappung". Beim Aufzeichnen einer Umklappung ist nur zu beachten, dass alle Punkte beim Umlegen Kreisbögen um die Fusslinie der umzuklappenden Ebene beschreiben, und dass sich diese Kreisbögen als gerade Linien senkrecht zur Fusslinie oder Umklappungsachse projizieren, endlich dass in der Umklappung deren Radien und alle Masse und Winkel der Figur in ihrer wahren Grösse erscheinen.



Figur 37.

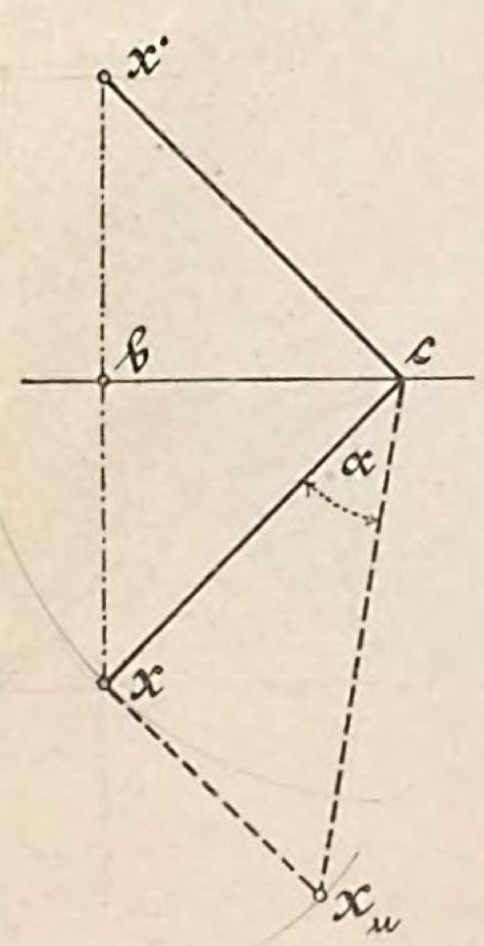
Figur 31 c zeigt eine solche Umklappung der Projektion auf eine vertikale Lichtstrahlenebene in die horizontale Grundebene, wogegen in Figur 38 a eine Wulst-



Figur 38 a.

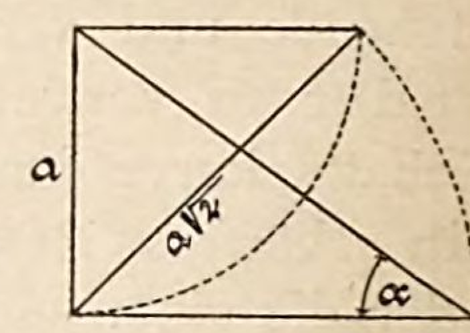
fläche in solcher Projektion als Vertikalprojektion gezeichnet, mit andern Worten, die Vertikalgrundebene parallel zur Lichtrichtung angenommen ist.

Diese schrägstehenden vertikalen Projektionen oder Umklappungen ersparen z. B. beim Schattieren von Kugelflächen — wie später auszuführen sein wird — das Zeichnen elliptischer Hilfslinien. In anderen Fällen gewähren sie oft einen besseren Einblick in den Verlauf und das Gesetz der Schattengrenzkurven, insbesondere in die Lage höchster oder tiefster oder anderer wichtiger Punkte, oder sie liefern erwünschte Proben, oder endlich sie führen zu einer schärferen Bestimmung der Kurven, wo etwa die anderen Projektionen durch spitzwinklige Durchschnitte oder ungünstige Häufung der Konstruktionslinien bemühen oder versagen.



Figur 38 b.

Bei Durchführung einer Schattenkonstruktion in einer solchen Projektion auf die schrägstehende vertikale Ebene eines Lichtstrahls ist zu beachten, dass der Neigungswinkel der Lichtstrahlprojektion hier nicht ebenfalls gleich 45° ist, sondern gleich der wirklichen Neigung des Lichtstrahls im Raum, welche erst aus den zwei ursprünglichen Projektionen abzuleiten ist. Man erhält diesen Neigungswinkel, indem man (Figur 38 b) auf einem durch den Grundschnitt gezogenen Lichtstrahl einen Punkt X annimmt und das horizontalprojizierende Dreieck des Lichtstrahls $c\,x\,X$ in die Horizontalebene umklappt. Hiebei beschreibt der Raumpunkt X einen Viertelskreis und legt sich nach x_u, indem $xx_u = b\,x'$ wird; $c\,x_u$ ist die Umklappung des Lichtstrahls und $x\,c\,x_u$ oder α ist der gesuchte Winkel, den der Lichtstrahl als Raumlinie mit seiner Horizontalprojektion einschliesst. Er erweist sich als der kleinere Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete die Diagonale eines Quadrats über a oder gleich $a\sqrt{2}$ ist. Die Rechnung ergiebt $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$. Im folgenden wird die Ableitung dieses Winkels immer mit Figur 38 c erscheinen.



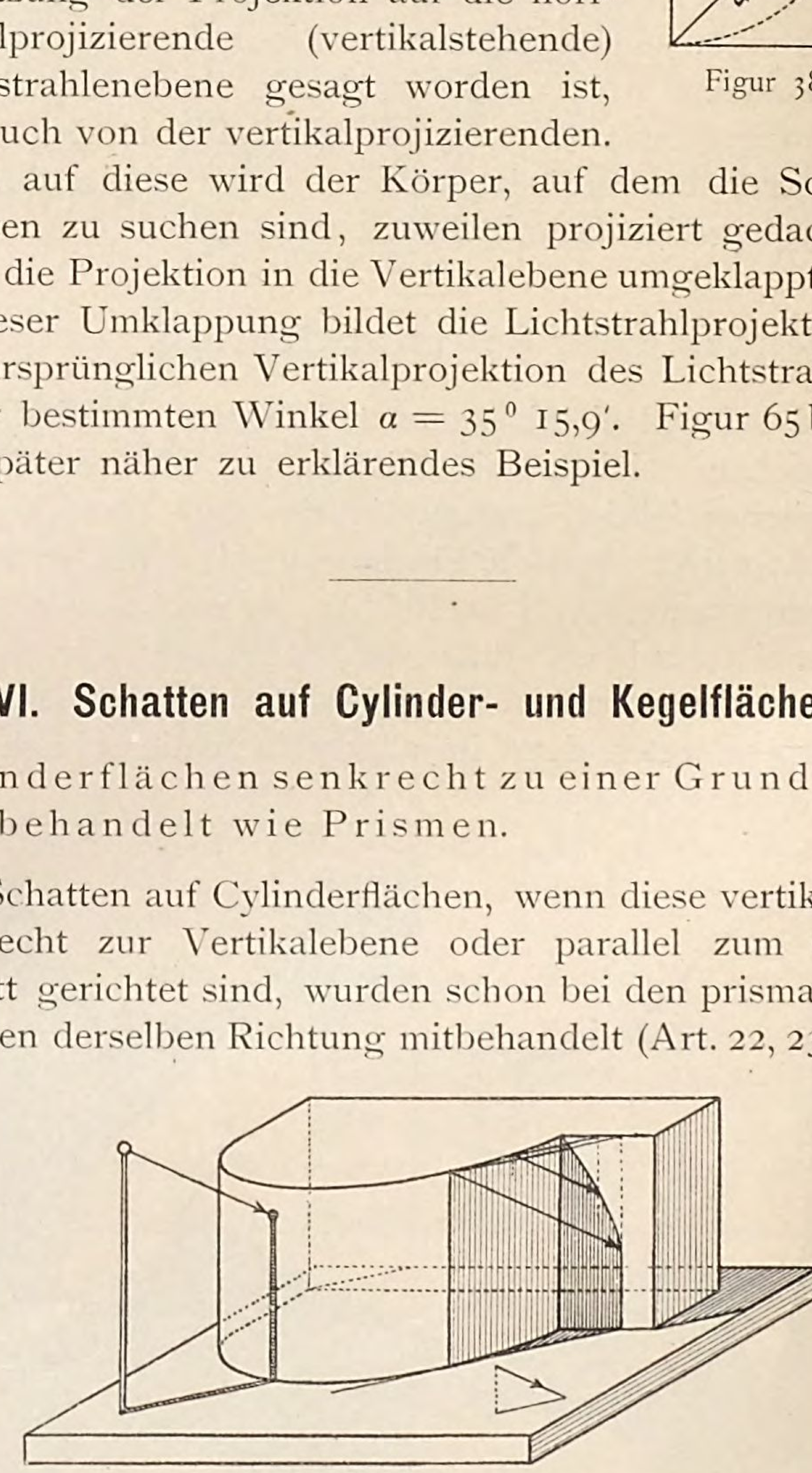
Figur 38 c.

b) Was im vorhergehenden über die Benützung der Projektion auf die horizontalprojizierende (vertikalstehende) Lichtstrahlenebene gesagt worden ist, gilt auch von der vertikalprojizierenden. Auch auf diese wird der Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, zuweilen projiziert gedacht und dann die Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Auch in dieser Umklappung bildet die Lichtstrahlprojektion mit der ursprünglichen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den zuvor bestimmten Winkel $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$. Figur 65 b bietet ein später näher zu erklärendes Beispiel.

VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

Cylinderflächen senkrecht zu einer Grundebene 39.
behandelt wie Prismen.

Schatten auf Cylinderflächen, wenn diese vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon bei den prismatischen Flächen derselben Richtung mitbehandelt (Art. 22, 23 u. 25),

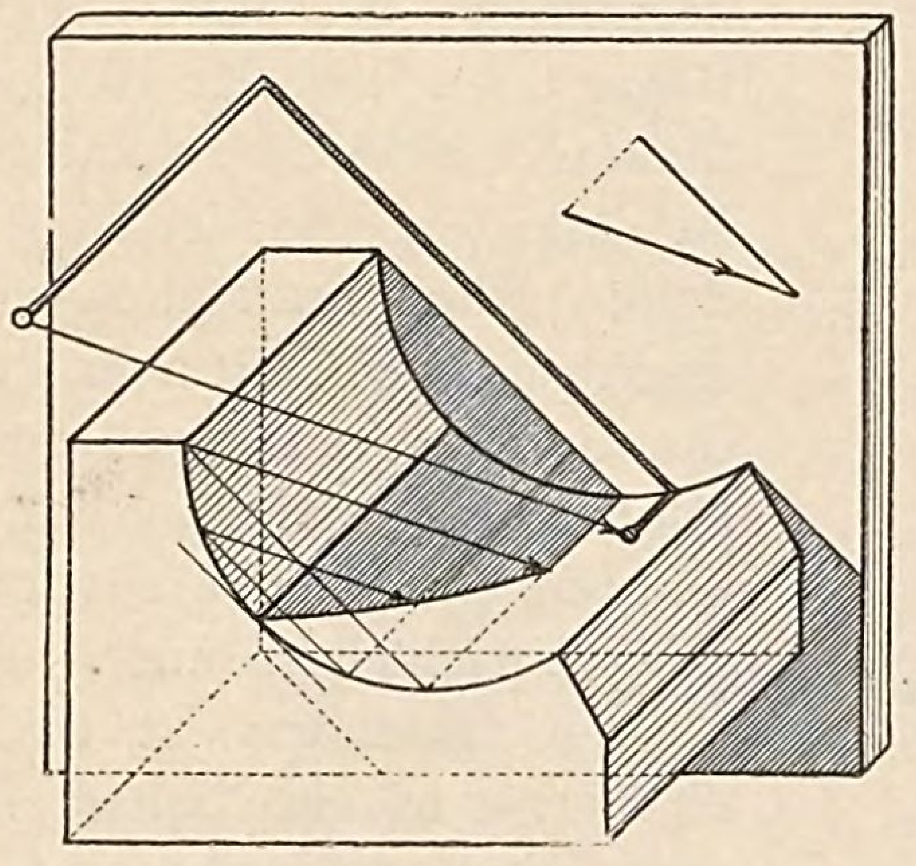


Figur 39 a.

indem Cylinderflächen in diesen Lagen aufgefasst werden können als Prismen mit sehr vielen Seitenflächen. Die hieraus entspringenden Lösungen sind zugleich besondere Formen der allgemeinen Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen, beziehungsweise ihrer Umkehrungen mit Vertauschung von Grundriss und Aufriss oder mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion.

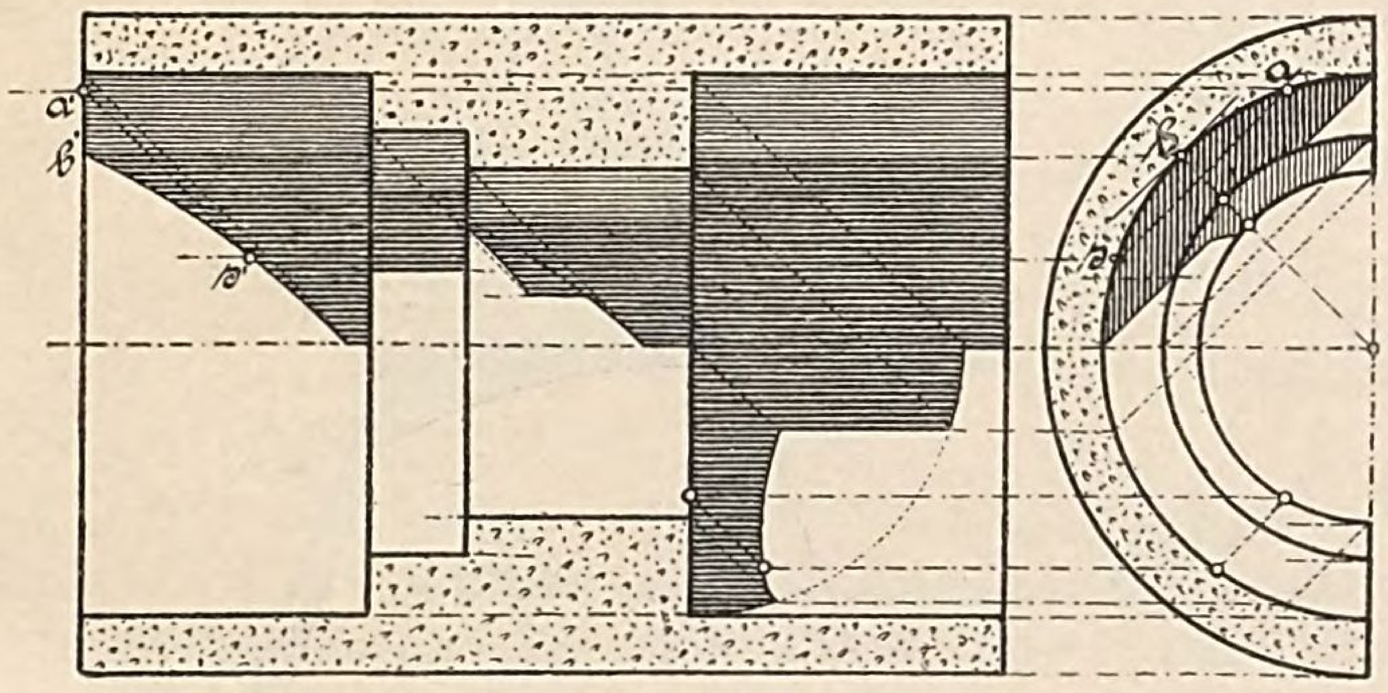
Die Figuren 39 a und 39 b bringen das Prinzip der Lösung für die zwei ersten Fälle perspektivisch zur An-

schauung; in Figur 39c ist als Beispiel für den dritten Fall eine kreisrunde Röhre mit Verengerungen im Längen-



Figur 39b.

schnitt, also eine Cylinderfläche parallel zum Grundschnitt gezeichnet und der Schatten eines Randpunktes $a' a$ durch



Figur 39c.

das Paralleltrapez $a' a s s'$ bestimmt ganz wie in Art. 25, ebenso die Körperschattengrenze im Aufriss durch Hinüberliniieren des Berührungspunktes b als Mantellinie im Aufriss.

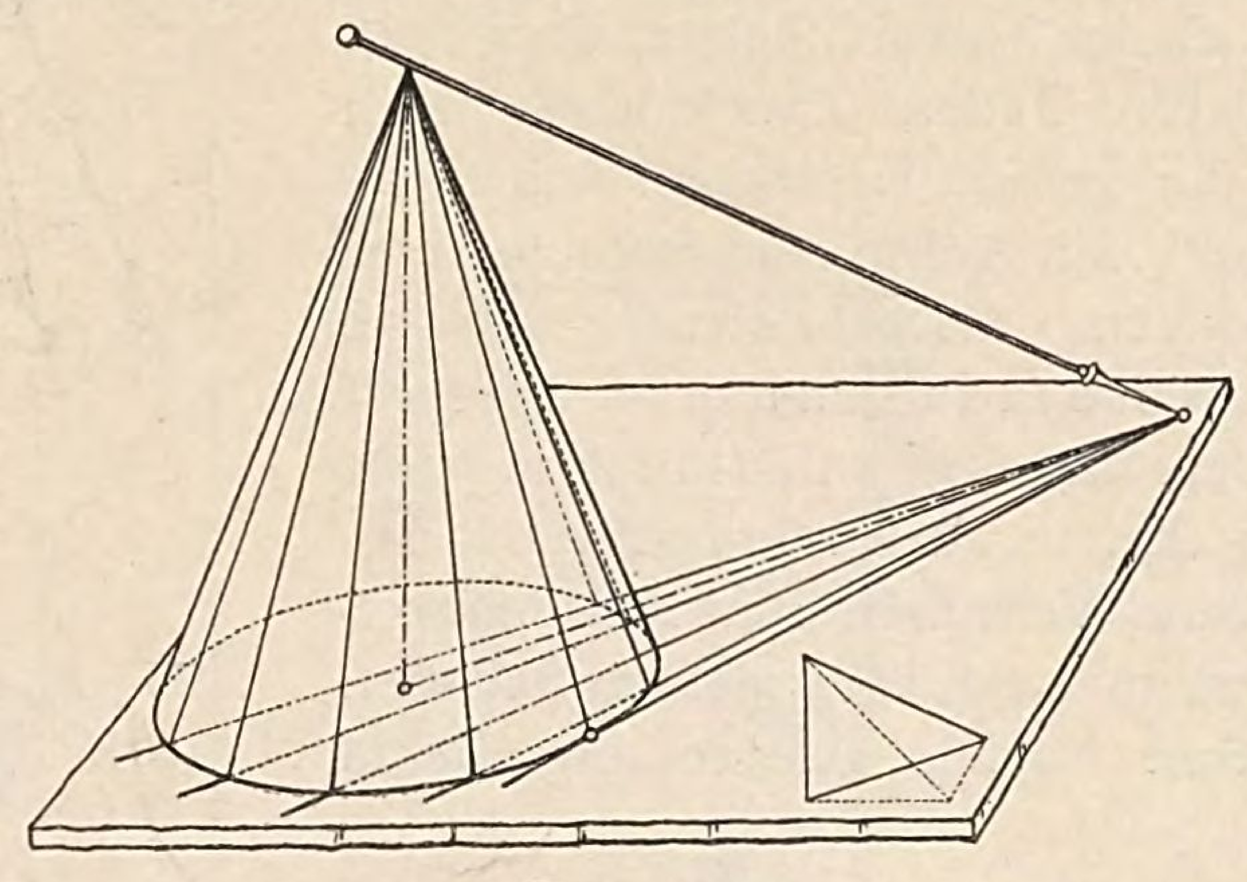
40. Verlassen der allgemeinen Lösung bei Kegel- und schiefgerichteten Cylinderflächen.

Bei Schatten auf schiefgerichteten Cylinderflächen und auf Kegelflächen in allen möglichen Lagen würden die Schnittebenen, welche die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen benützt, gekrümmte Schnittlinien mit den beschatteten Flächen ergeben, und zwar bei Kreiscylindern und Kreiskegeln elliptische, parabolische und hyperbolische Linien; die Lösung würde sich also sehr zeitraubend gestalten. Daher wird hier die Benützung der projizierenden Ebenen des Lichtstrahls als der Schnittebenen des beschatteten Körpers aufgegeben.

41. Schatten auf Kegelflächen.

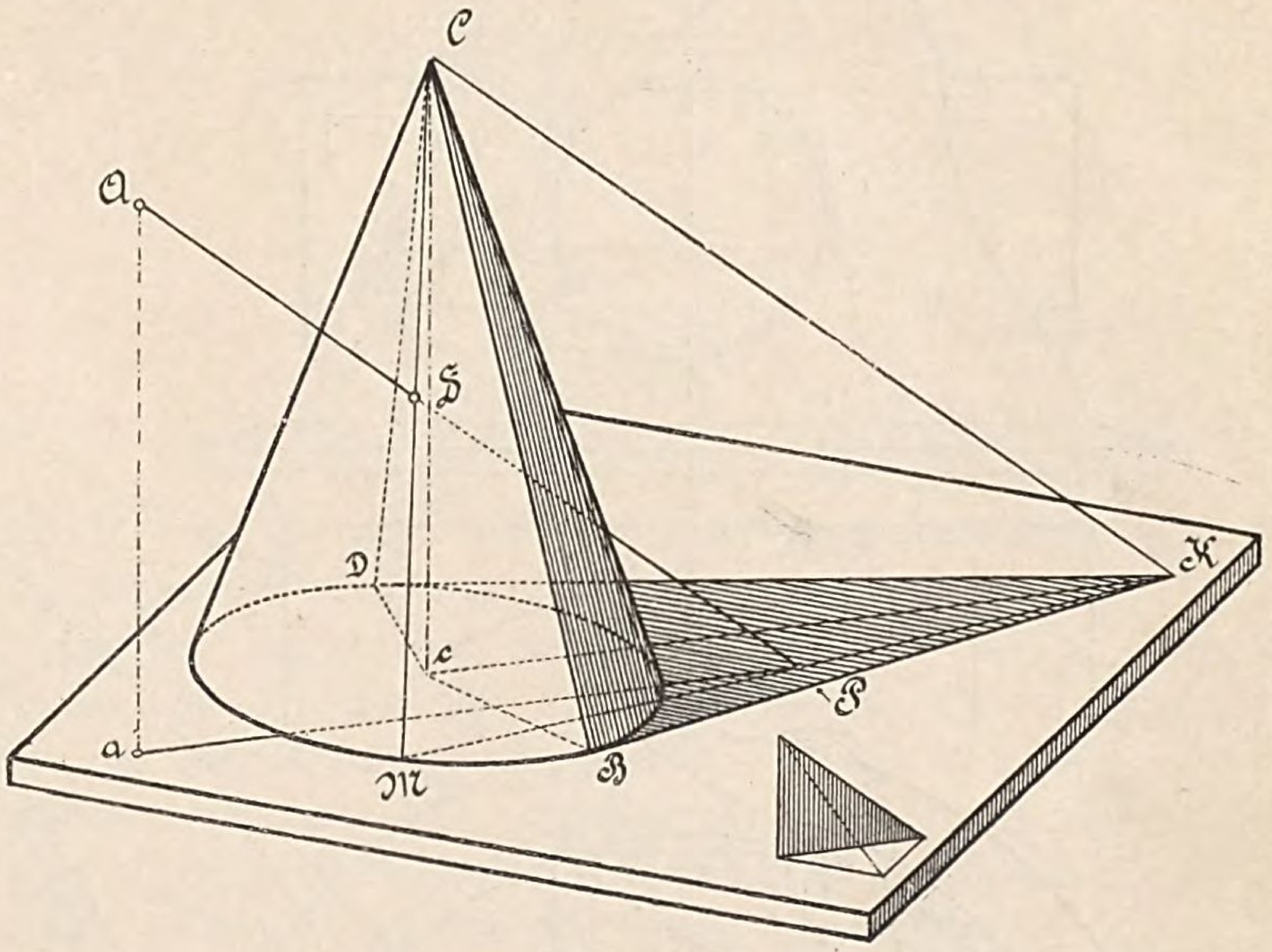
Bei Schatten auf Kegelflächen werden dafür Ebenen eingeführt, welche zwar ebenfalls dem Lichtstrahl parallel sind, aber alle durch die Kegelspitze gehen, so dass sie alle möglichen Neigungen annehmen. Solche Ebenen, wie sie in Figur 41a anschaulich gemacht sind, schneiden den Kegel nach Mantellinien, also nach geraden Linien, und es werden also auf diese Weise die gekrümmten Schnittlinien umgangen. Das Verfahren, gültig für alle Fälle, ist das folgende:

Man zieht (Figur 41b) durch die Spitze des Kegels C einen Lichtstrahl und sucht dessen Schnittpunkt K mit der erweitert gedachten Basisebene des Kegels. Dieser Punkt K ist der Schlüssel zu allen Lösungen bei Schatten auf Kegelflächen. (In manchen Fällen muss man den Lichtstrahl rückwärts durch die Kegelspitze ziehen, um einen



Figur 41a.

Schnitt mit der Basisebene zu erhalten [etwa wenn der Kegel auf der Spitze steht]; in manchen Fällen ist die Basisebene eine Grundebene, in anderen nicht). Durch den gefundenen „Schlüsselpunkt" legt man Sekanten und Tangenten KB und KD an die Kegelbasis. Die Mantellinien durch die Berührungspunkte B und D der Tangenten sind die Körperschattengrenzen auf der



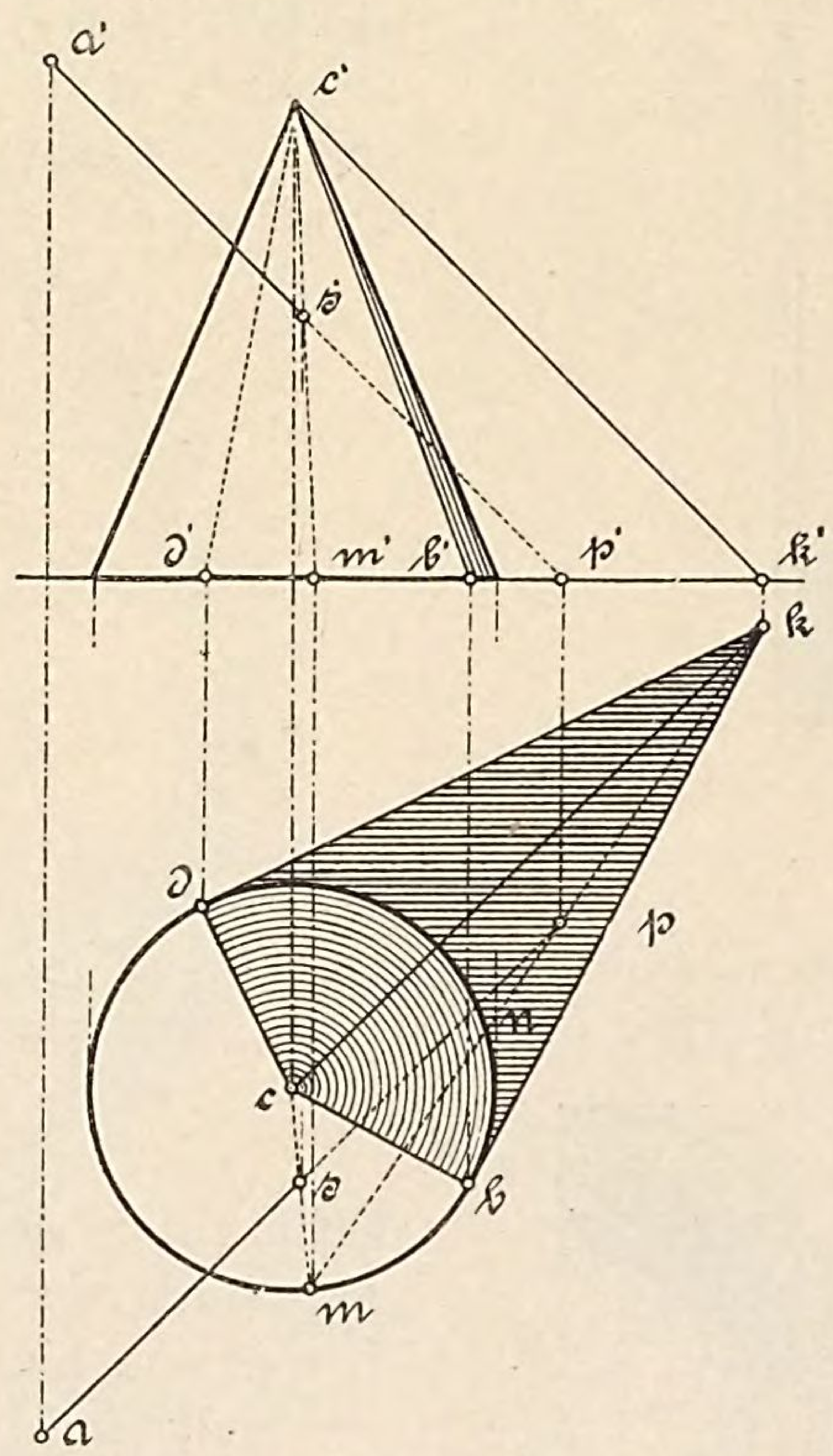
Figur 41b.

Kegelfläche. Die Mantellinien durch die Schnittpunkte jeder Sekante sind die Schnittlinien des Kegels mit einer Lichtstrahlenebene, welche durch die Sekante gelegt ist. Diese Schnittlinien benützt man bei Schlagschatten auf Kegelflächen ganz in derselben Weise, wie die Schnittkurven bei anderen gekrümmten Flächen, das heisst, wo eine solche Schnittlinie getroffen wird vom Lichtstrahl eines schattenwerfenden Punktes, der mit der Sekante in derselben Lichtstrahlenebene liegt, da ist der Schlagschatten des Punktes. Die zu einem schattenwerfenden Punkt A gehörige Sekante KM geht durch den Schnitt eines durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls mit der Basisebene des Kegels (P).

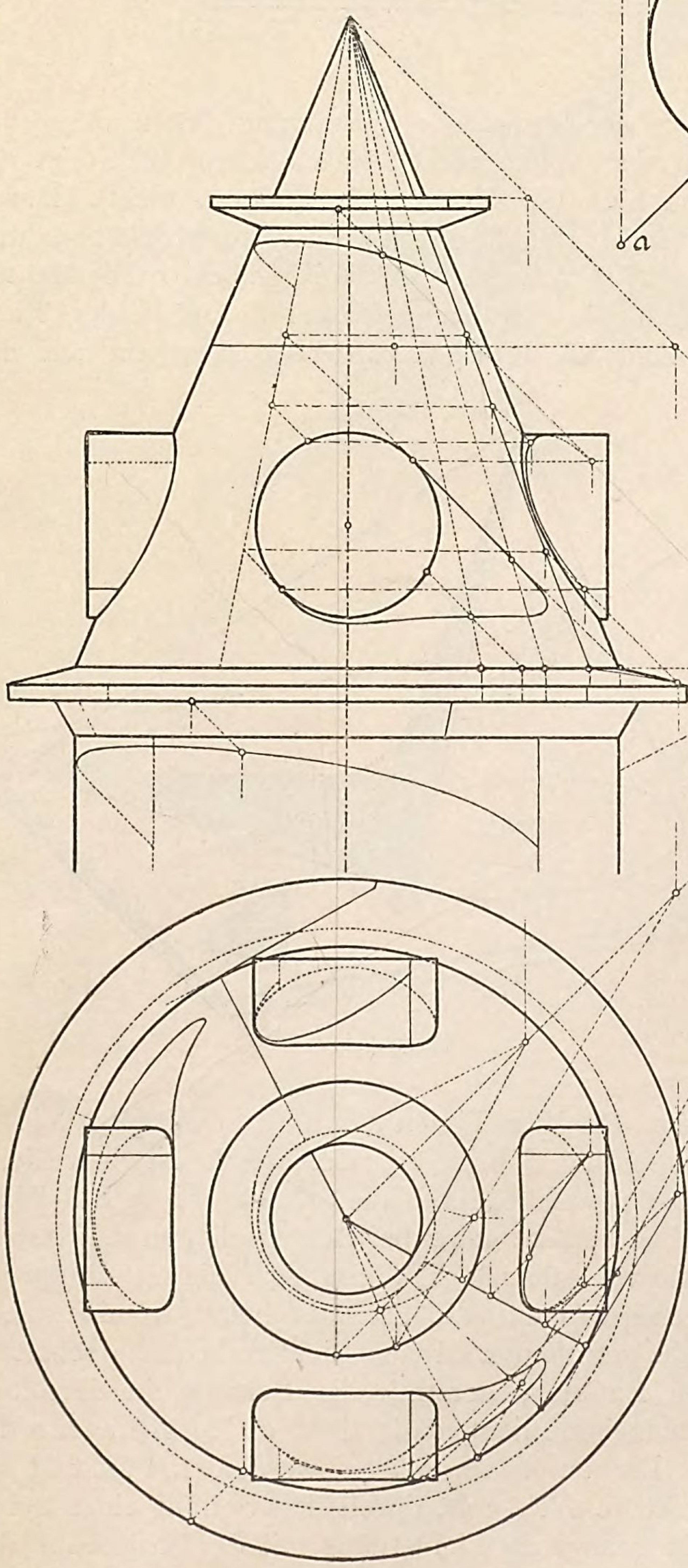
Wenn die Kegelfläche keine Basisebene hat, das heisst, nicht durch eine ebene Kurve begrenzt ist, wie etwa in Figur 46b, so ist zum Zwecke der Anwendung der Lösung eine beliebige geeignete Schnittebene des Kegels als dessen Basisebene einzuführen.

Noch ist hervorzuheben, dass es in besonderen Fällen zweckmässig sein kann, die gerade Kreiskegelfläche, voll oder hohl, mit Achse senkrecht zu einer Grundebene, als Drehungsfläche aufzufassen und zu schattieren. Dies gilt besonders dann, wenn das in Art. 61 für Schlagschatten auf Drehungsflächen beschriebene Verfahren mit Parallelkreisschnitten und den kongruenten Schatten auf deren Ebenen Anwendung finden kann. So liesse sich z. B. der Schlagschatten auf der in Art. 45 behandelten, in die Vertikalebene vertieften Kreiskegelfläche in dieser Weise erhalten. Sogar der schiefe Kreiskegel kann nach diesem Verfahren schattiert werden; er ist dann als eine der in Art. 75 behandelten „Rückungsflächen" aufgefasst. Die Konstruktion liefert aber in allen Fällen nur Schlagschattengrenzen, so dass die (einfache) Bestimmung der Körperschattengrenzen doch den zuvor angegebenen Weg einschlagen muss.

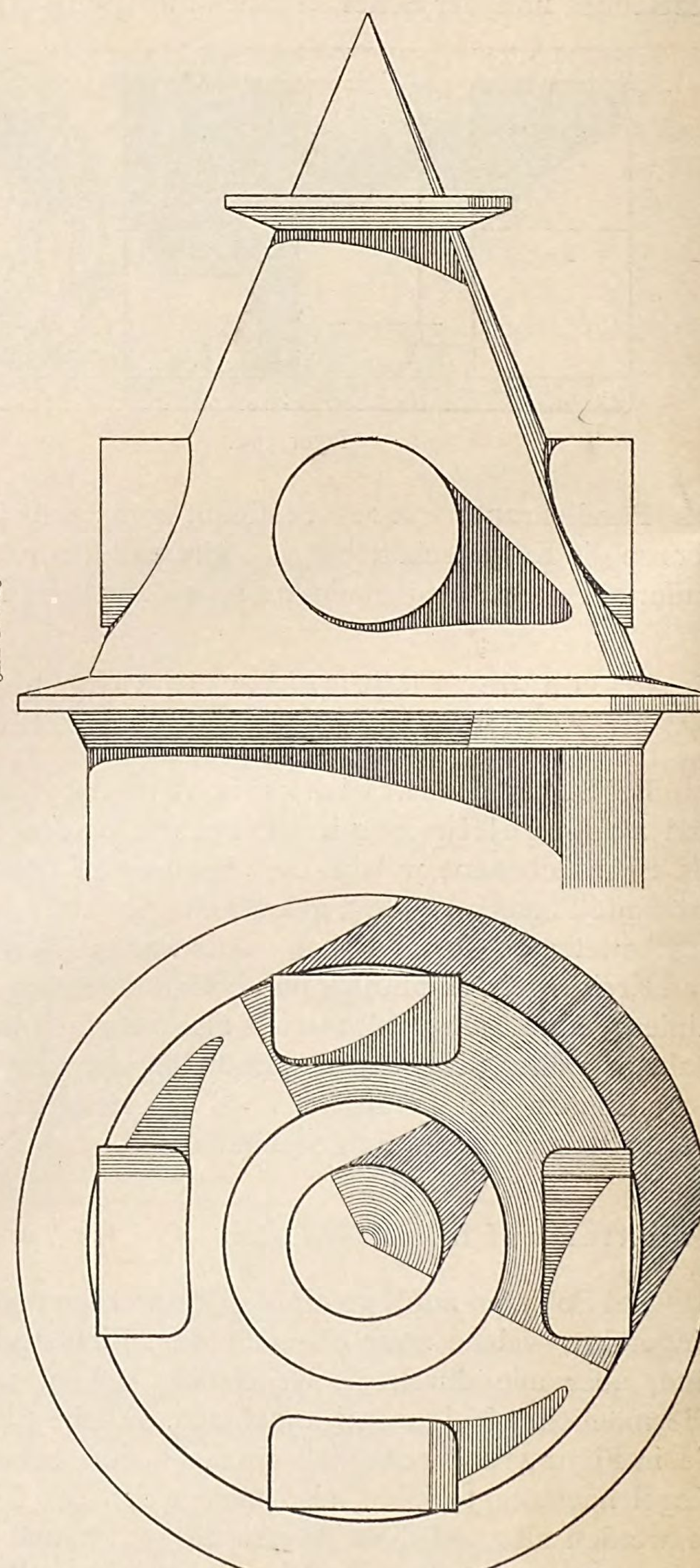
Im folgenden ist die Anwendung des zuvor beschriebenen, für alle Arten von Schattengrenzen und Kegelflächen brauchbaren Verfahrens auf einige besondere Fälle erklärt, und zwar ist je



Figur 42 a.



Figur 42 b.



Figur 42 c.

die Körperschattengrenze und der Schlagschatten eines äusseren Punktes oder eines Randpunktes gesucht.

42. Der vertikale Kreiskegel mit Spitze nach oben.

Figur 42 a. Durch Ziehen des Lichtstrahls aus der Kegelspitze *cc'* bis zum Schnitt mit der erweiterten Basisebene, hier der horizontalen Grundebene, erhält man den Schlüsselpunkt *k*, ebenso durch Ziehen des Lichtstrahls aus dem schattenwerfenden Punkt *aa'* bis zur erweiterten Basisebene den Punkt *p* im Grundriss. Aus *k* zieht man im Grundriss die zwei Tangenten an die Kegelbasis; die Mantellinien durch die Berührungspunkte *c b* und *c d* sind mit dem gegen *k* gerichteten Stück *d b* der Basislinie die Körperschattengrenze im Grundriss; das Hinaufloten von *b* und *d* nach *b'* und *d'* liefert die schattenabgrenzenden Mantellinien auch im Aufriss. — Die Sekante *k p* im Grundriss liefert als Schnittpunkte mit der Kegelbasis *m* und *n* und dadurch die Mantellinien *c m* und *c n* im Grundriss und Aufriss. Nur die erste ist dem Lichtstrahl zugewendet; wo sie getroffen wird vom Lichtstrahl, nämlich in *ss'*, da ist der Schlagschatten des Punktes *aa'*. Die zweite Mantellinie *c n* bleibt ohne Verwendung; sie enthält den Punkt, in dem der verlängert gedachte Lichtstrahl den Kegel wieder verlassen würde.

Probe: Die beiden Projektionen des Schlagschattenpunktes *s* und *s'* müssen vertikal übereinander liegen.

(Zuweilen kann man auch anstatt des Punktes *p* den Schnittpunkt benützen, den die Verbindungslinie der Kegelspitze und des schattenwerfenden Punktes mit der Basisebene liefert. Durch diesen Punkt ist dann die Sekante zu ziehen; sie ist identisch mit derjenigen durch *p*. Meist fällt jedoch dieser neue Hilfspunkt zu fern.)

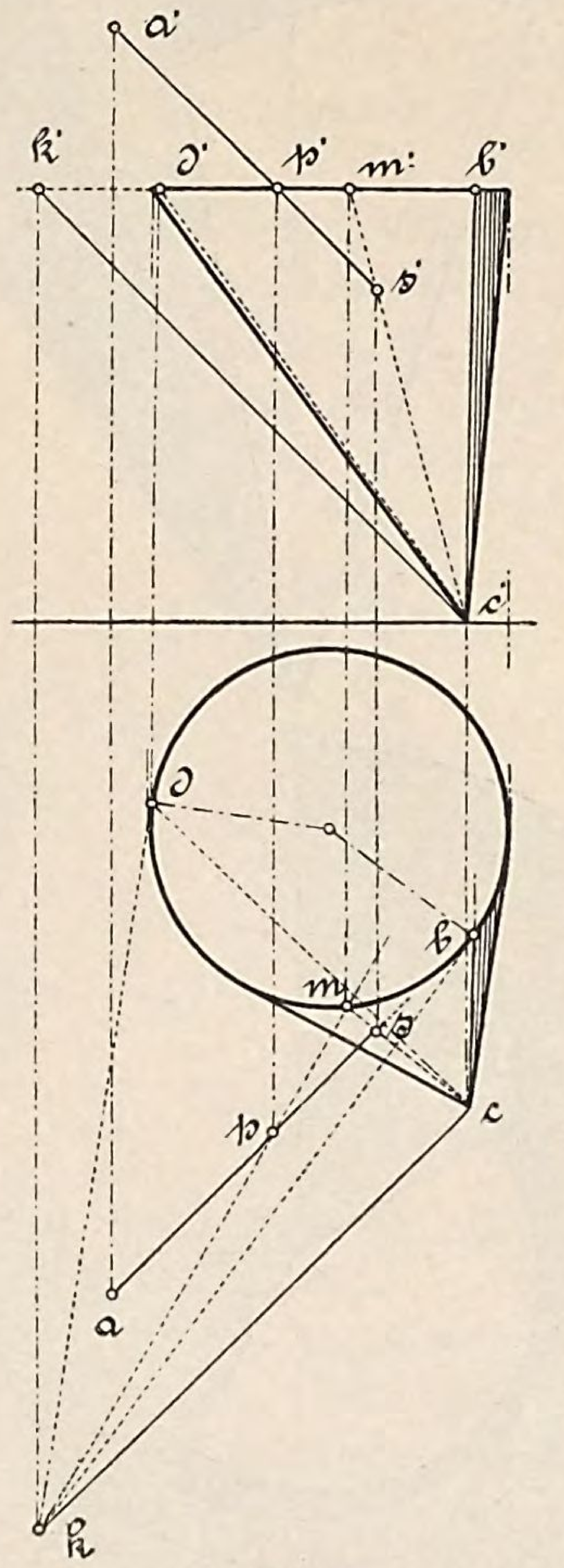
Die Figuren 42 b und 42 c bieten ein Beispiel für die oftmalige Anwendung der zuvor beschriebenen Konstruktion. Ein Punkt der Schnittlinie zwischen einem der horizontalen Cylinder und dem Kegeldach wird erhalten, indem man in beliebiger Höhe einen Horizontalschnitt geführt denkt. Der Punkt erscheint dann zuerst im Grundriss als Schnitt eines Parallelkreises der Kegelfläche mit einer Mantellinie des Cylinders.

Die Bestimmung des Schlagschattens, welchen die Cylinderrandlinie auf die Kegelfläche wirft, ist aus den eingezeichneten Konstruktionslinien deutlich und nur die Wiederholung des mit Figur 42 a Erklärten.

Um den Schlagschatten des Kegeldaches auf den in der Seitenansicht und Oberansicht erscheinenden Cylinderflächen zu bestimmen, ist die Vorderansicht des mittleren Cylinders als Seitenprojektion des rechts liegenden aufgefasst und die Körperschattengrenze des Kegels dieser Seitenprojektion beigefügt (in der Mantellinie links von der Achse). Die Konstruktion gestaltet sich hierauf ganz wie in Art. 25; einige der Parallelogramme sind eingezeichnet.

43. Der schiefe Kreiskegel mit Spitze nach unten.

Figur 43 a. Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze *c c'* ist hier rückwärts zu ziehen, um im Aufriss als Schnitt mit der verlängerten Projektion der Basis den Punkt *k'* und durch dessen Hinunterloten auf die Lichtstrahlprojektion im Grundriss den Schlüsselpunkt *k* zu erhalten. Die Berührungspunkte *b* und *d* der im Grundriss aus *k* gezogenen Tangenten an den Basiskreis liefern die körperschattenabgrenzenden Mantellinien *c b* und *c d*, die durch



Figur 43 a.

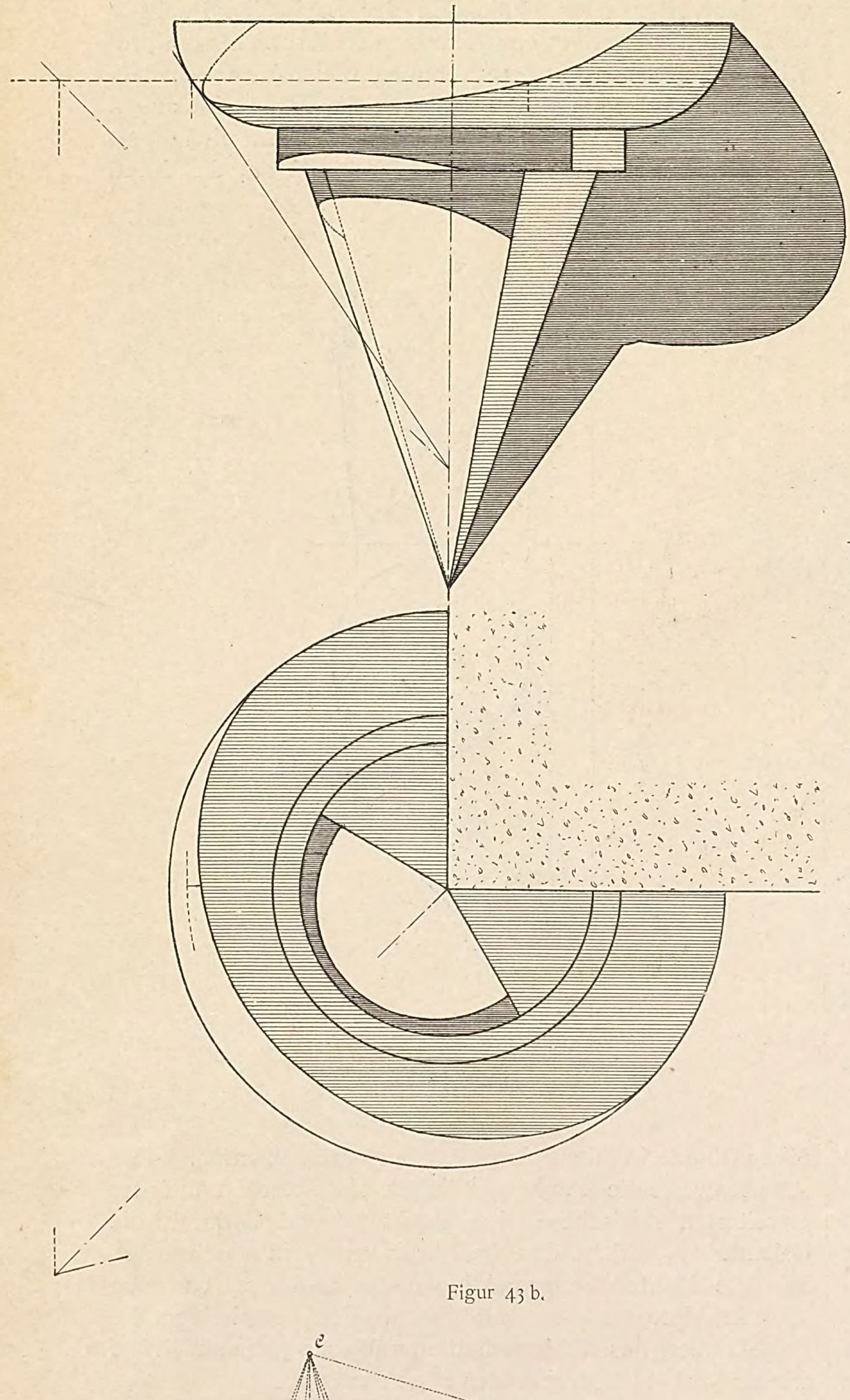
Hinaufloten in den Aufriss übertragen werden. Der schattenwerfende Punkt *aa'* liefert als Schatten auf der erweiterten Basisebene den Punkt *pp'* und dadurch die Sekante *kp*, welche den Basiskreis zuerst in *m* schneidet. Wo die Mantellinienprojektionen *c m* und *c' m'* von den Lichtstrahlprojektionen getroffen werden, erscheinen die Projektionen des Schlagschattenpunktes *ss'*, die zur Probe wieder vertikal übereinander liegen müssen.

In Figur 43 b ist ein Beispiel für die Anwendung der Konstruktion auf den geraden Kegel gezeichnet.

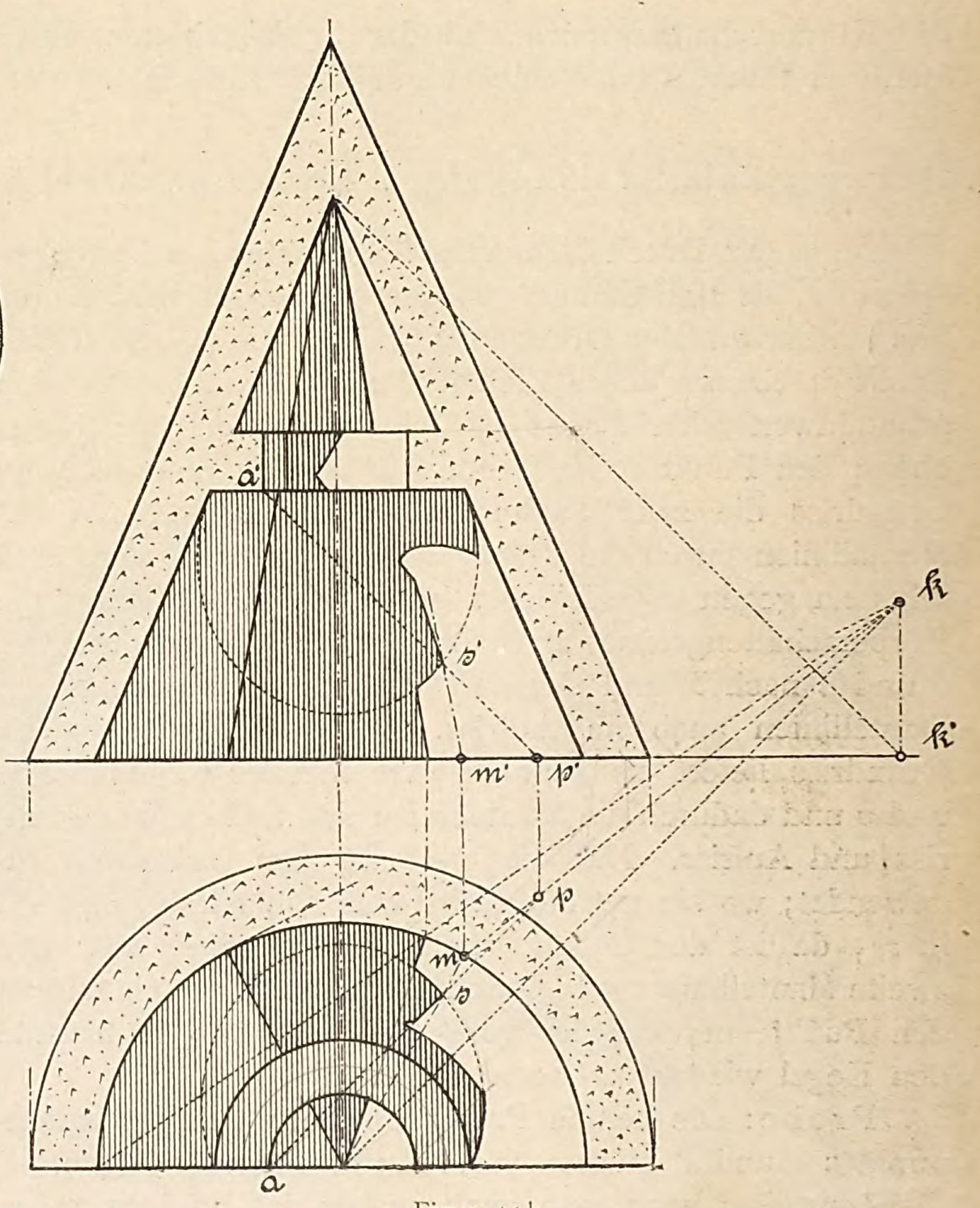
Der vertikalstehende hohle Kegel. 44.

Selbstbeschattung eines Kegelrumpfes; Figur 44 a als perspektivische Darstellung der Konstruktion.

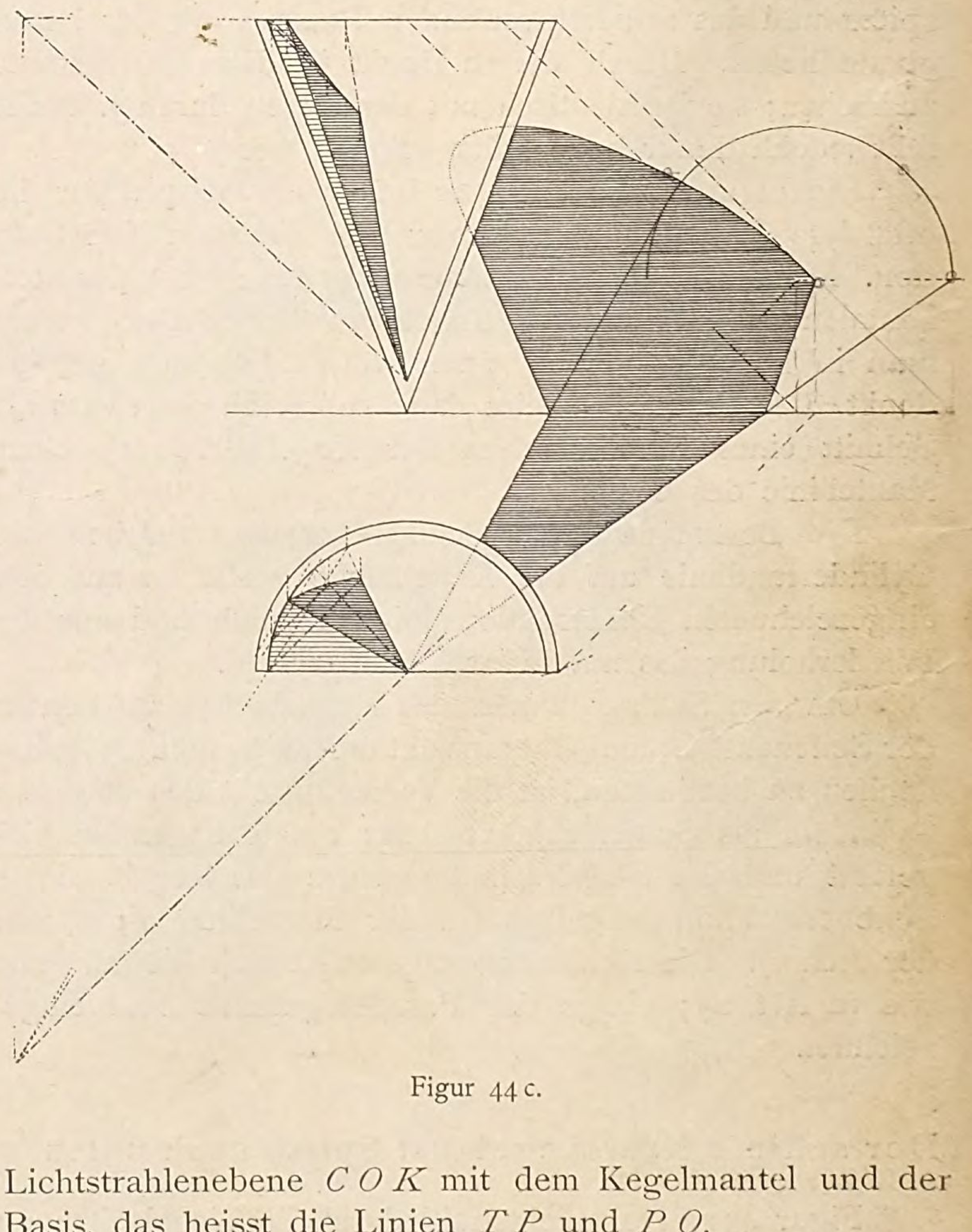
Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze *C* liefert als Schnitt mit der erweiterten Basisebene den Schlüsselpunkt *K*; die Tangente aus diesem berührt den Basiskreis in *B* und ergiebt die Körperschattengrenze *B D*. Um die Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung zu erhalten, zieht man die Sekanten *K N*, *K O* u. s. w. samt den Mantellinien durch die Basisschnittpunkte *C M*, *C N*, *C P* u. s. f. Der Lichtstrahl durch *A* liefert den Schatten-



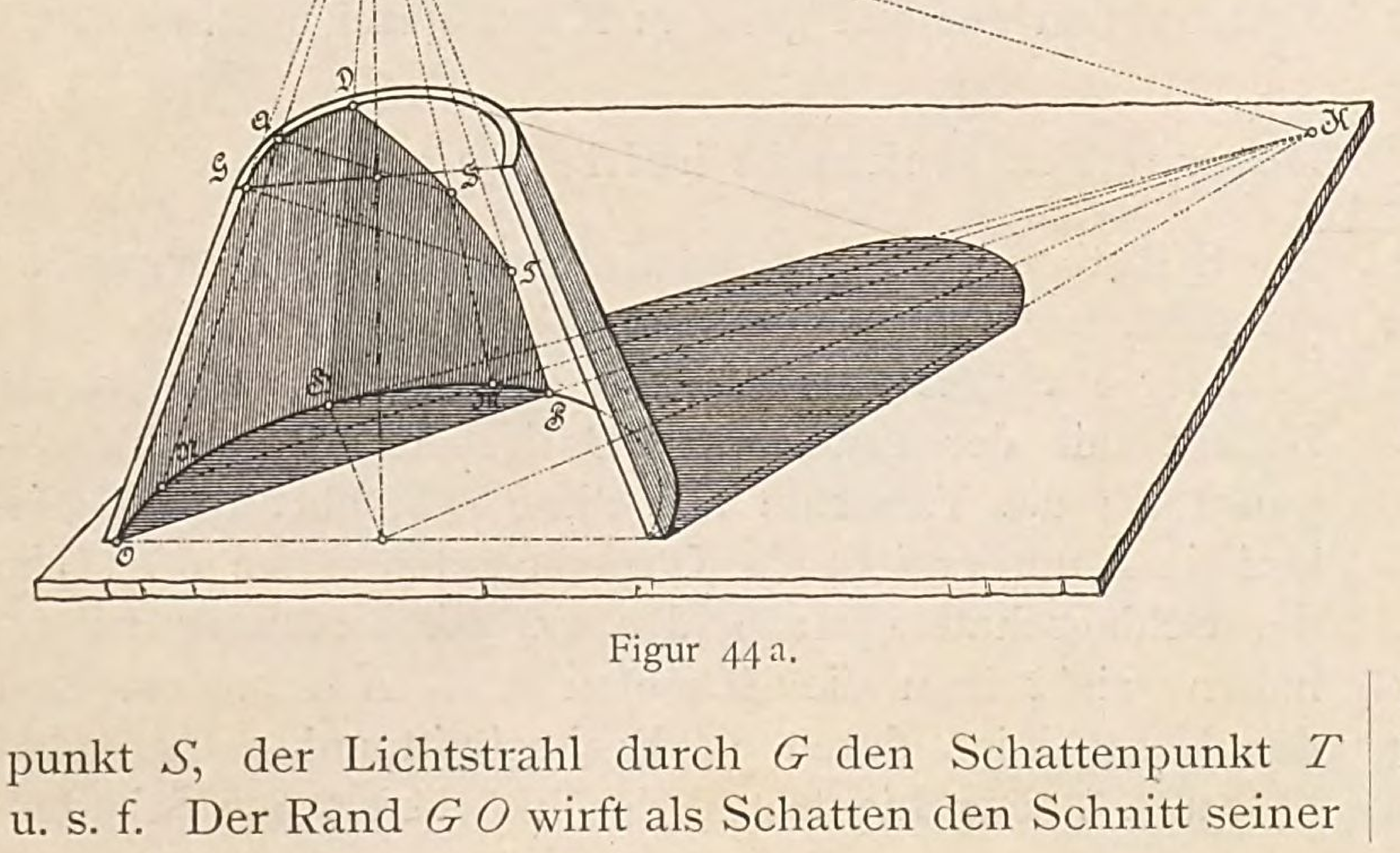
Figur 43 b.



Figur 44 b.



Figur 44 c.



Figur 44 a.

punkt S, der Lichtstrahl durch G den Schattenpunkt T u. s. f. Der Rand $G\,O$ wirft als Schatten den Schnitt seiner Lichtstrahlenebene $C\,O\,K$ mit dem Kegelmantel und der Basis, das heisst die Linien $T\,P$ und $P\,O$.

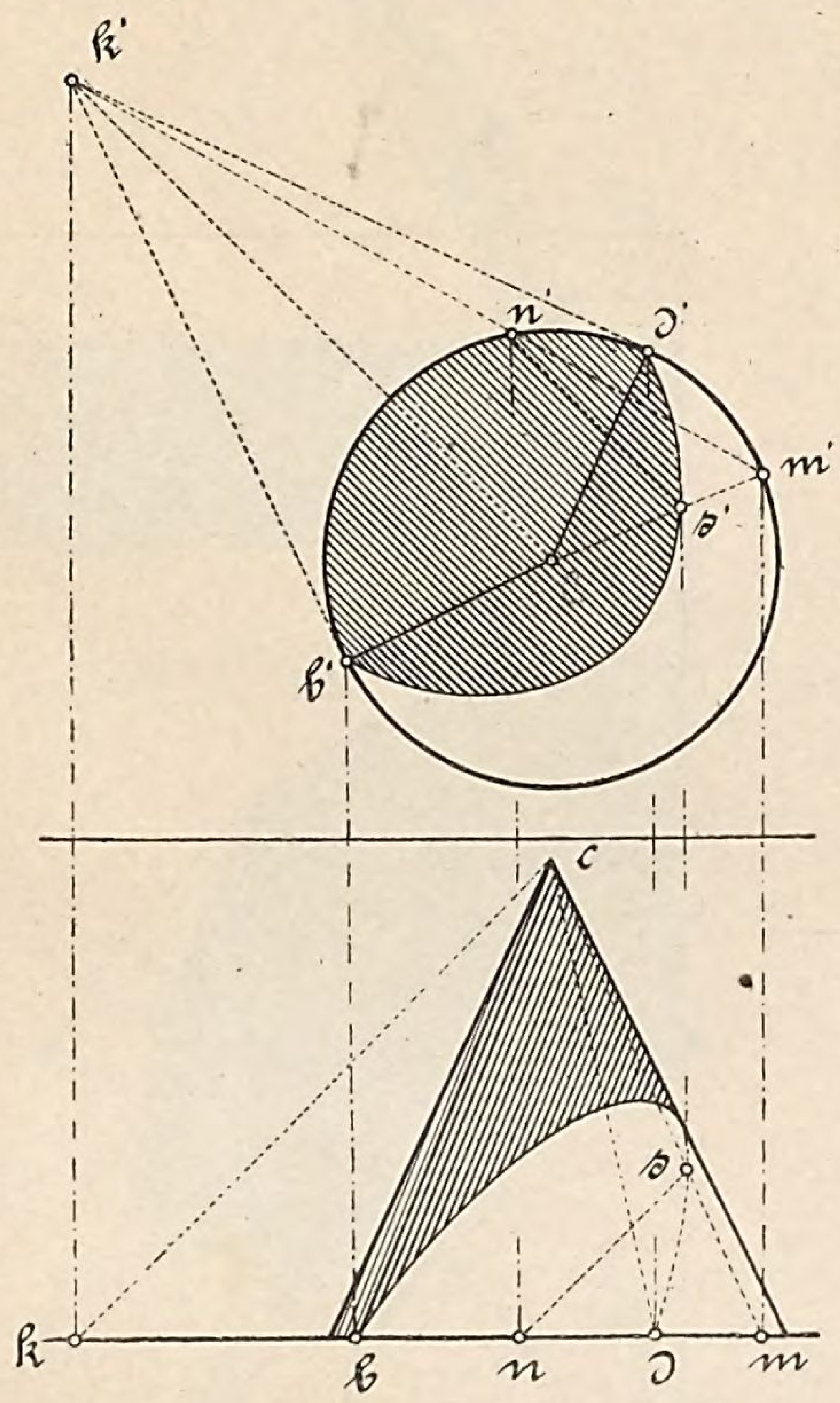
Figur 44 b bietet ein schwierigeres hieher gehöriges

Beispiel mit Spitze des Kegels nach oben, Figur 44c ein einfacheres mit Spitze nach unten.

45. Der gerade Kreiskegel senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in die Vertikalebene.

Gesucht die Selbstbeschattung; Figur 45.

Der Lichtstrahl durch *cc'* ist hier rückwärts zu ziehen, um den Schnittpunkt mit der Basisebene *kk'* zu erhalten. Aus *k'* sind die Tangenten an den Basiskreis gezogen; die Berührungspunkte *b'* und *d'* liefern die schattenabgrenzenden Mantellinien *c' b'* und *c' d'* im Aufriss; Hin-



Figur 45.

unterloten der Punkte *b'* und *d'* liefert sie im Grundriss. Um den Schlagschatten des Randpunktes *nn'* zu erhalten, zieht man aus *k'* die Sekante durch diesen Randpunkt bis zum zweiten Schnitt mit der Kegelbasis in *m'*. Der Schattenpunkt *s'* erscheint als Schnitt des Lichtstrahls durch *n'* mit der Mantellinie *c' m'*. Das Hinunterloten der Punkte *n'* und *m'* liefert *s* im Grundriss samt der in den früheren Fällen erwähnten Probe.

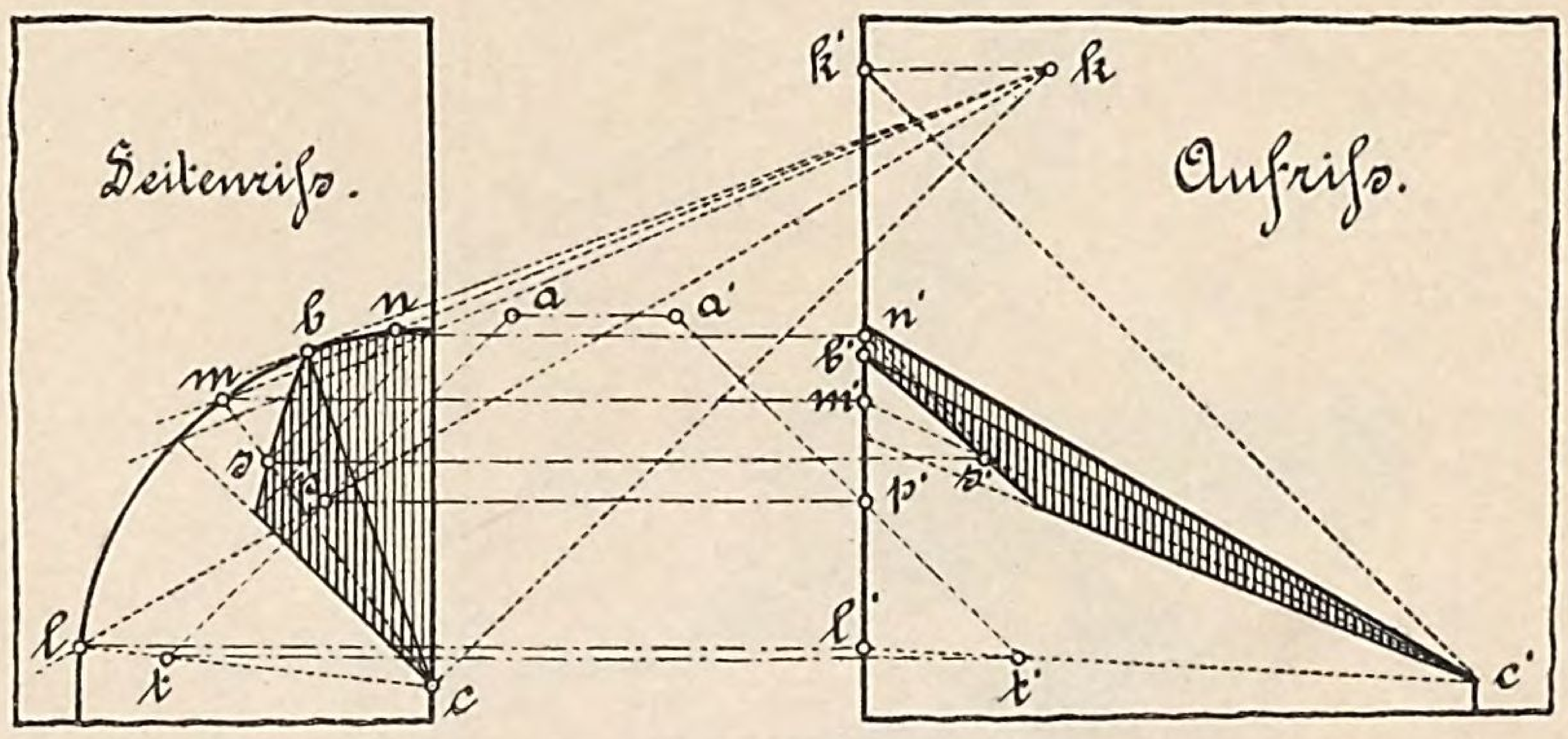
Eine zweite Lösung für die Schlagschattengrenze ist oben am Schluss von Art. 41 erwähnt.

46. Die hohle Kegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt.

Eine gerade hohle Kreiskegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt erscheint im Längenschnitt. Gesucht die Selbstbeschattung. Figur 46a.

Schon zur unzweideutigen Darstellung der Fläche ist die Seitenprojektion notwendig; man braucht sie wie bei Cylindern parallel zum Grundschnitt auch für die Schattenkonstruktion. Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze *cc'* ist rückwärts zu ziehen, um den Schnitt *kk'* mit der Kegelbasisebene zu liefern. Aus *k* in der Seitenprojektion ist die Tangente an die Kegelbasis zu ziehen, woraus die schattenabgrenzende Mantellinie *b c* erhalten wird, ferner durch den schattenwerfenden Randpunkt *n* der Basis die Sekante *k m*. Der Schnitt des durch *n* gezogenen Lichtstrahls mit der Mantellinie *c m* liefert den Schattenpunkt *s*. Hinüberliniieren in den Aufriss ergiebt die Punkte *n'*, *m'*, *s'* und die Probe für *ss'*, indem beide Punkte gleich hoch liegen müssen.

Zur Bestimmung des Schlagschattens eines äusseren Punktes *aa'* ist in jeder Projektion der Lichtstrahl durch *aa'* gezogen, dessen Schnittpunkt mit der Basisebene im Aufriss *p'* hinüberliniiert auf den Seitenriss des Licht-



Figur 46a.

strahls nach *p*, die Sekante *k p* bis zum Schnitt mit der Basislinie in *l* gezogen und nach *l'* hinüberliniiert. Die Schnittpunkte der durch *aa'* gezogenen Lichtstrahlprojektionen mit den Mantellinienprojektionen *c l* und *c l'* geben die Projektionen des Schlagschattenpunktes *tt'*.

In Figur 46b ist als hieher gehöriges Beispiel aus der praktischen Baukunst ein Stichkappengewölbe mit kegelförmiger Leibung, einschneidend in ein Tonnengewölbe, im Längenschnitt und in der Vorderansicht gezeichnet. Die Leibung oder Mantelfläche der Kappe ist erzeugt gedacht durch eine Gerade, die an dem halbkreisförmigen Stirnbogen *e f* gleitet und immer durch einen in der Achse des Bogens liegenden äusseren Punkt *c* geht. Zeichnet man eine beliebige Lage der Geraden im Längenschnitt und in der Vorderansicht, so erscheint ihr Schnittpunkt mit der cylindrischen Gewölbfläche unmittelbar im Längenschnitt und kann von dort auf die Vorderansicht der Geraden hinüberliniiert werden, womit ein Punkt der gewundenen Schnittlinie beider Gewölbflächen auch in der zweiten Projektion gefunden ist.

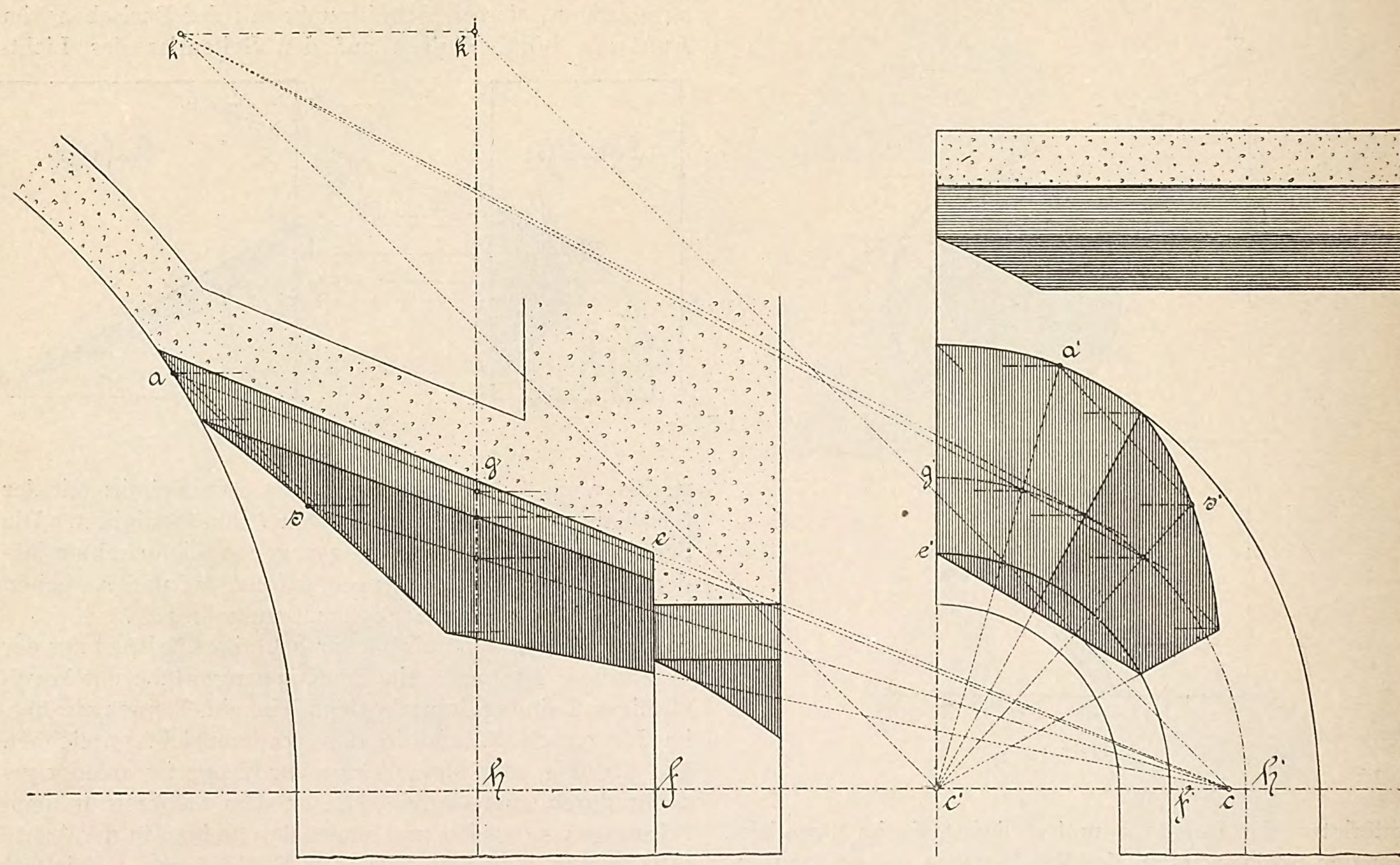
Zur Schattenkonstruktion nimmt man eine beliebige, zur Stirnbogenebene parallele Ebene *g h* als Basisebene der Kegelfläche an (auch die Stirnbogenebene selbst könnte als solche angenommen werden). In der Vorderansicht erscheint dann der Viertelskreis *g' h'* als Basislinie. Nachdem wie bei Figur 46a der Schlüsselpunkt *k'* bestimmt ist, gestaltet sich die Konstruktion des Schlagschattens, den ein Randpunkt *aa'* auf die Kappenfläche selber wirft, ganz wie in früheren Fällen. Die Mantellinie durch *aa'* schneidet den Viertelskreis *g' h'* in einem Punkt. Durch diesen ist eine Sekante aus *k'* gezogen, die den Viertelskreis zum zweitenmal schneidet. Auf der Mantellinie durch

diesen zweiten Schnittpunkt liegt der Schattenpunkt *ss'*. Eine Probe ergiebt sich, indem *s* und *s'* auf einer Horizontalen liegen müssen.

47. Die beliebig gerichtete Kegelfläche mit beliebig gestalteter, schiefgerichteter Basis.

Figur 47. Bei der gegebenen Stellung der Fläche ist der Lichtstrahl durch die Kegelspitze *cc'* rückwärts zu ziehen, um einen Schnitt mit der Basisebene zu erhalten. Da sich die Basis weder im Aufriss noch im Grundriss als gerade Linie projiziert, so gestaltet sich das Aufsuchen der Punkt *f* seinen Schlagschatten *t* wirft. Die Kante *fc* wirft ihren Schlagschatten auf *tc*, welche Linie also der Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung angehört; für das gekrümmte Stück Schattengrenze zwischen *b* und *t* finden sich Zwischenpunkte durch weitere Sekanten aus *k* zwischen *b* und *f*. Alle Punkte können auch unmittelbar im Aufriss erhalten werden durch Ziehen der Tangenten und Sekanten aus *k'*, wodurch Proben in dem vertikalen Uebereinanderliegen der zwei Projektionen jedes Schattenpunktes erwachsen.

Um den Schlagschatten eines aussenliegenden Punktes *aa'* auf der Kegelfläche zu erhalten, ist der Schnittpunkt



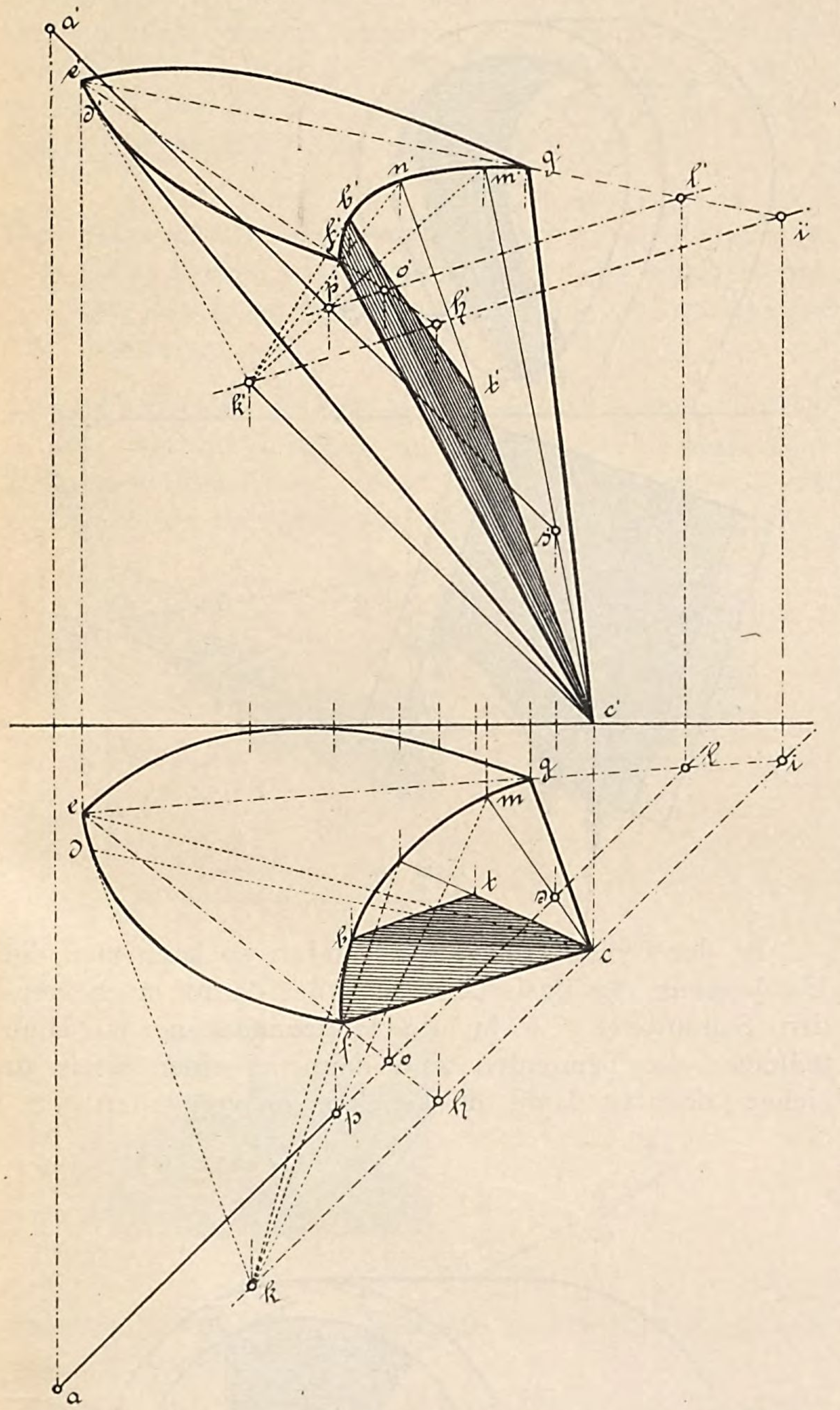
Figur 46b.

des Schnittpunktes minder einfach als in den früheren Fällen. Man zieht auf der gegebenen Basis zwei geeignete gerade Linien *eg* und *ef*, welche im Grundriss den durch *c* gezogenen Lichtstrahl in *i* und *h* schneiden. Das Hinaufloten dieser Punkte auf die Vertikalprojektionen der beiden Geraden nach *h'* und *i'* liefert in der Linie *i' h'* die Schnittlinie der erweiterten Basisebene mit der vertikalen Ebene des durch *c* gezogenen Lichtstrahls. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Aufriss des durch *c'* gezogenen Lichtstrahls, da ist der Schnittpunkt dieses Lichtstrahls mit der Basisebene *k'*; das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls liefert den Schlüsselpunkt *k* im Grundriss, welcher zu benützen ist wie in den früheren Fällen. Die Berührungspunkte *b* und *d* der aus *k* gezogenen Tangenten liefern wieder die körperschattenabgrenzenden Mantellinien; die Sekante durch *f* liefert den Schnittpunkt *n* und damit die Mantellinie, auf welche *pp'* des Lichtstrahls durch diesen Punkt mit der Basisebene ganz in derselben Weise zu suchen wie für die Kegelspitze *cc'*. Der Grundriss des Lichtstrahls durch *a* schneidet die beiden auf der Basisebene gezogenen Hilfslinien *ef* und *eg* in *o* und *l*; das Hinaufloten dieser Punkte giebt die Linie *l' o'*, die vom Aufriss des durch *a'* gezogenen Lichtstrahls in *p'* geschnitten wird. Die Sekanten aus *k* und *k'* durch *p* und *p'* gezogen liefern die Schnittpunkte *m* und *m'*, auf deren Mantellinien die Projektionen des Schattenpunktes *s* und *s'* liegen müssen.

Schatten auf schiefgerichteten Cylinderflächen. 48.

Bei den schiefgerichteten Cylinderflächen werden anstatt der auf die Grundebenen projizierenden Ebenen des Lichtstrahls solche Schnittebenen eingeführt, welche sowohl zu den Mantellinien als zu den Lichtstrahlen parallel

sind, also wieder den Cylinder nicht nach Kurven, sondern nach Mantellinien schneiden oder berühren. Die Lösung des Problems, auf einer schiefgerichteten Cylinderfläche die Selbstschattengrenzen und den Schlagschatten



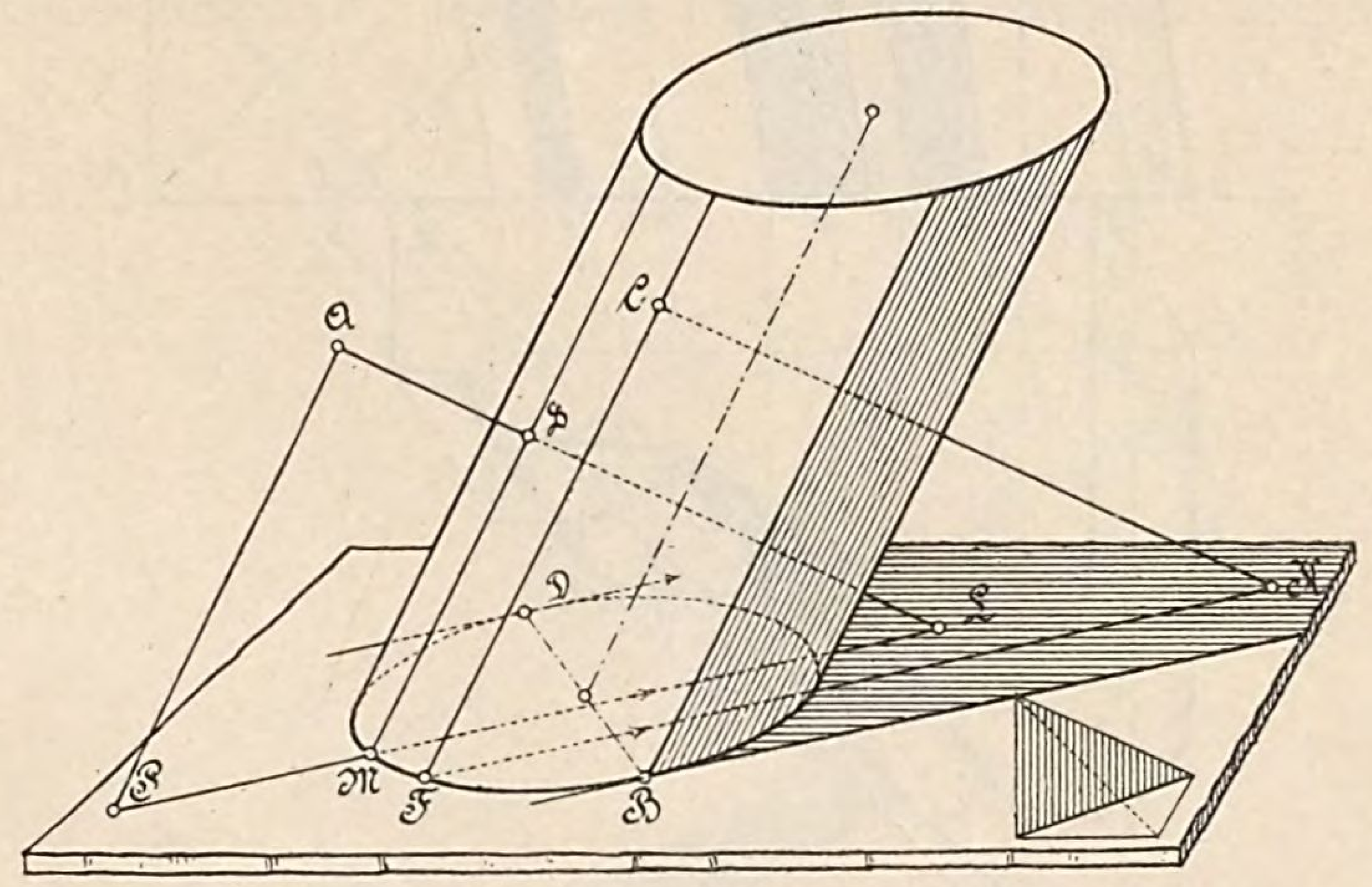
Figur 47.

eines äusseren Punktes zu suchen, gestaltet sich hienach allgemein wie folgt:

Man zieht (Figur 48) durch einen beliebigen Punkt *C* einer beliebigen Mantellinie einen Lichtstrahl bis zum Schnitt mit der erweitert gedachten Basisebene des Cylinders und verbindet den Schnittpunkt *K* mit dem Fusspunkt der Mantellinie *F*. Die Verbindungslinie *FK* ist die Schnittlinie der Basisebene mit der durch die Mantellinie gehenden Lichtstrahlenebene. Für die durch weitere Mantellinien gelegten Lichtstrahlenebenen würden sich parallele Schnittlinien auf der Basisebene ergeben, so dass die erhaltene Schnittlinie auch aufgefasst werden kann als eine Projektion der Lichtrichtung auf die Basisebene mit der Richtung des Cylinders als Projektionsrichtung.

Auch mit einem äusseren Punkt *A* anstatt des Mantellinienpunktes *C* lässt sich die Richtung erhalten, indem man durch den Punkt einen Lichtstrahl *AL* und eine Parallele *AP* zu den Mantellinien bis zum Schnitt mit der Basisebene zieht. *PL* ist wieder die Lichtrichtung in der Basisebene.

Diese Lichtstrahlrichtung auf der Basisebene bildet bei allen Aufgaben über schiefgerichtete Cylinderflächen den Schlüssel zur Lösung (ähnlich wie bei den Kegelflächen der Schnittpunkt des Lichtstrahls durch die Kegelspitze mit der Basisebene); sie wird benützt wie der gewöhnliche Lichtstrahlgrundriss beim vertikalen Kreiscylinder.



Figur 48.

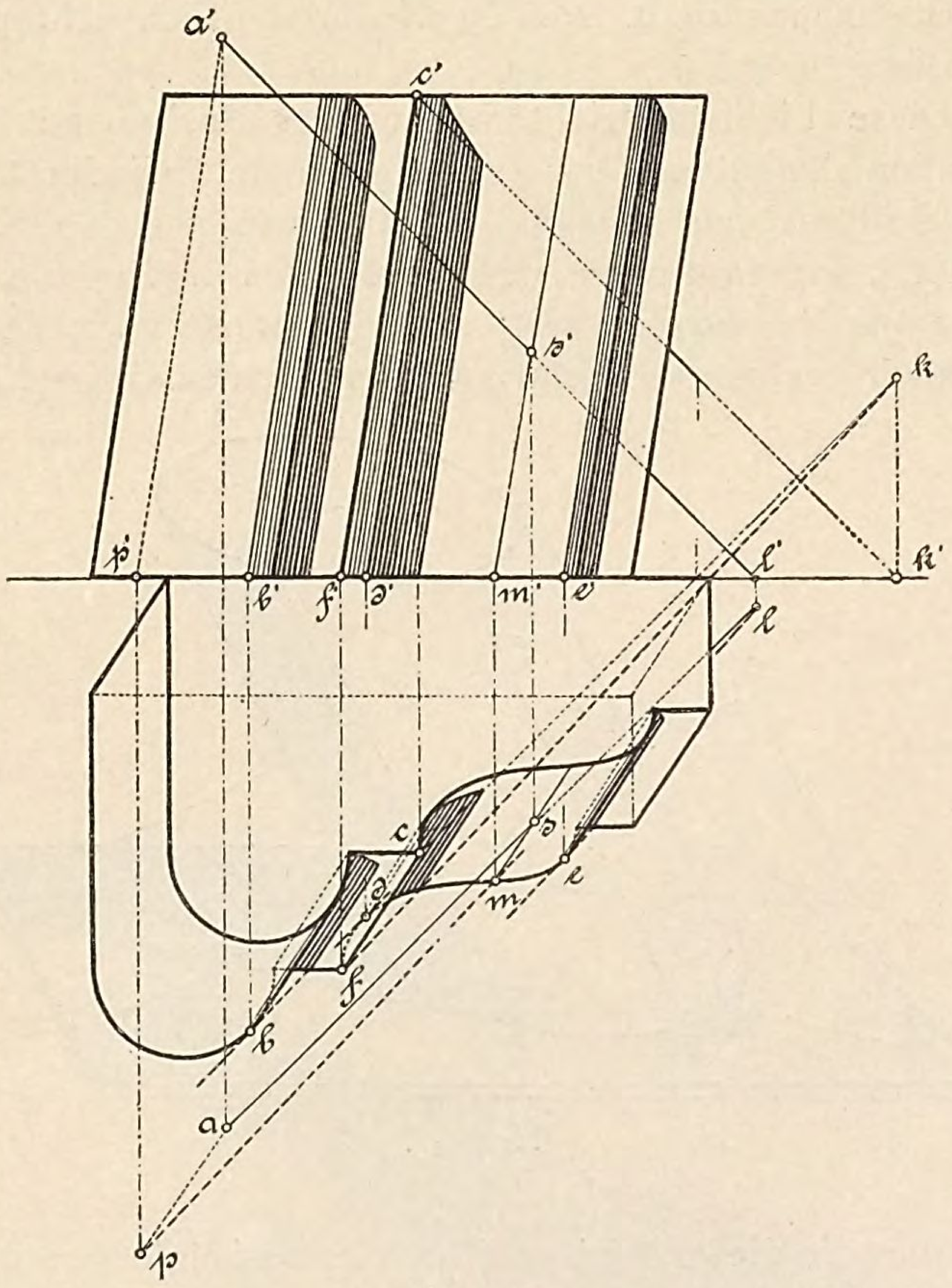
Wo die mit dieser Richtung an die Basislinie gezogenen Tangenten diese berühren, da sind die Fusspunkte *B* und *D* der körperschattenabgrenzenden Mantellinien. Wirft ein äusserer Punkt *A* einen Schlagschatten auf den Cylinder, so zieht man durch den Punkt eine Parallele zu den Mantellinien bis zum Schnitt *P* mit der Basisebene, mit andern Worten, man projiziert den schattenwerfenden Punkt in gleicher Weise auf die Basisebene, wie zuvor den Lichtstrahl selbst. Durch den erhaltenen Punkt zieht man eine Sekante *PL* in die Basislinie mit der in der Basisebene gültigen Lichtrichtung und erhält in dem Schnittpunkt zwischen Sekante und Basis den Fusspunkt *M* der Mantellinie, auf welcher der Schlagschattenpunkt *S* liegt.

Im folgenden, Art. 49 bis 54, sind einige besondere Fälle des schiefgerichteten Cylinders behandelt.

Der beliebig schiefgerichtete Cylinder mit Basis in einer Grundebene. 49.

In Figur 49 schneidet der Lichtstrahl durch den Mantellinienpunkt cc' die Basisebene, zugleich horizontale Grundebene, in k. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Fusspunkt der Mantellinie, fk im Grundriss, giebt die Richtung der Schnittlinien zwischen der Basisebene und den parallel zu den Mantellinien gelegten Lichtstrahlenebenen, mit andern Worten, die in der Basisebene gültige Lichtrichtung. Die drei Tangenten dieser Richtung geben in bb', dd' und ee' die Fusspunkte der schattenabgrenzenden Mantellinien. Durch den schlagschattenwerfenden Punkt aa' ist die Parallele zu den

Mantellinien gezogen bis zum Schnitt mit der Basisebene in pp'. Die Sekante pm parallel fk liefert in mm' den Fusspunkt der Mantellinie, auf welcher der Schlagschattenpunkt ss' liegen muss. Das vertikale Uebereinanderliegen



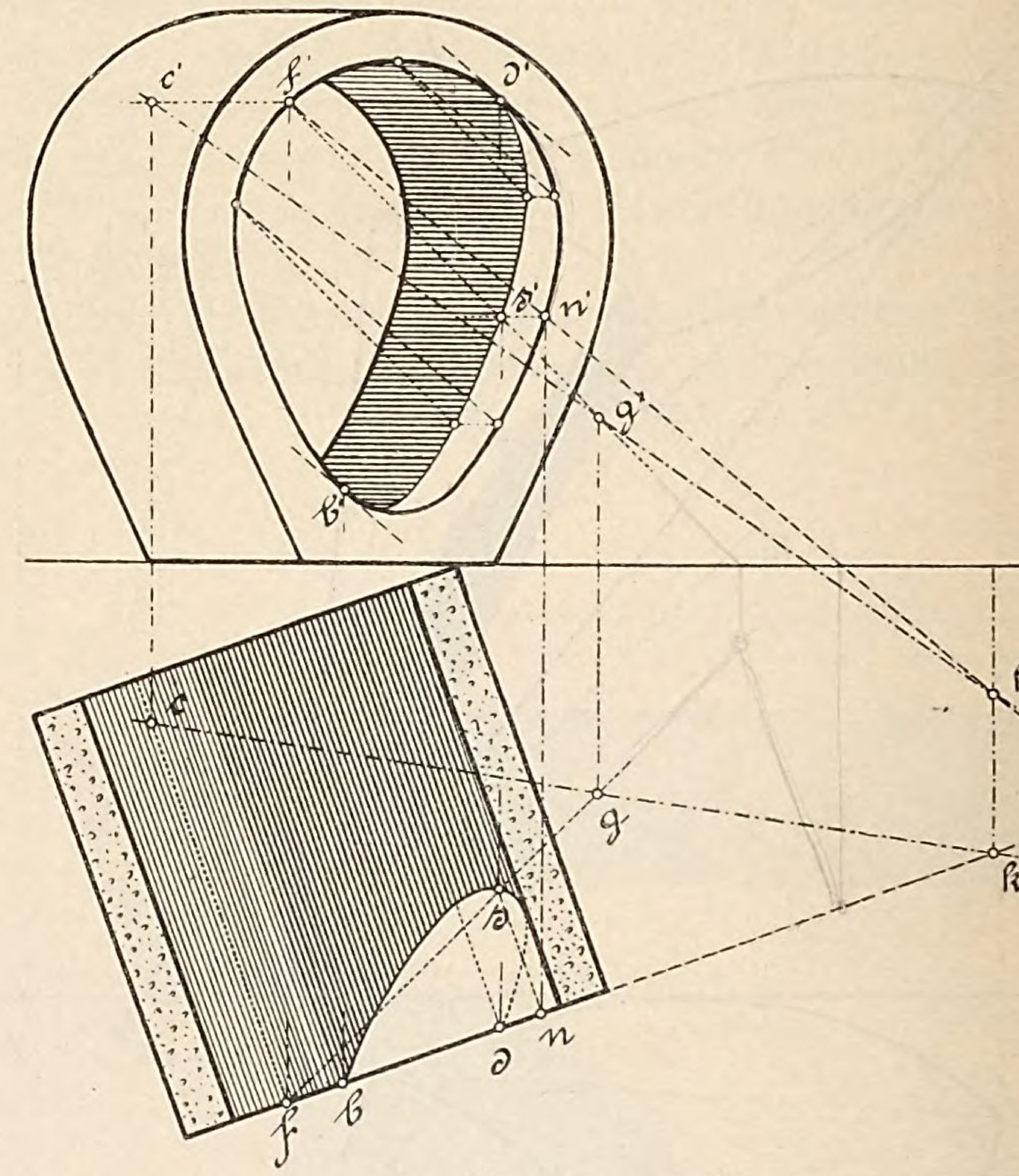
Figur 49.

der Punkte s und s' giebt eine Probe. — Anstatt durch cc' hätte man auch durch aa' allein einen Lichtstrahl bis ll' und eine Parallele zu den Mantellinien bis pp' ziehen können, um in pl die Lichtrichtung in der Basisebene zu erhalten.

50. Der horizontale gerade Cylinder schief gerichtet (wagrecht liegende Röhre).

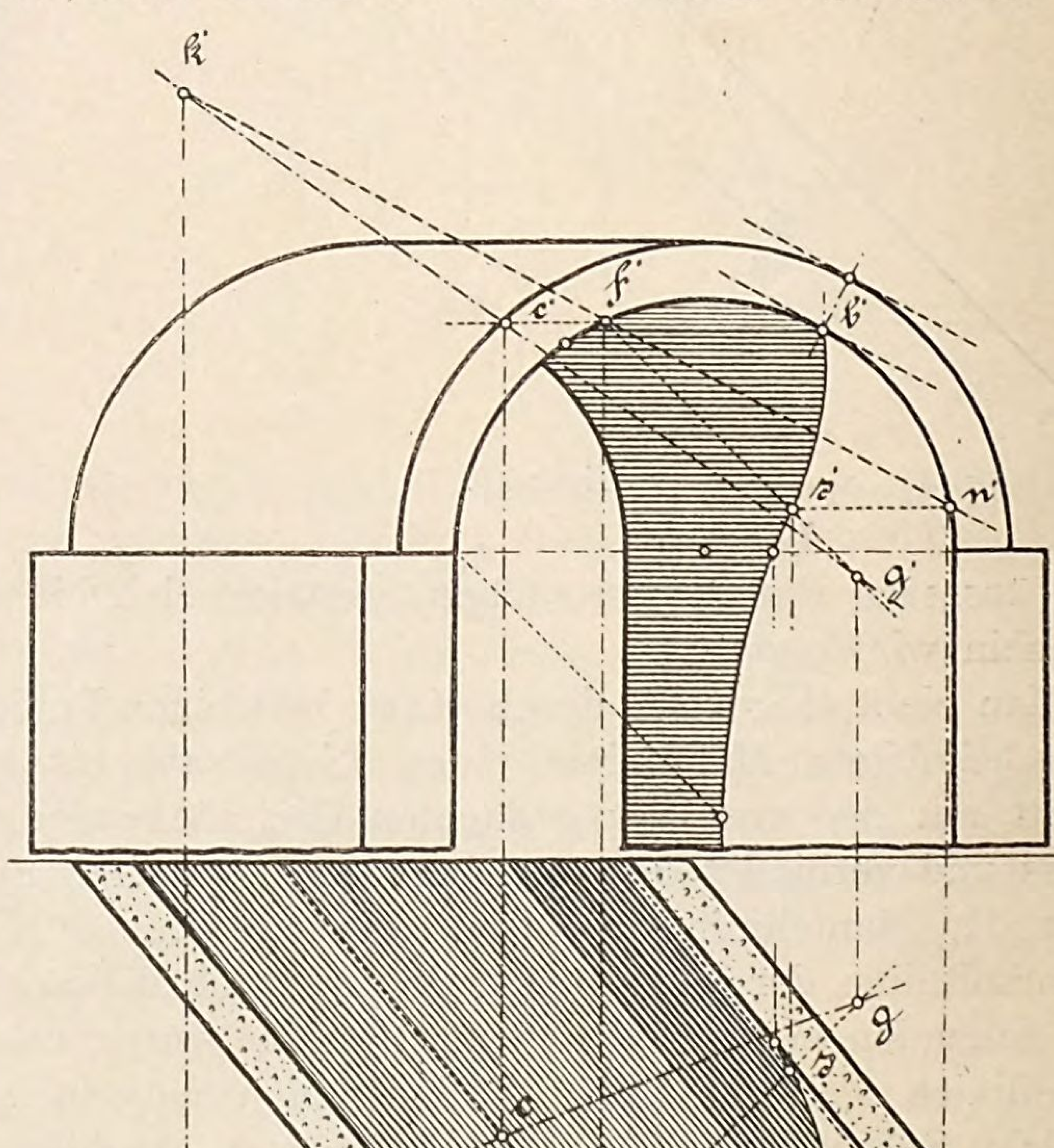
In Figur 50 liegt ein schiefgerichteter Cylinder, als Röhre beliebigen Querschnitts gedacht, auf der Horizontalebene. Selbstbeschattung und Körperschattengrenzen bestimmen sich wie folgt:

Man zieht durch einen schattenwerfenden Randpunkt ff' eine Mantellinie und einen Lichtstrahl, nimmt auf jeder dieser Linien einen beliebigen Punkt an und zieht die Verbindungslinie dieser Punkte cg bis zum Schnitt mit der (vertikalen) Basisebene des Cylinders in k, woraus im Aufriss auf $c'g'$ der Punkt k' erhalten wird. $f'k'$ ist im Aufriss die in der Basisebene gültige Lichtrichtung. Diese Linie schneidet die Basislinie in einem zweiten Punkt n'. Wo die Mantellinie durch n' getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls durch f', da ist der Schlagschatten s' des Punktes f'. Der zugehörige Grundrisspunkt s findet sich durch Hinunterloten auf den Lichtstrahl fg; das Zeichnen der Mantellinie durch n auch im Grundriss liefert eine Probe. Für weitere Randpunkte ist immer nur eine Sehne parallel $f'n'$ zu ziehen, um die Mantellinie für den Schlagschatten des ausgewählten Randpunktes zu erhalten. Die Körperschattengrenzen sind die Mantellinien durch die Berührungspunkte b' und d' der Tangenten, die parallel zu $f'k'$ an beide Basislinien gezogen werden.



Figur 50.

Ist der Cylinder ein Kreiscylinder, so kann man die Umklappung der Basisebene samt der darauf erscheinenden Schnittlinie $f'k'$ in die Horizontalebene zu Hilfe nehmen; die Tangenten sind dann an einen Kreis zu ziehen; doch ist damit die Arbeit kaum vermindert.



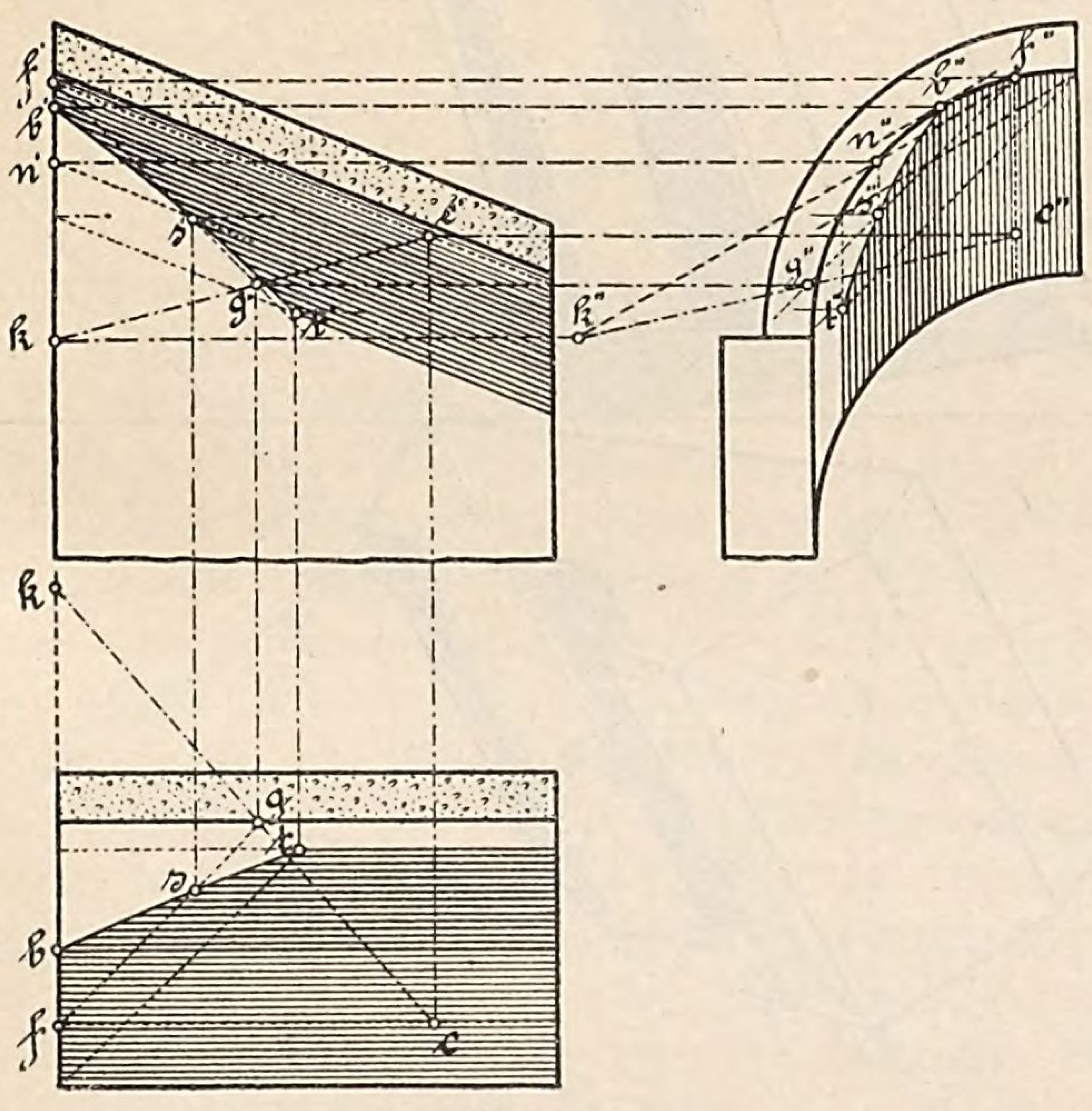
Figur 51.

51. Der horizontale Cylinder schief abgeschnitten (schiefes Tonnengewölbe).

Die Konstruktion der Schattengrenzen, die auf die cylindrische Leibungsfläche des Gewölbs fallen, ist ganz mit denselben Worten, angewendet auf Figur 51, beschrieben wie in Art. 50. Ein Teil des Schattens der Stirnbogenlinie fällt auf die vertikale Leibungsebene des Widerlagers und bestimmt sich einfach nach Art. 22.

52. Der schiefgerichtete Cylinder parallel zur Vertikalebene, vertikal und gerade abgeschnitten (steigendes Tonnengewölbe im Längenschnitt).

Man zeichnet (Figur 52) die Seitenprojektion des Gewölbes, wie sie ja schon zu dessen unzweideutiger Darstellung notwendig ist. (Hier ist sie als Ansicht von der rechten Seite der Aufrissfigur dargestellt, wobei der Lichtstrahl in der Seitenprojektion von rechts oben nach links unten gerichtet ist.)



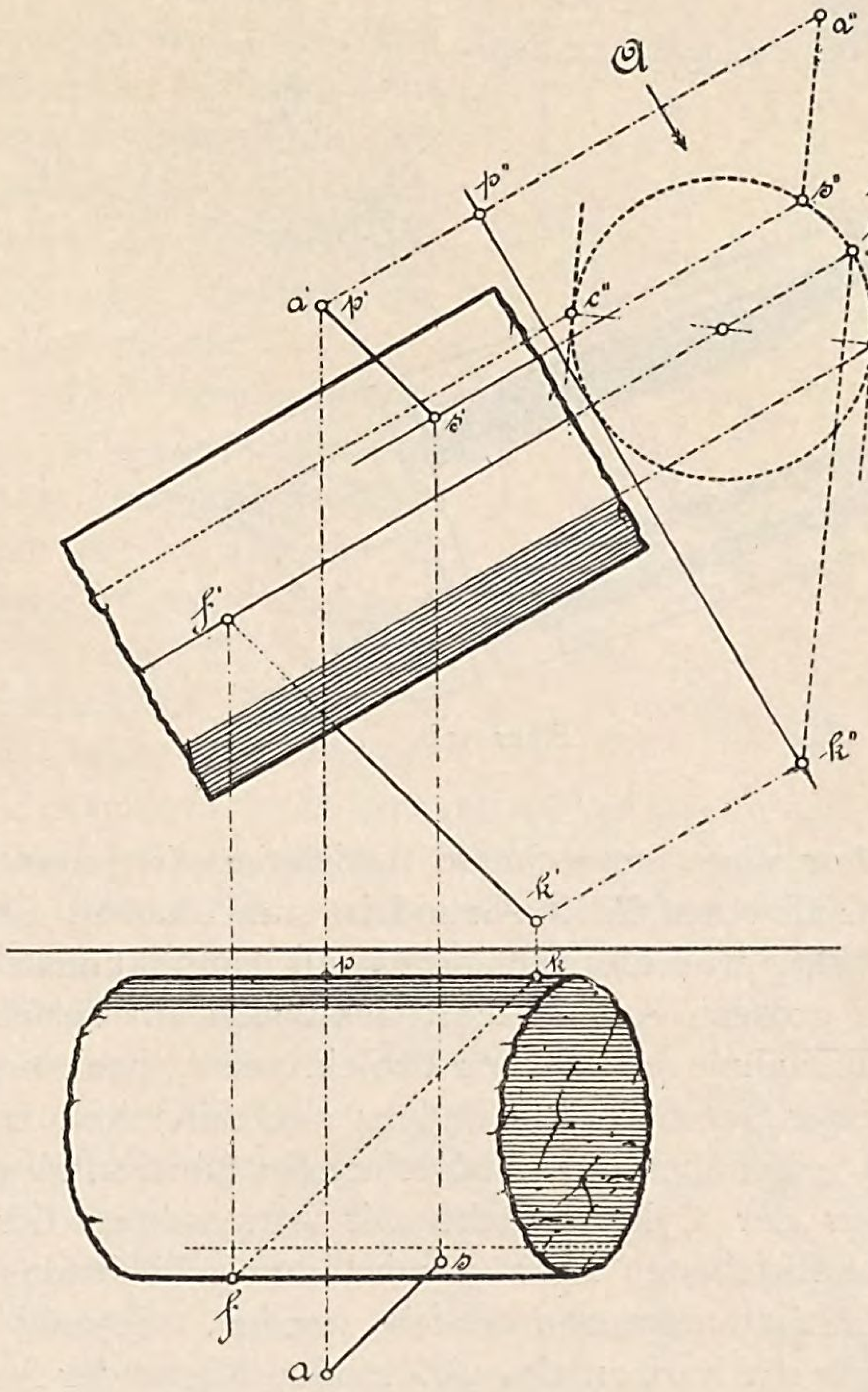
Figur 52.

Auch für diese Lösung gilt im übrigen ganz derselbe Wortlaut angewendet auf Figur 52, wie für den horizontalen Cylinder in Art. 50; nur sind die dort beschriebenen Operationen immer zugleich in der Seitenprojektion durchgeführt, welche in der Linie $f'' k''$ die in der Basisebene gültige Lichtstrahlrichtung anstatt der Aufrissfigur darbietet.

53. Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene ohne Basis, aber mit bekanntem Normalschnitt.

In Figur 53a sind die Körperschattengrenzen und der Schlagschatten eines äusseren Punktes auf einem in gerader Ansicht gezeichneten steigenden Kreiscylinder bestimmt, ohne dass elliptische Projektionen zu Hilfe genommen wurden.

Man denkt sich den Cylinder auf eine zu seiner Achse senkrechte Ebene projiziert und diese (kreisförmige) Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Durch einen beliebigen Punkt ff' einer Mantellinie zieht man einen Lichtstrahl fk bis zu der vertikalen Ebene der äussersten Mantellinie (oder einer beliebigen andern parallelen Ebene). Diesen Lichtstrahl projiziert man ebenfalls auf die umzuklappende Ebene, indem man k' nach k'' projiziert und $f'' k''$ zieht. Diese Linie bedeutet in der Umklappung zugleich eine Ebene, die durch die Mantellinie f'' und den Lichtstrahl gelegt ist und giebt damit die für die umgeklappte Normalschnittebene des Cylinders gültige Lichtrichtung, welche zu benützen ist wie in den früheren Fällen. Beim Zurücktragen der Mantellinien b'' und d'' in die andern Projektionen ist nur zu beachten, dass der



Figur 53a.

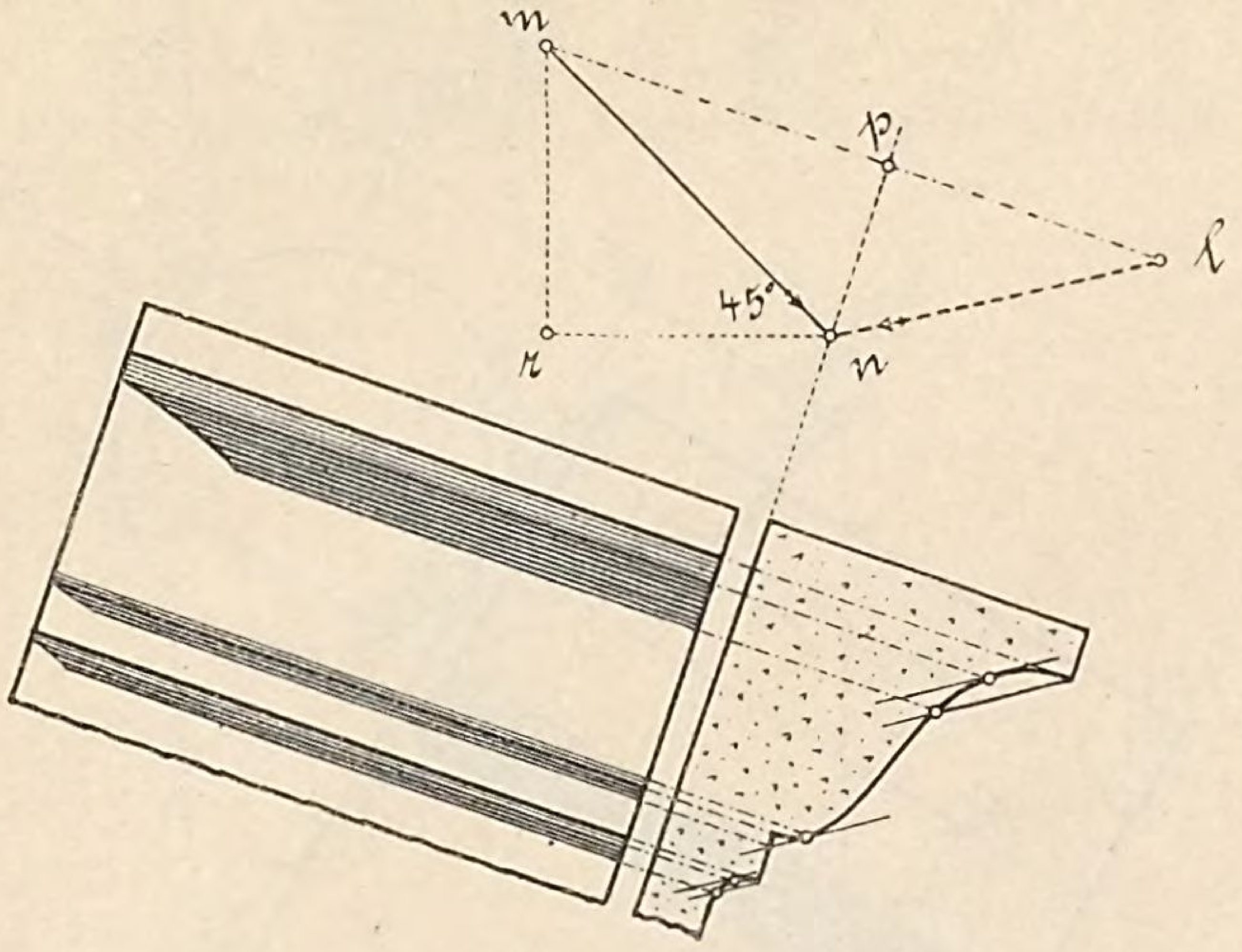
Grundriss einer Ansicht des Cylinders von A aus, der Aufriss einer solchen von B aus entspricht. Der äussere schattenwerfende Punkt aa' wird ebenfalls auf die Normalschnittebene projiziert und mit ihr umgeklappt, indem $p'' a'' = p\,a$ gemacht wird. Der Lichtstrahl $a'' s''$ parallel $f'' k''$ liefert s'' und damit leicht s' und s.

Die Lösung ist auch ohne Grundriss durchführbar, wofür in Figur 53b ein Beispiel mit beliebigem Normalschnitt der Cylinderfläche gezeichnet ist. Die Hilfsfigur über dem Gesims zeigt die Bestimmung der Lichtstrahlrichtung $l n$, die in der umgeklappten Ebene der Normalschnittlinie zu benützen ist. Durch den Punkt n der Fusslinie der Umklappung ist ein Lichtstrahl Mn gezogen gedacht. Der obere Endpunkt M dieses Lichtstrahls liegt vor seiner Projektion m um das Mass $Mm = m\,r = r\,n$. Wird dieser Lichtstrahl in der Richtung

der Mantellinien, das heisst rechtwinklig auf die ursprüngliche Normalschnittebene projiziert, so fällt der Punkt *L*, die Projektion von *M*, ebensoweit vor *p*, als Punkt *M* von *m* absteht. Wird also die Normalschnittebene samt ihrer Lichtstrahlprojektion in die Vertikalebene umgeklappt, so erscheint $lp = Lp = Mm = mr$, und ln ist die umgeklappte, für die Normalschnittfigur gültige Lichtstrahlrichtung.

Eine Verwertung der Konstruktion für gekrümmte Röhrenflächen, die parallel zur Vertikalebene stehen, ist in Art. 72 erklärt.

Auch für den beliebig schief gerichteten Kreiscylinder oder anderen Cylinder mit bekanntem Normal-



Figur 53 b.

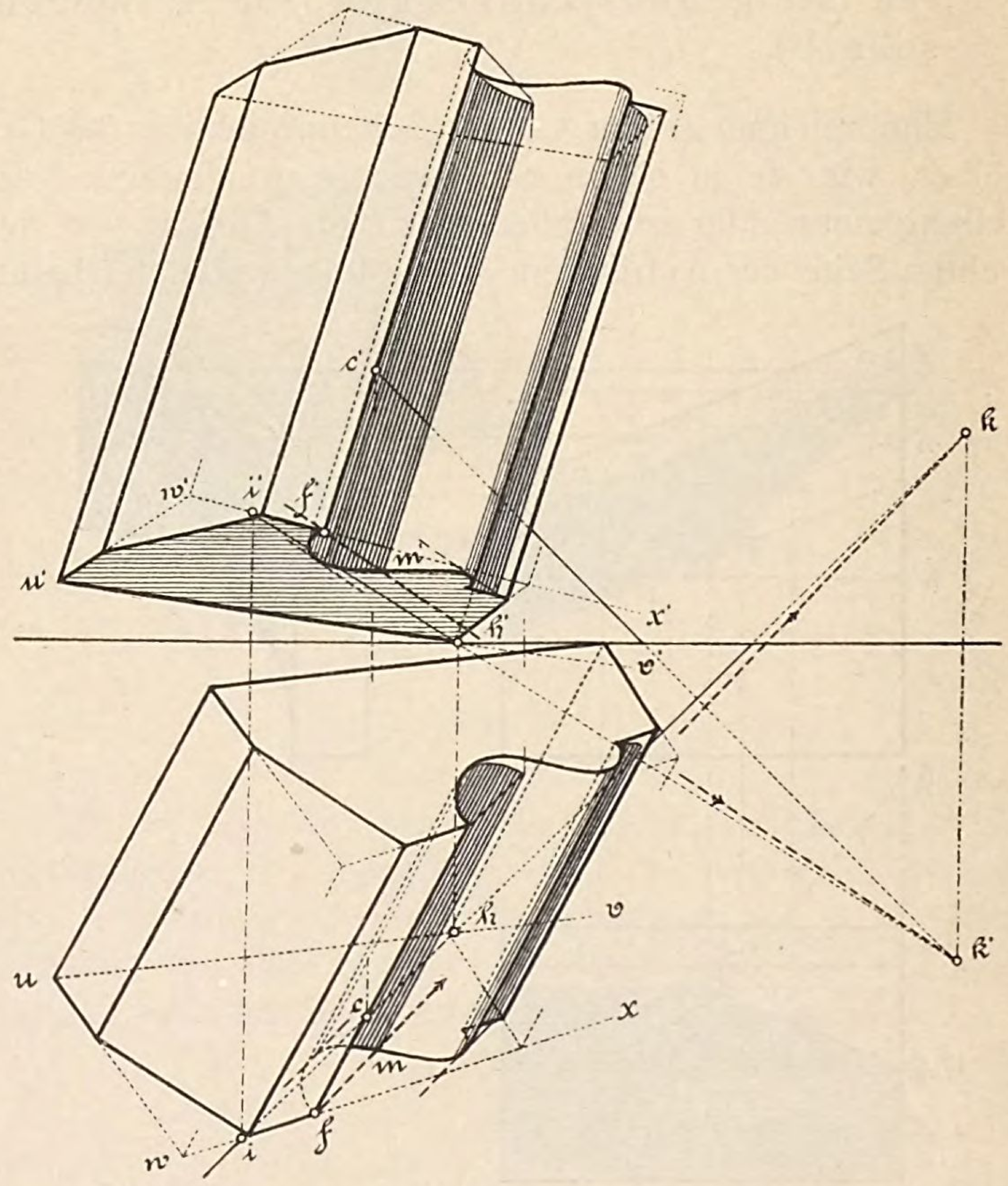
schnitt, aber ohne gezeichnete Basislinien (welcher sich im ersten Fall ebenfalls in Grundriss und Aufriss gleich breit darstellt, wie die Auffassung als Umhüllungsfläche von gleich grossen Kugeln lehrt) lässt sich ein Verfahren ohne Zuhilfenahme elliptischer Projektionen, beziehungsweise schiefer Durchschnitte finden; aber eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem Aufsuchen der Horizontal- oder Vertikalspur der Cylinderfläche mit Anwendung der in Art. 49 beschriebenen Lösung wird damit höchstens für die Körperschattengrenzen erzielt werden. Sowohl die Umklappung der horizontalprojizierenden Ebene der Achse als diejenige der Normalschnittebene in die horizontale Grundebene sind dabei zu Hilfe zu nehmen. Auch würde die Lösung selten praktisch zu verwerten sein.

54. Der beliebig schief gerichtete Cylinder mit beliebig geformter schiefstehender Basis.

Durch einen Punkt cc' einer Mantellinie (Figur 54) zieht man einen Lichtstrahl. Um dessen Schnitt mit der Basisebene zu finden, zieht man auf dieser zwei geeignete gerade Linien uv und wx, welche den Lichtstrahlgrundriss in h und i schneiden; diese Punkte lotet man hinauf in den Aufriss nach h' und i' und hat dann in $h'i'$ die Schnittlinie der Vertikalebene des Lichtstrahls mit der erweiterten Basisebene. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls, da ist der Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Basisebene k' im Aufriss. Das Hinunterloten (hier Hinaufloten) auf den Lichtstrahlgrundriss giebt dort k.

Die Verbindungslinie von kk' mit dem Fusspunkt der Mantellinie ff' ergiebt in Grundriss und Aufriss die Projektionen fk und $f'k'$ der Schnittlinie der Basisebene mit einer durch die Mantellinie cm gelegten Lichtstrahlenebene. Diese auf die Basisebene mit der Richtung der Cylinderfläche projizierte Lichtstrahlrichtung ist zu benützen wie in allen früher behandelten Fällen des schiefgerichteten Cylinders.

Wirft ein äusserer Punkt aa' einen Schlagschatten auf den Cylinder, so ist dieser Punkt in der Richtung



Figur 54.

der Cylinderachse auf die Basisebene zu projizieren. Dies geschieht, nachdem durch a und a' die projizierenden Parallelen zu den Mantellinien gezogen sind, ganz auf demselben Weg, der zuvor für das Aufsuchen des Schnittpunktes k' angegeben worden ist. Da dieses Projizieren aber ziemlich zeitraubend ist, so wird man bei vielen schlagschattenwerfenden Punkten mit Aufsuchen der Horizontalspur der Cylinderfläche unter Anwendung von Art. 49, oder auch mit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen, d. h. mit Hilfe der Schnittkurven vertikaler Lichtstrahlenebenen, rascher zum Ziel kommen, da ja jene Schnittkurven alle kongruent sind und einmal konstruiert durch Rücken eines Pausblattes mit Durchstechen der Punkte rasch erhalten werden können.

VII. Schatten auf Drehungsflächen.

55. Erstes Verfahren für Körper- und Schlagschattengrenzen: Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene nach der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt.

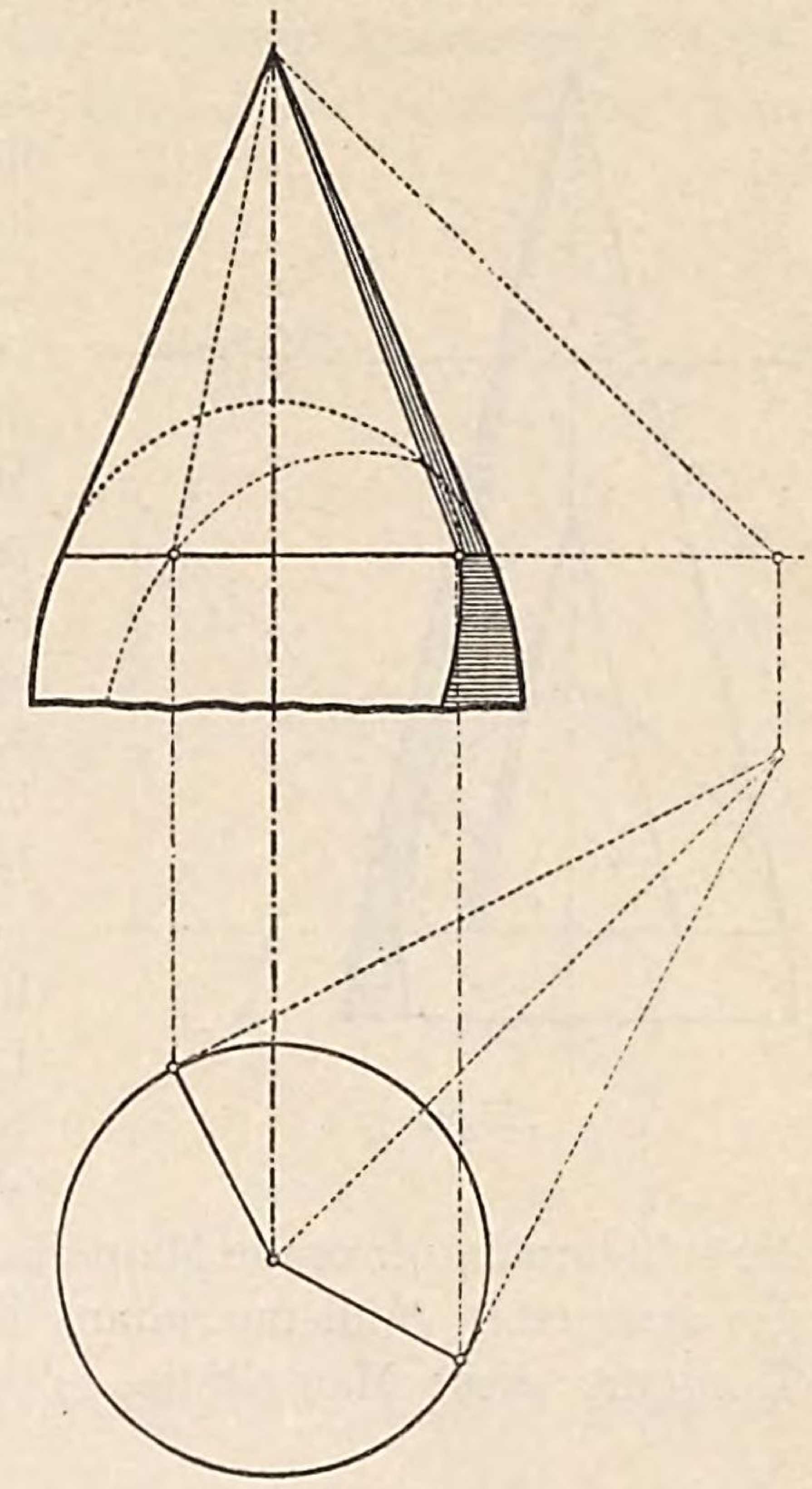
Diejenigen Lagen der Drehungsflächen, bei welchen die Achsen vertikal, oder senkrecht zur Vertikalebene, oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon in Art. 30 u. 31 als Fälle der Anwendbarkeit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt. Dieses erste Verfahren für beide Arten von Schattengrenzen ist aber im allgemeinen nicht nur zeitraubender, sondern auch wegen der in Art. 35 beschriebenen Mängel minder zweckmässig als die im folgenden unter Art. 56, 57 und 61 beschriebenen.

Bei Drehungsflächen mit kreisförmigen oder kegelschnittförmigen Meridianen lassen sich die Körperschattengrenzen nach Art. 56 u. 57 mit voller Bestimmtheit erhalten; für andere Meridianlinien sind zwar auch bei diesen Verfahren die Berührungspunkte von Tangenten schätzungsweise einzutragen, was noch immer eine Unsicherheit mit sich bringt; diese ist aber geringer als bei der allgemeinen Lösung.

Für Schlagschattengrenzen ist das in Art. 61 beschriebene Verfahren, das leider fast nur in denjenigen Fällen rasch fördert, in welchen ein Parallelkreis als Kante den Schatten wirft, in erster Linie gebräuchlich. Wo ein berührender Lichtstrahlencylinder die Schattengrenze erzeugt, da hat für diese meist die allgemeine Lösung einzutreten, die ja für die Schlagschattengrenzen minder unsicher ist als für Körperschatten. Die schärfere Bestimmung der letzteren nach den Verfahren in Art. 56 und 57 kommt hiebei auch der genaueren Konstruktion der Schlagschattengrenze zu gut, da diese den Schatten der Körperschattengrenze darstellt, so z. B. in der Beschattung und Selbstbeschattung nach Figur 37. In bestimmten Fällen ist auch die Schlagschattenbestimmung nach Art. 62 zweckmässig.

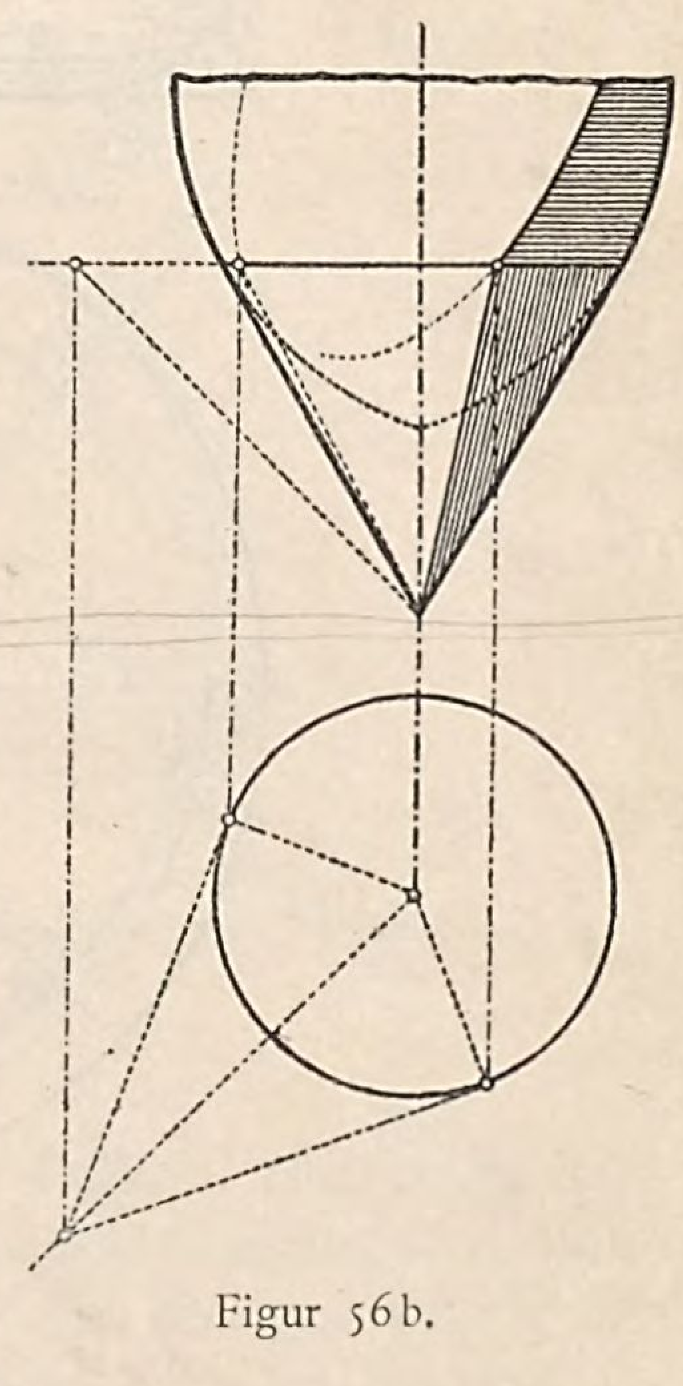
56. Zweites Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kreiskegeln.

Wenn man sich (Figuren 56a u. 56b) an irgend einen Meridian einer Drehungsfläche eine Tangente gezogen denkt und diese mit dem Meridian um die Achse dreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen Parallelkreis und die Tangente selber eine Kegelfläche, deren Spitze in der Drehachse liegt. Diese Kegelfläche hat eine unendlich niedere Zone gemeinschaftlich mit der Drehungsfläche, und wo die Schattengrenze auf dieser Zone als einem Bestandteil des Kegels liegt, da muss sie auch liegen, wenn man die Zone als Bestandteil der Drehungsfläche betrachtet. Wenn man also nach bekanntem Verfahren die Schattengrenze auf dem Kegel konstruiert und zusieht, wo die schattenabgrenzende Mantellinie den Parallelkreis schneidet, so hat man im erhaltenen Schnittpunkt zugleich einen Punkt der Körperschattengrenze auf der Drehungsfläche. Wo die Tangente am Meridian parallel wird zur Achse, da geht die Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, und es ist auch auf dieser die schattenabgrenzende Mantellinie in bekannter Weise zu suchen. Zu beachten ist, dass für die konvexen Drehungsflächen konvexe Kegel, für die hohlen Drehungsflächen Hohlkegel beizuziehen sind. Die Grenzlinien der Schatten sind zwar für beide Fälle dieselben; aber die Lichtfläche des einen Falls wird im andern zur Schattenfläche.



Figur 56a.

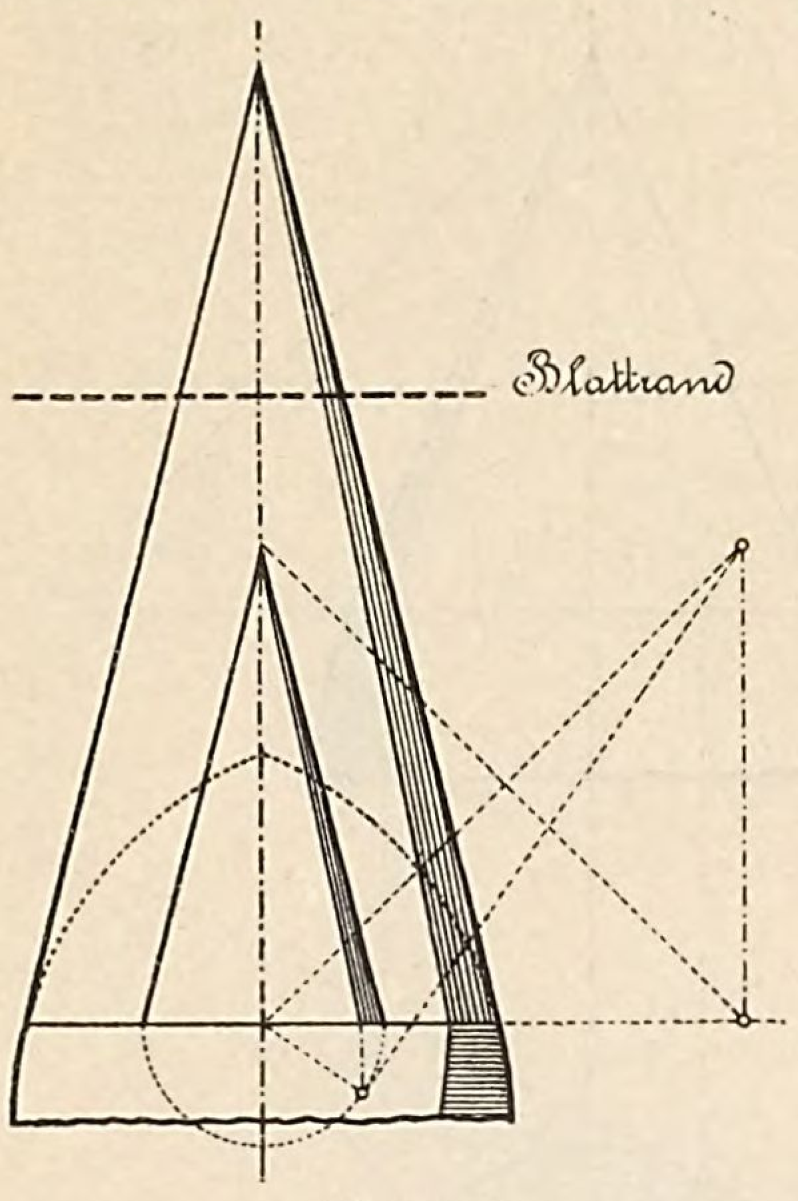
Bei Anwendung dieses Verfahrens findet sich, dass die Kegelspitzen und ihre Schatten meist in zu grosse Ferne und über das Zeichenblatt hinausfallen. Man kann aber in diesen Fällen die Konstruktion trotzdem durchführen, indem man die zu grossen Kegel auf die Hälfte oder einen anderen Bruchteil ihrer Basis verkleinert, dann den Schattenpunkt in diesem kleineren Massstab konstruiert und endlich den erhaltenen Abstand von der Drehachse im gleichen Verhältnis wieder vergrössert. Fig. 56c soll diese Hilfskonstruktion anschaulich machen. Die Mantellinien für den Kegelschatten sind nicht wirklich zu ziehen, da man ja nur ihren Fusspunkt braucht; andere umständlich mit Worten darzulegende Vereinfachungen der am besten neben der Hauptfigur nur in kleinem Massstab und mit einem einzigen Kreis als Basis für alle Kegel auszuführenden Hilfskonstruktion ergeben sich bei mehrmaliger Ausführung von selbst.



Figur 56b.

Nach dem vorbeschriebenen Verfahren lassen sich für alle Drehungsflächen, besonders aber für solche mit kreisförmigen Meridianstücken, rasch einige wichtige Punkte der Schattenkurve konstruieren, welche die Lage und Form dieser Kurve schon für viele Fälle genügend einzuzeichnen gestatten. Bei einem Wulst mit vertikaler Drehachse (Figur 56d) lassen sich z. B. 8 Punkte ohne eingehende Konstruktion leicht auffinden. Denkt man

sich eine Tangente, gegen oben die Achse schneidend, unter 45^{0} an den äussersten Meridian rechts gezogen, so ist der Berührungspunkt a' der Endpunkt des sichtbaren Teils der Körperschattenkurve. Denn der mit dieser Tangente gedachte Berührungskegel der Wulstfläche ist ein Drehungskegel, dessen Mantellinien unter 45^{0} geneigt sind, und bei einem solchen liegen die schattenabgrenzenden Mantellinien im Grundriss parallel zum Grundschnitt und senkrecht zum Grundschnitt, so dass die Schattenfläche genau der vierte Teil des Mantels ist. Dies leuchtet sofort ein, wenn man den Kegel für sich herauszeichnet und die Lage des Schattens seiner Spitze betrachtet (Fig. 56 e). Weil nun auf dem Kegel die schattenabgrenzende Mantellinie in der vertikalen Ebene des äussersten Wulstmeridians liegt, so ist die gezogene Tangente diese Mantellinie selber, und ihr Berührungs-

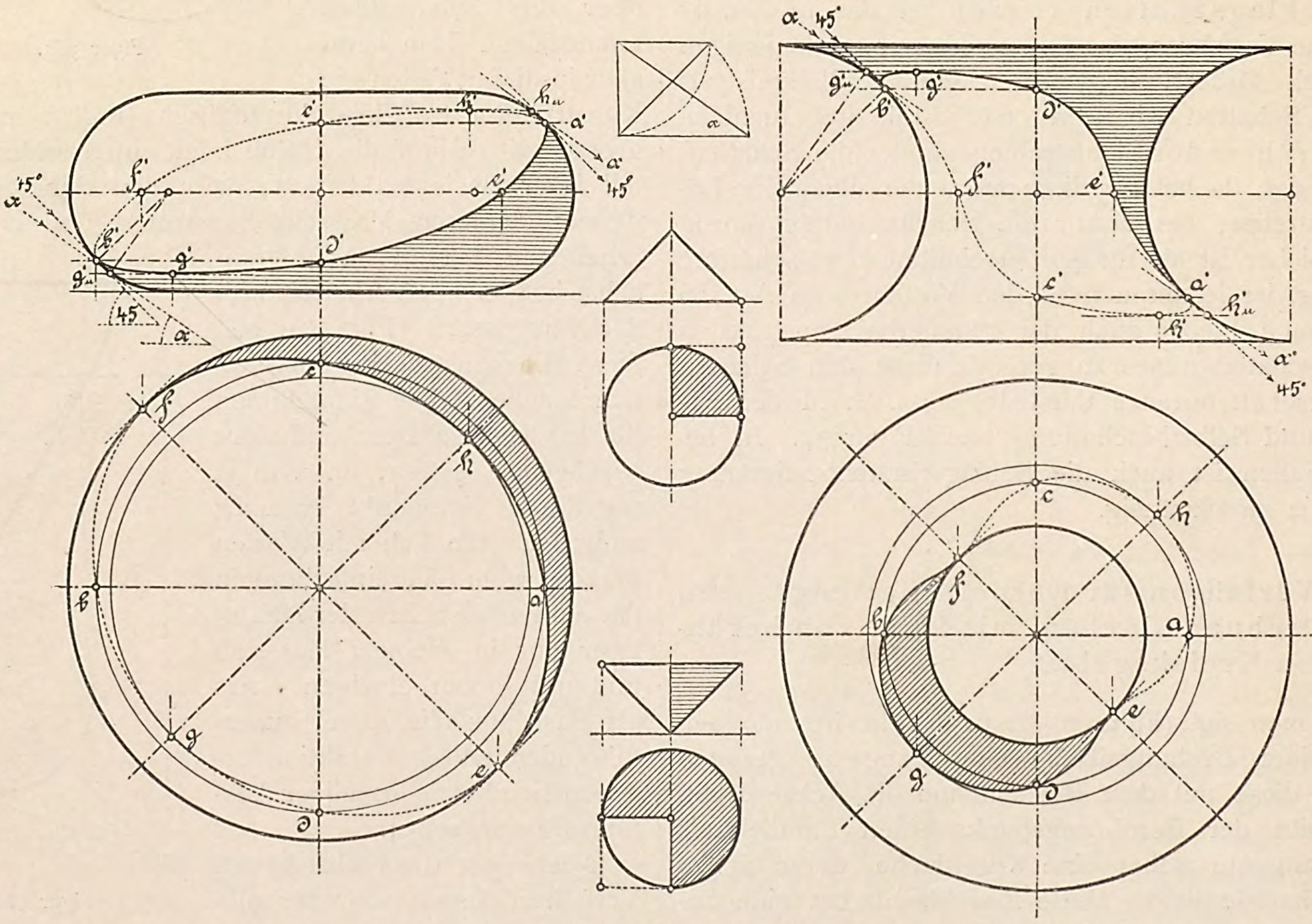


Figur 56 c.

b' liefert (Figur 56 f zeigt den Hilfskegel für sich). Da ferner auf dem Wulst alle Schattierung symmetrisch zu der vertikalen Ebene sein muss, die durch die Achse unter 45^{0} zum Grundschnitt gelegt und die „Hauptmeridianebene“ genannt wird, so finden sich leicht die weiteren Punkte c' und d' gleichhoch liegend mit a' und b' auf der vertikalen Mittelachse der Figur. Im Grundriss müssen $a\, b\, c\, d$ auf demselben Parallelkreis liegen.

Auf dem grössten Horizontalkreis des Wulstes müssen die Schattenpunkte da liegen, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. So finden sich durch einen unter 45^{0} geneigten Durchmesser dieses Kreises die Schattenpunkte ee' und ff'.

Noch zwei weitere Punkte, und zwar der tiefstliegende und höchstliegende Punkt, ergeben sich durch Betrachtung der vertikalen Ebene, die durch die Achse unter 45^{0} zum Grundschnitt gelegt wird. Diese Lichtstrahlenebene schneidet den Wulst nach Meridianen; wo der Lichtstrahl diese Meridiane berührt, da liegen die gesuchten Punkte. Denkt man sich diese Ebene um die Achse gedreht, bis sie parallel zur Vertikalebene steht, so erscheinen die Grenzlinien der Figur als Umklappung der Meridiane. Es sind also nur an die äussersten Meridiane zwei Tangenten mit derjenigen Richtung zu ziehen, welche der Lichtstrahl in seiner eigenen Vertikalebene



Figur 56 d, e, f, g.

punkt mit dem Meridian ein Punkt der Schattenkurve. Aus a' findet sich leicht der zugehörige Grundrisspunkt a.)

Ganz dieselbe Betrachtung ergiebt, dass eine an den linken äussersten Meridian unter 45^{0} gezogene nach unten gerichtete Tangente den linken Endpunkt der Kurve

darbietet. Diese Richtung ist flacher als 45^{0}; sie findet sich nach Art. 38 ausgedrückt durch den Winkel $\alpha = 35^{0}\ 15{,}9'$ oder durch die Richtung der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete

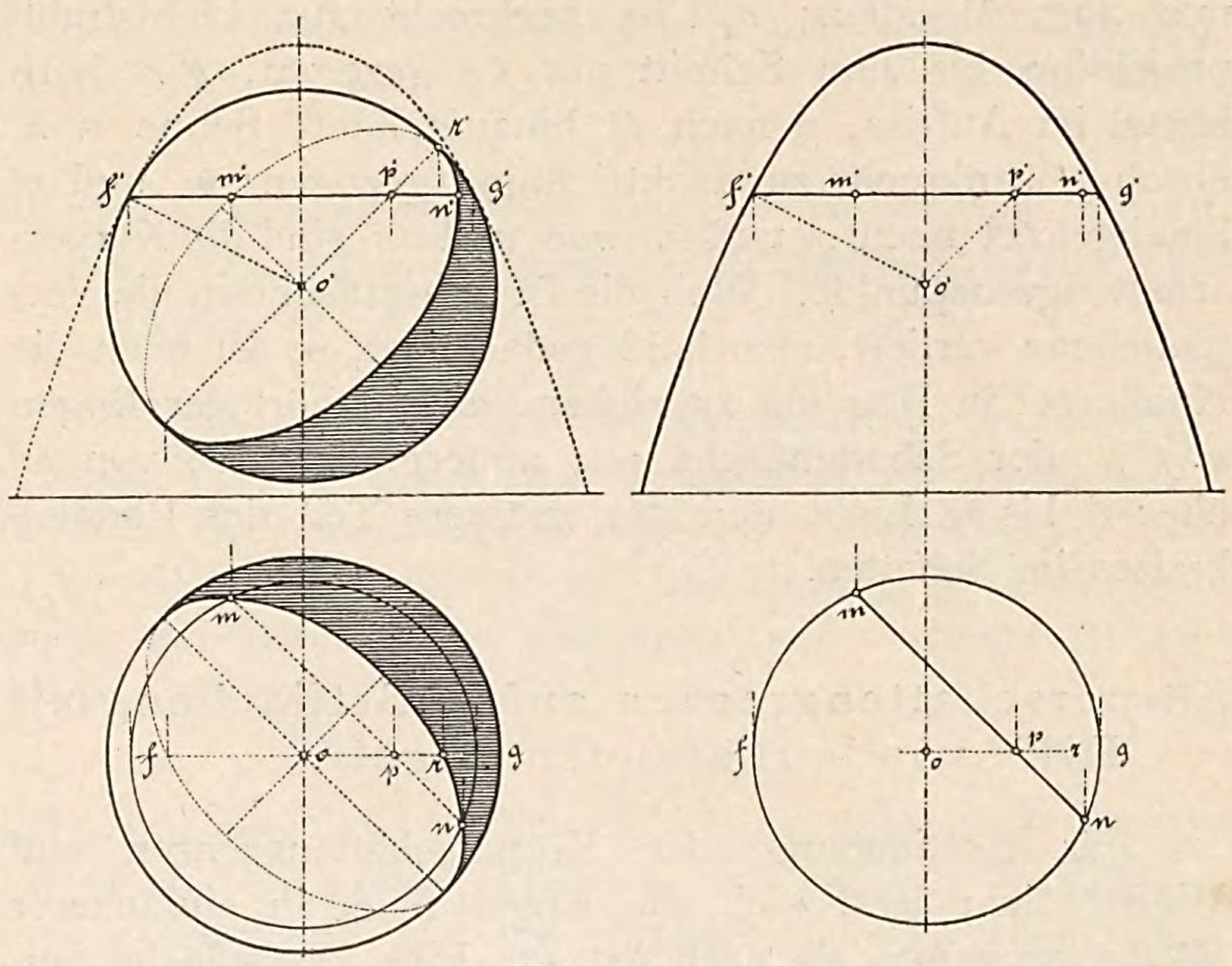
gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über a. Die Berührungspunkte dieser zwei Tangenten seien g'_{II} und h'_{II}; durch das Zurückklappen dieser Punkte in ihre ursprüngliche Meridianebene findet sich die Lage der Körperschattengrenzpunkte gg' und hh', die um so wichtiger sind, als die horizontalen Parallelkreise im Aufriss, die zum Zurückklappen dienen, zugleich Tangenten an der Grenzkurve in diesen Punkten darstellen. In den Grundrisspunkten g und h hat die Grenzkurve im Grundriss eine kurze Symmetralachse, wogegen der senkrechte Durchmesser ef eine grosse Symmetralachse darstellt.

Ganz dieselbe Betrachtung führt zu den 8 Punkten der Wulstfläche mit konkavem Meridian, Fig. 56g. Wie bei diesen Wulstflächen, so lassen sich für alle anderen Drehungsflächen die wichtigsten Punkte der Körperschattengrenze rasch bestimmen. Auch für die Schlagschattengrenze, die bei Drehungsflächen mit Selbstbeschattung hinzutritt, führt die Betrachtung der vertikalen Lichtstrahlenebene, die durch die Achse geht, und die Erwägung der Symmetrie der ganzen Schattierung in Beziehung auf diese Ebene zu einigen Schlüssen, so dass sich im Zusammenhang mit Art. 34 über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse die in Art. 63 gegebenen Sätze zusammenstellen lassen. Die Anpassung dieser Sätze an die Lagen der Drehungsachsen senkrecht zur Vertikalebene und parallel zum Grundschnitt bedarf keiner Erklärung.

57. Drittes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

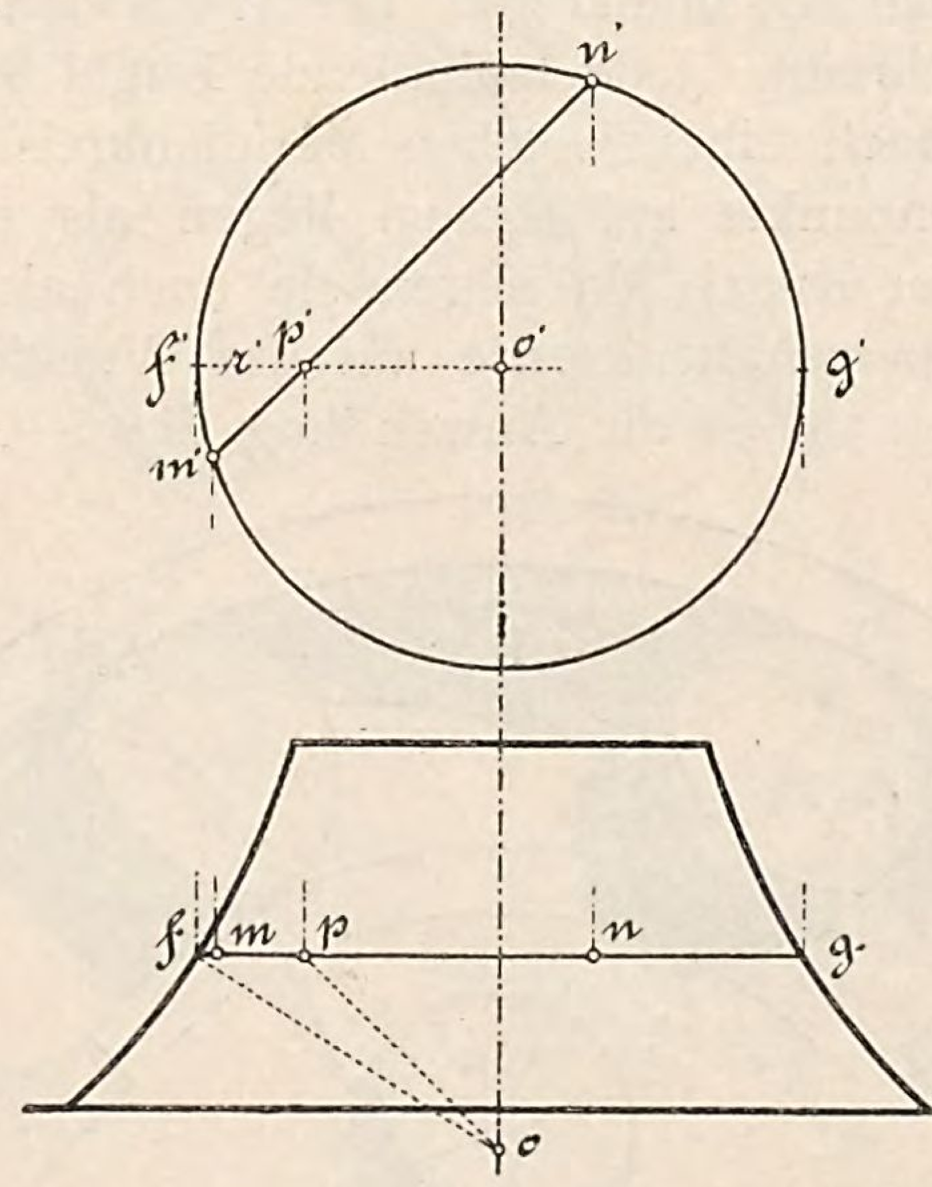
Der Anschauung vielleicht minder leicht zugänglich, aber in der Ausführung einfacher und raumsparender ist ein drittes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, nämlich dasjenige mit berührenden Kugeln. Jede Drehungsfläche kann aufgefasst werden als umhüllt von Kugeln verschiedener Grösse, deren Mittelpunkte auf der Achse der Drehungsfläche liegen und von denen jede die Fläche nach einem Parallelkreis berührt, längs welchem jeder Kugelradius normal zum zugehörigen Meridian der Fläche gerichtet ist. Einen solchen Parallelkreis ($f'g'$ in Figur 57a) kann man ebensowohl als eine sehr niedrige Zone der Kugel wie der Drehungsfläche auffassen, und wo die Schattengrenze darauf erscheint als auf einer Zone der Kugel, da muss sie auch liegen als Bestandteil der Schattengrenze der Drehungsfläche.

Hier ist vorauszunehmen, was erst später (in Art. 66) ausgeführt wird, aber eines Beweises nicht bedarf, nämlich dass die Körperschattengrenze auf der Vollkugel ein Grosskreis senkrecht zur Lichtrichtung ist. Im Grundriss und Aufriss der Kugel (Figur 57a) projiziert sich dieser Grosskreis als eine Ellipse, deren grosse Achse ein Durchmesser der Kugelprojektion senkrecht zur Lichtstrahlprojektion ist. Die grosse Achse der einen Projektion projiziert sich in der andern Projektion horizontal. Wo diese Ellipse im Grundriss oder Aufriss geschnitten wird von der Projektion eines der zuvor genannten Parallelkreise $f'g'$, da ist ein Schattenpunkt auch für die Drehungsfläche. Die Grosskreisebene schneidet — wenn die Drehachse vertikal vorausgesetzt wird — die horizontale Parallelkreisebene nach einer gemeinschaftlichen Sehne mn, die wie die Grosskreisebene selbst normal zur Lichtrichtung steht, also im Grundriss normal zur Lichtstrahlprojektion erscheint.



Figur 57a, b.

Sobald der Parallelkreis fg in Aufriss und Grundriss der Drehungsfläche gezeichnet und die Normale der Meridianlinie $f'o'$ (als Kugelradius gedacht) gezogen ist,



Figur 57c.

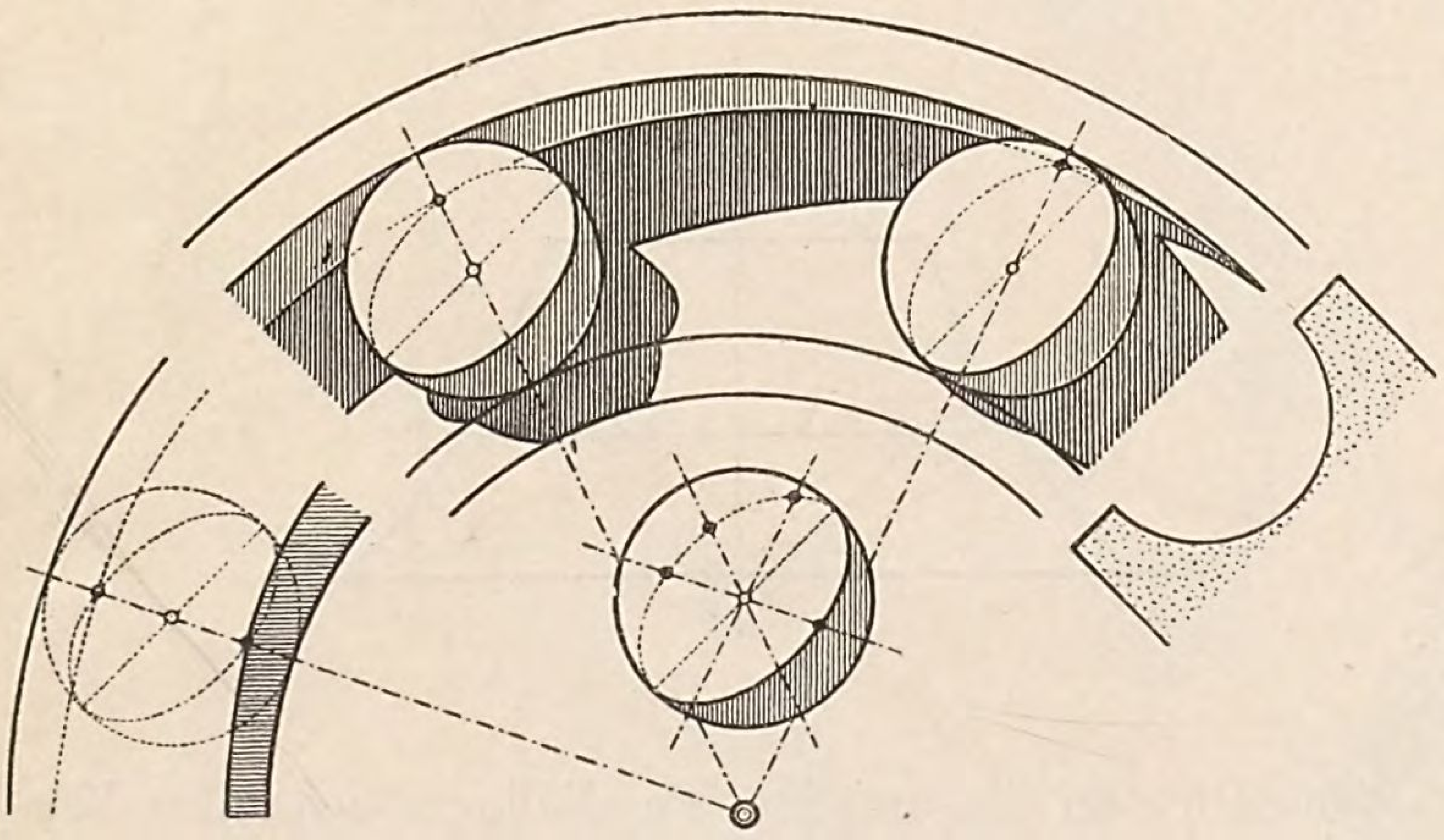
lassen sich nun die auf dem Parallelkreis liegenden Körperschattengrenzpunkte m und n rasch bestimmen, ohne dass die Kugelprojektionen und die Ellipsen gezeichnet werden müssten. Man zieht (Figur 57b) im Aufriss $o'p'$ senkrecht zur Lichtstrahlprojektion und im Grundriss den Radius or horizontal, lotet p' in den Grundriss auf or nach p, zieht durch p die Sehne senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, erhält dadurch auf dem Parallelkreis m und n und lotet diese Punkte hinauf nach m' und n'. mm' und nn' sind Körperschattengrenzpunkte der Drehungsfläche.

Anwendung des Verfahrens mit den Berührungskugeln auf eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene vertieft in diese; Figur 57c.

fg sei der Parallelkreis, auf welchem die Körperschattengrenzpunkte zu suchen sind, im Grundriss; der Kreis um *o'* sei dessen Aufriss. *fo* im Grundriss ist normal zum Meridian; *op* ist senkrecht zur Lichtstrahlprojektion bis zum Schnitt mit *fg* gezogen, *o' r'* horizontal im Aufriss, *p* nach *p'* hinaufgelotet; Sehne *m' n'* durch *p'* senkrecht zur Lichtrichtung gezogen; *m'* und *n'* hinabgelotet nach *m* und *n*. *mm'* und *nn'* sind die Körperschattengrenzpunkte. Weil die Drehungsfläche in die Vertikalebene vertieft, also hohl gedacht ist, so ist auch die Hohlkugel in Betracht zu ziehen, also gehört der Bogen *m' f' n'* der Schattenfläche an; andernfalls wäre von *m'* über *f'* bis *n'* Licht und der grössere Teil des Parallelkreises im Schatten.

58. Körperschattengrenzen auf Wulstflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

Zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Wulstflächen lässt sich die Kugel noch in einfacherer Weise verwerten als nach Art. 57. Eine Wulstfläche entsteht durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogens um eine in seiner Ebene liegende Achse; sie ist also nicht nur Umhüllungsfläche von Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Drehungsachse liegen, sondern es liegt näher, sie als Umhüllungsfläche gleich grosser Kugeln aufzufassen, deren Mittelpunkte auf dem Kreis liegen, den der Mittelpunkt des Meridiankreises der Wulstfläche bei der Drehung beschreibt. Jede umhüllende Kugel berührt die Wulstfläche nach einem solchen Meridiankreis. Wo die Körperschattenpunkte auf diesem liegen als auf einem Bestandteil der Kugel, da liegen sie auch als Bestandteile der Körperschattengrenze auf der Wulstfläche. Im folgenden (Fig. 58) ist die Anwendung dieses Gedankens



Figur 58.

auf den konvexen Wulst und auf die halbe hohle Wulstfläche mit Drehungsachse senkrecht zur Vertikalebene gezeigt.

Man zeichnet als Aufriss eine Kugel mit dem Radius des Meridiankreises der Wulstfläche samt ihrem schattenabgrenzenden Grosskreis, wobei die Ellipse, als welche dieser erscheint, nach Art. 66 erhalten werden kann. Dieses Kugelbild denkt man sich auf eine genügende Zahl von Radien zwischen die zwei Aufrisskreise der Wulstfläche gelegt, wie es Figur 58 anschaulich macht, und zwar so, dass der Mittelpunkt des Kugelbildes immer auf dem Radius liegt und die grosse Achse der Ellipse immer gleichgerichtet (unter 45°) bleibt, wie es der Auffassung des Kugelbildes als einer Vertikalprojektion entspricht. Wo die Ellipse auf der Kugel den Radius schneidet, da ist ein Punkt der Körperschattengrenze der Wulstfläche. Beim hohlen Wulst ist nur die punktierte Hälfte der Ellipse in Betracht zu ziehen; bei der konvexen Wulstfläche mit vollem Kreisquerschnitt werden für jede Lage des Kugelbildes zwei Punkte erhalten.

Zur praktischen Durchführung zeichnet man sich die Kugel nur einmal seitlich vom gegebenen Wulst (s. Figur) und zieht durch den Mittelpunkt des Kugelbildes parallele Durchmesser zu den Radien des Wulstaufrisses, worauf sich die Abstände der Schattenpunkte von den Wulsträndern auf jedem solchen Durchmesser abstechen lassen. Auch kann man das Kugelbild auf Pauspapier zeichnen und nacheinander mit unveränderter Richtung auf die Radien legen, wobei sich in jeder Lage der Schattenpunkt auf den Radius durchstechen lässt.

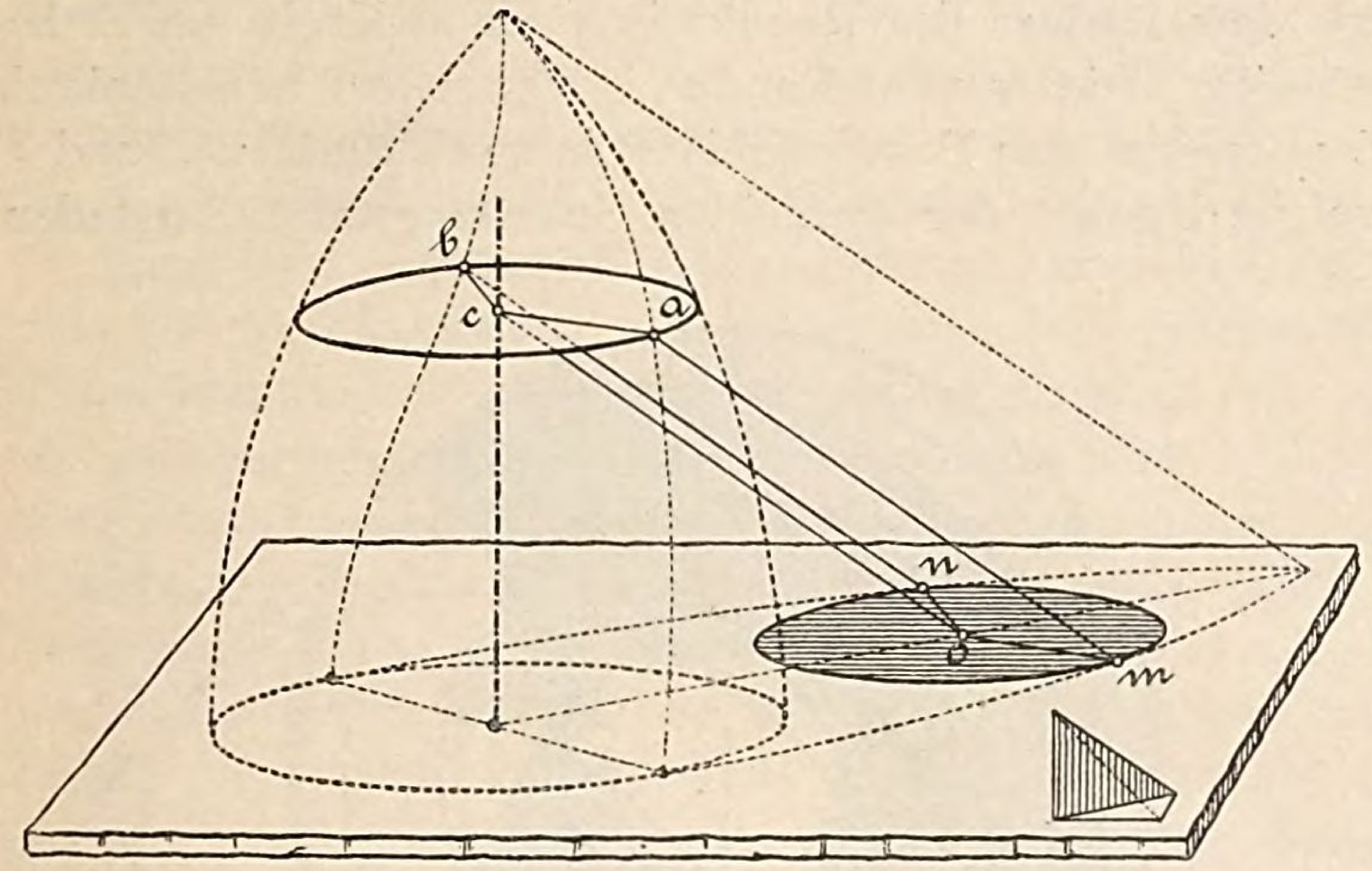
Die Anwendung auf andere Lagen der Drehachse, die einer Grundebene parallel sind, bedarf keiner Erklärung. Doch ist zu beachten, dass die Lösung — um so einfach zu sein — diejenige Projektion der Wulstfläche erfordert, in welcher deren Drehachse sich als ein Punkt projiziert, weil sich in andern Projektionen die Berührungskreise nicht als gerade Linien projizieren. Ist die Schattengrenze in einer andern Projektion verlangt, so ist sie in dieser erst durch Uebertragung der in jener ersten Projektion gefundenen Grenzlinie erhältlich.

Viertes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe des Schlagschattens auf einer Ebene senkrecht zur Achse. 59.

Der Schlagschatten eines Drehungskörpers auf einer Ebene senkrecht zu seiner Achse würde auf dem gewöhnlichen Weg dadurch erhalten, dass man zuerst die Körperschattengrenze auf dem Drehungskörper und dann deren Schlagschatten auf der Ebene in bekannter Weise aufsucht. Nun lässt sich aber dieser Schlagschatten meist rascher dadurch erhalten, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Parallelkreisen auf der Ebene zeichnet. Diese Schatten werden wieder kreisförmig und wie in Art. 10e auf kurzem Weg gefunden; ihre Umhüllungslinie ist die Schlagschattengrenze.

Die so erhaltene Grenzlinie ist zugleich der Schlagschatten der Körperschattengrenzlinie und kann mit Umkehrung des gewöhnlichen Wegs zu deren Bestimmung verwertet werden (Figur 59a). Man bestimmt durch Schätzung möglichst genau einen Berührungspunkt *m* oder *n* zwischen einem Schattenkreis und der Umhüllungskurve; ein rückwärts durch den Punkt gezogener Lichtstrahl liefert als Schnitt mit dem Parallelkreis den zugehörigen schattenwerfenden Punkt *a* oder *b*, welcher

notwendig der Körperschattengrenze angehört. Auch durch zwei parallele Radien kann der schattenwerfende Punkt aus dem Schattenpunkt abgeleitet werden; *c a* ist parallel *o m*; *c b* ist parallel *o n*; wonach es nicht nötig



Figur 59 a.

ist, den Parallelkreis *a b* selbst zu zeichnen, sondern genügt, dessen Schatten und die parallelen Radien darzustellen Durch Wiederholung des Verfahrens mit weiteren Berührungspunkten lässt sich im Zusammenhang mit der Bestimmung wichtiger Punkte nach Art. 56 die Körperschattengrenze für bestimmte Fälle rascher erhalten als auf den anderen Wegen; aber allgemeine Brauchbarkeit

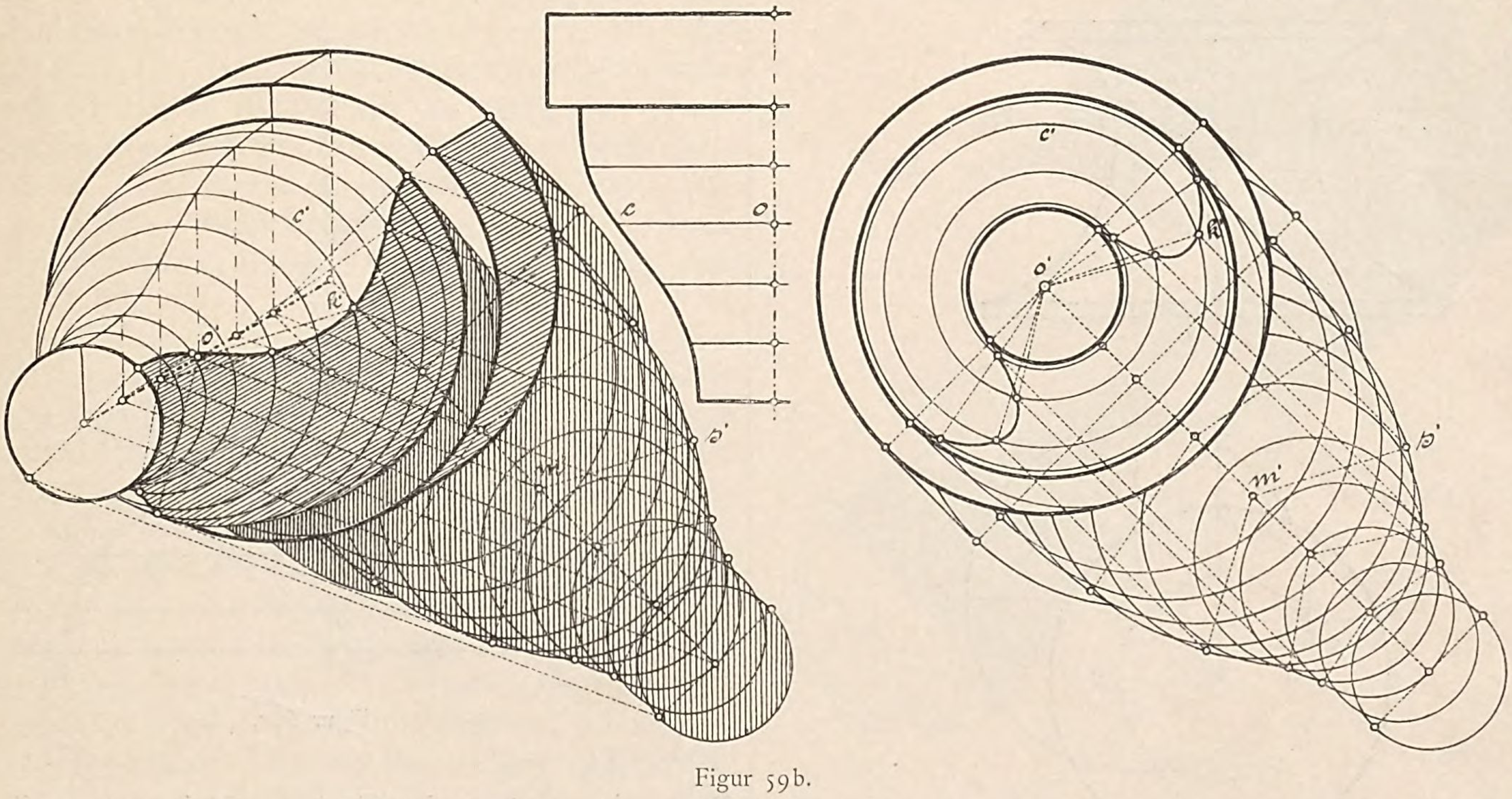
nen der Schatten der Parallelkreise des Körpers ist die Schlagschattengrenze auf der Vertikalebene als Umhüllungskurve der Schattenkreise gefunden worden. *s'* sei einer der beiden Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und dem Schatten des Parallelkreises *o' c'*. Der rückwärts durch *s'* gezogene Lichtstrahl (oder das Ziehen der parallelen Radien *m' s'* und *o' k'*) liefert den Körperschattenpunkt *k'*.

Fünftes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe der Normalkugel. 60.

Ein fünftes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzlinien auf Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel", die in der Beleuchtungskunde zur Bestimmung der Zwischenstufen der Beleuchtung verwertet wird. Hiefür ist auf Art. 93 bis 96 zu verweisen.

Zweites Verfahren für Schlagschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe der kongruenten Schlagschatten auf Parallelkreisebenen. 61.

Die in Art. 56 und 57 beschriebenen Verfahren haben den Mangel, dass sie nur Körperschatten-, nicht auch



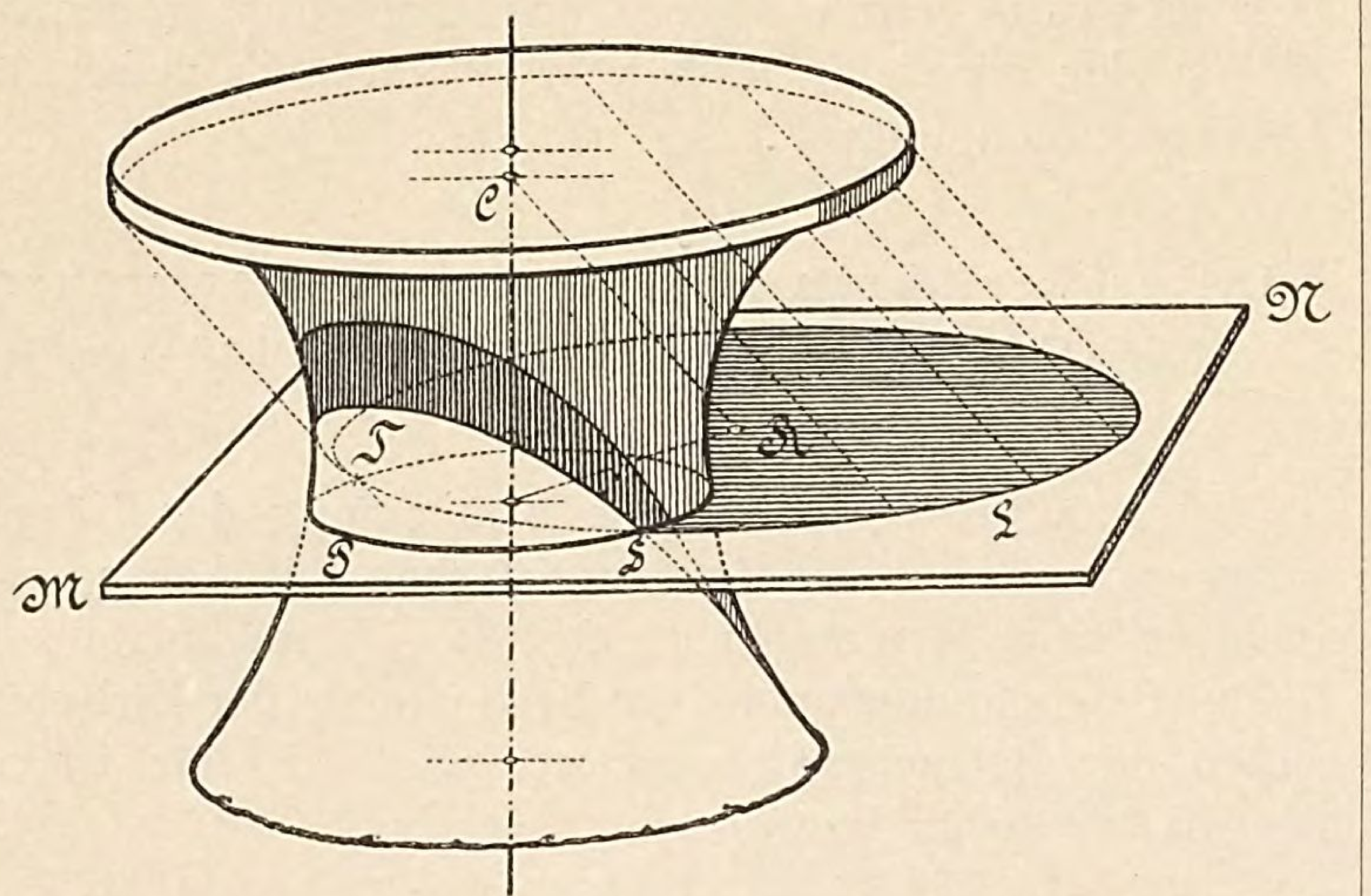
Figur 59 b.

kann diese Art der Körperschattenbestimmung von Drehungsflächen nicht beanspruchen. Sie versagt leicht gerade an den wichtigsten Stellen durch Häufung der Linien. Körperschattengrenzen gegen Schlagschattenflächen ergeben sich dabei aus solchen Teilen jener Umhüllungskurve, welche im Innern der Schlagschattenfläche liegen, also später im Resultat der Konstruktion nicht mehr sichtbar sind.

Ein durchgeführtes Beispiel bietet Figur 59 b mit perspektivischer und geometrischer Darstellung. Durch Zeich-

Schlagschattengrenzen liefern. Auch für die Bestimmung dieser letzten giebt es eine zweite Konstruktion, die zwar den entgegengesetzten Mangel hat, keine Körperschattengrenzen mitzuliefern, aber mit den Berührungskegeln oder -kugeln verbunden werden kann und dann entweder die zeitraubende allgemeine Lösung entbehrlich macht oder sie ergänzt und Proben für sie liefert. Sie ist in erster Linie und fast ausschliesslich wertvoll in den häufigen Fällen, in welchen ein Parallelkreisrand die Schlagschattengrenze erzeugt. Wo eine Auswölbung der Fläche oder

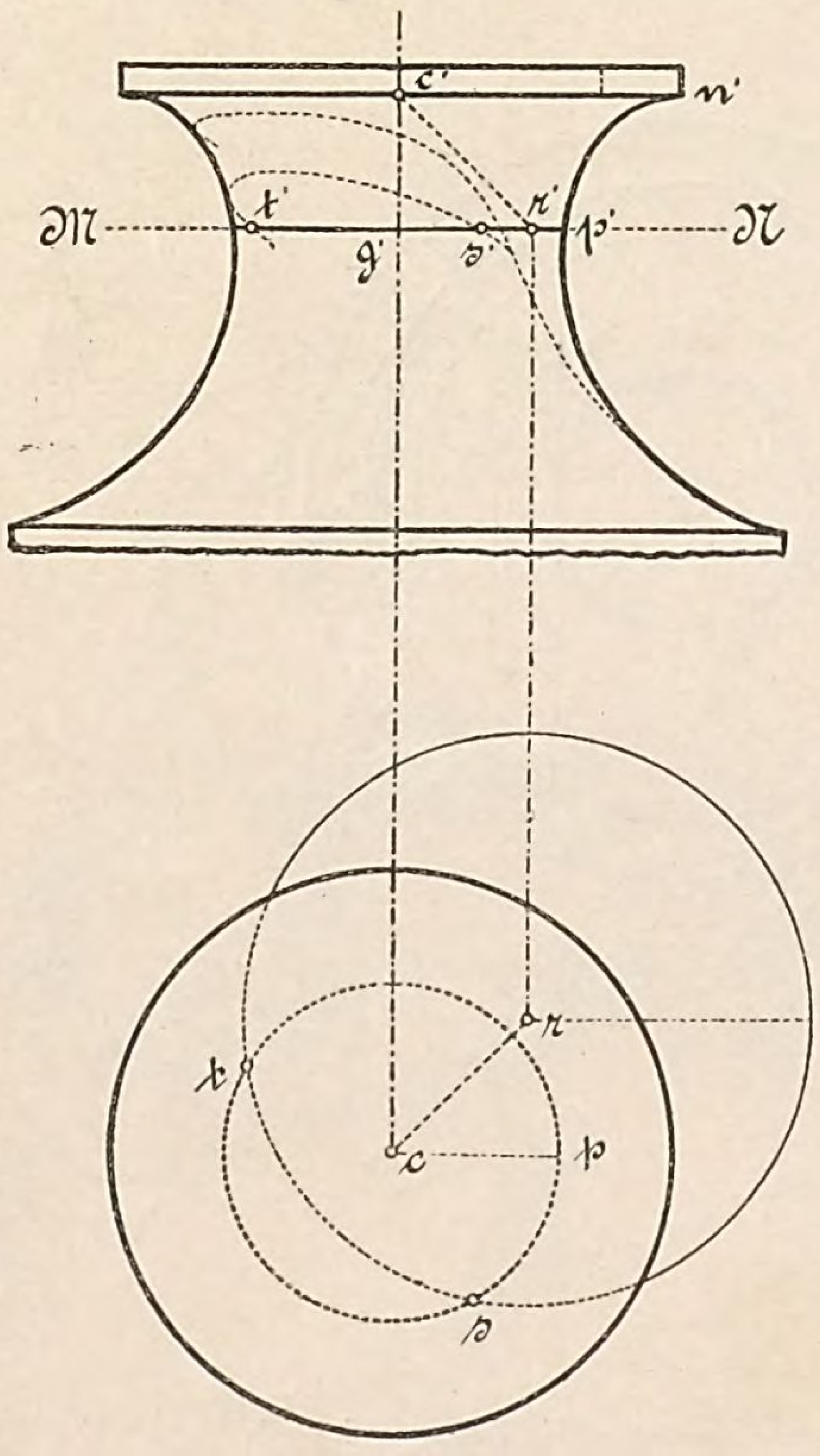
ein äusserer Körper die Beschattung hervorruft, ist die Konstruktion in Art. 62 vorzuziehen. Uebrigens leidet auch dieses neue Verfahren oft an sehr spitzwinkligen Durchschnitten zweier Kreislinien, die es ebenfalls unsicher machen, und zwar gerade an den wichtigsten



Figur 61 a.

Stellen, worin wieder die Verschwommenheit der im Raum vorhandenen Schattierung der Gebilde zum Ausdruck gelangt (vgl. Art. 35).

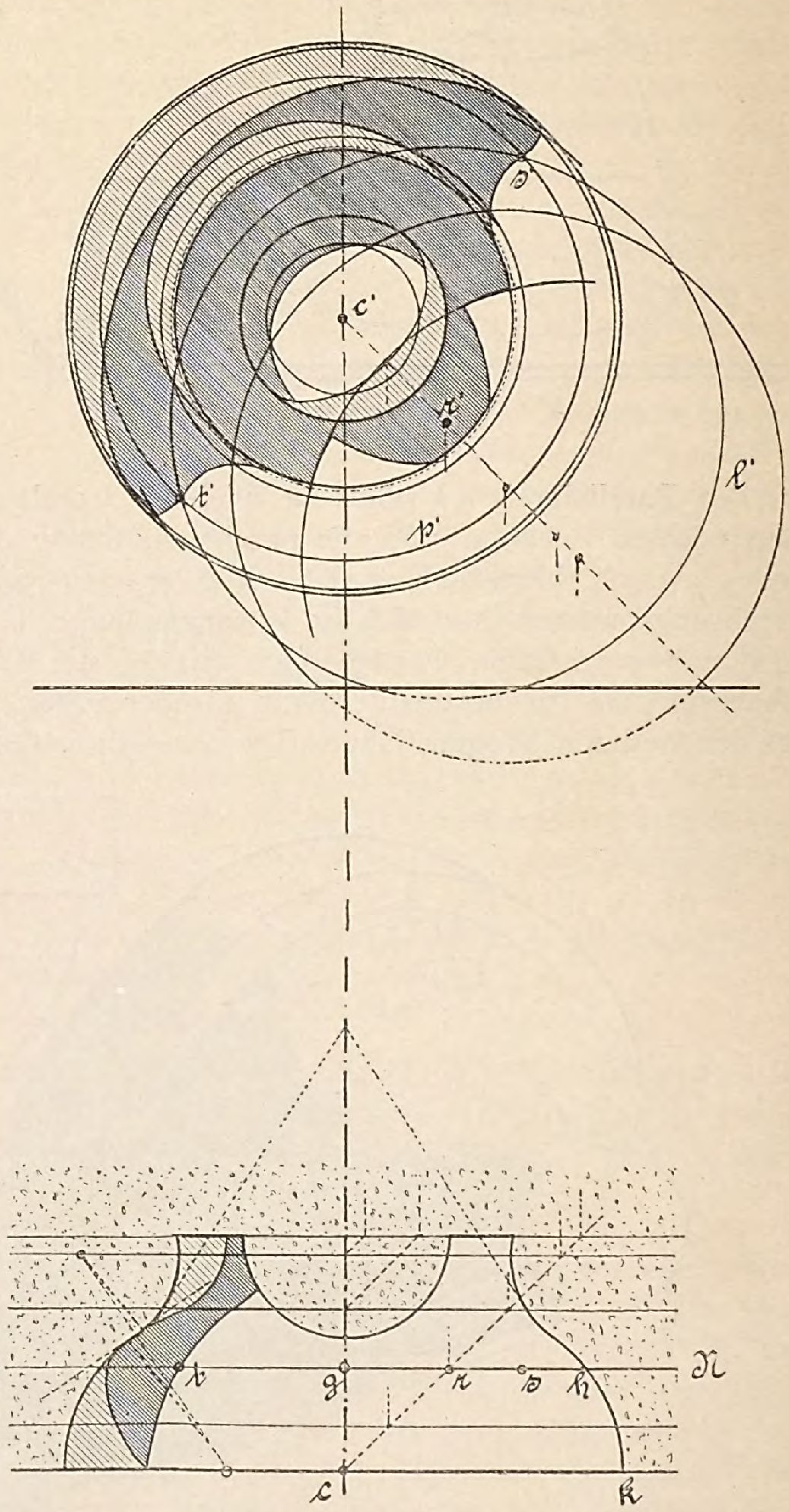
Figur 61 a bringt den Grundgedanken der Konstruktion perspektivisch zur Anschauung, und zwar an



Figur 61 b.

einer Drehungsfläche mit vertikaler Achse und konkaver Meridianlinie.

Man schneidet die Drehungsfläche durch eine Ebene *MN* parallel zur Ebene des schattenwerfenden Randkreises und erhält als Schnittlinie einen Parallelkreis *P*, der im Grundriss als konzentrischer Kreis leicht zu zeichnen ist. Man sucht ferner auf der Schnittebene *MN* den Schlagschatten des Randkreises. Dieser Schatten muss wieder ein Kreis sein, und man zeichnet ihn (nach Art. 10, Folgerung e) rasch, indem man den Schatten *R* des Mittelpunktes *C* auf der Ebene *MN* bestimmt und mit dem Radius des Randkreises einen Kreis um *R* beschreibt. Dieser vom Randkreis geworfene Schattenkreis *L* schneidet den Parallelkreis *P* in zwei Punkten *S* und *T*, welche Punkte der gesuchten Schattengrenze darstellen.



Figur 61 c.

Denn sie gehören der Drehungsfläche an, weil sie auf dem Parallelkreis liegen und gehören dem Schatten des Randes an, weil sie auf dem Schattenkreis *L* liegen. Durch Annahme weiterer Schnittebenen parallel zur Randebene erhält man weitere Paare von Schattenpunkten. In der Nähe des Randes werden die beiden sich schneidenden Kreise fast gleich gross und die Mittelpunkte liegen nahe beisammen, wodurch die Durchschnitte unsicher werden.

Figur 61 b zeigt dieselbe Konstruktion mit Darstellung durch Grundris und Aufriss. Die Ebene *MN* schneidet

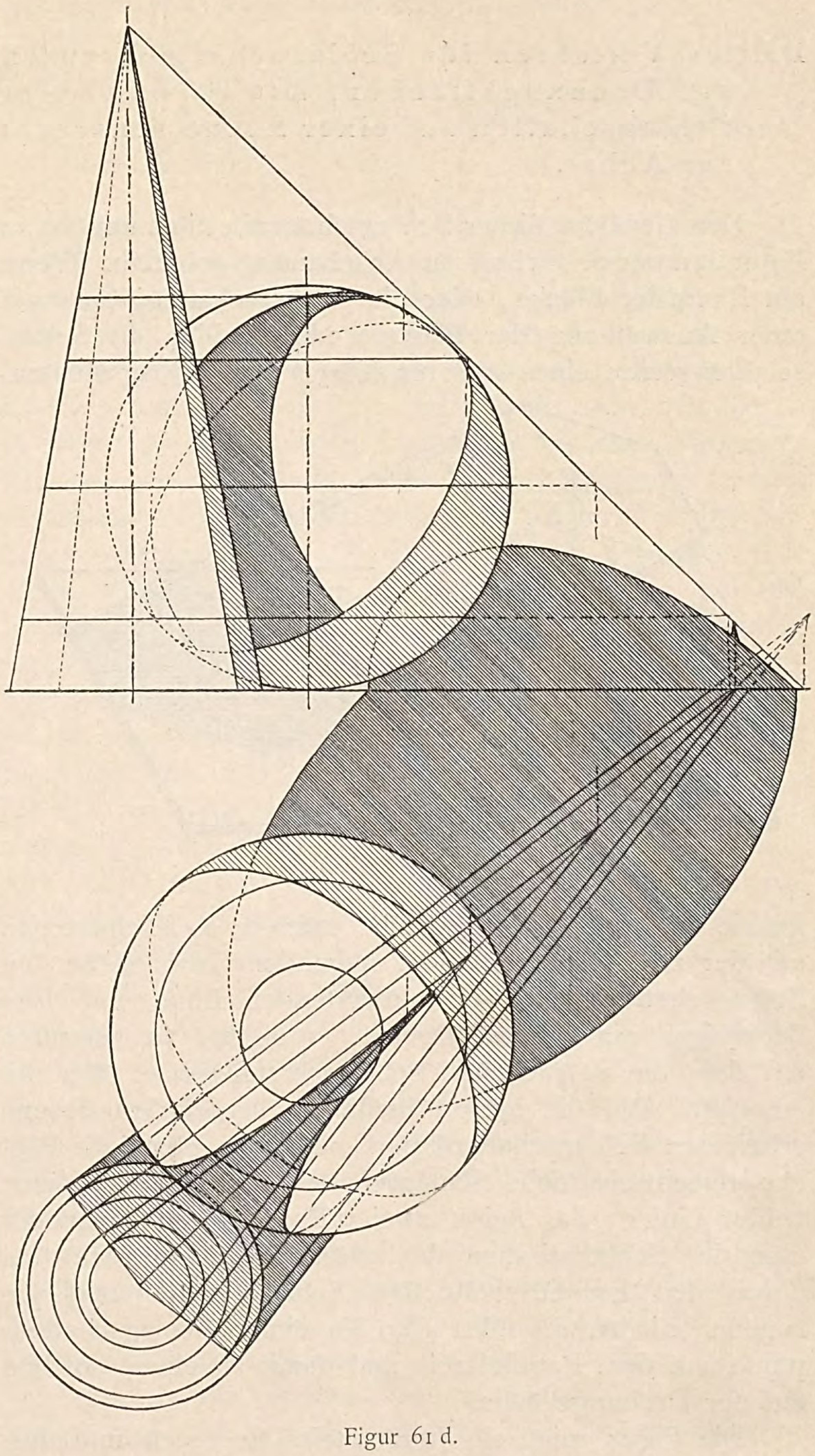
die Drehungsfläche nach dem Parallelkreis $g' p'$, der im Grundriss als konzentrischer Kreis um c mit $c p = g' p'$ erscheint. Der Schatten des Randkreises auf der Ebene MN wird im Grundriss erhalten durch Bestimmung des Schattens von cc' in rr' und durch Beschreiben des Kreises um r mit $r l = c' n'$. Hiedurch entstehen im Grundriss die Schlagschattenpunkte s und t, die nach s' und t' auf die Horizontale MN hinaufzuloten sind.

Figur 61 c bietet eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in diese, für welche die Körperschattengrenze mit Berührungskegeln nach Art. 56, die Schlagschattengrenze in der beschriebenen Weise konstruiert ist. Hier ist im Grundriss angenommen die Schnittebene MN; sie schneidet die Fläche nach dem Parallelkreis $c' p'$, der im Aufriss als Kreis um c' mit $c' p' = g h$ erscheint. rr' ist der Schatten des Mittelpunktes cc' auf der Ebene MN und der Kreis um r' mit $r' l = c k$ ist der Schlagschatten des Randkreises auf dieser Ebene. Die beiden in der Ebene MN liegenden Kreise $c' p'$ und $r' l'$ schneiden sich in s' und t'; diese sind Punkte der Schlagschattengrenze im Aufriss und geben, auf MN hinuntergelotet, die zugehörigen Grundrisspunkte s und t (der Grundriss ist als Horizontalschnitt mit Ansicht nach unten dargestellt).

Auch in Figur 65 g liesse sich der Schatten der kreisförmigen Scheitelöffnung auf der Kuppelfläche mit Hilfe horizontaler Parallelkreisschnitte bestimmen, und zwar für jede beliebige Meridianform der Kuppel. Dasselbe gilt für die Schlagschattengrenzen auf den Kugelflächen der Figuren 65 d, 65 e u. 65 f, endlich für die Schlagschattengrenze auf der hohlen Wulstfläche der Figur 58. Selbst für die Beschattung von geraden und schiefen Kreiskegelflächen durch ihre kreisförmigen Randlinien kann das Verfahren oft näher liegen als das gewöhnliche; so wären z. B. die Schlagschattengrenzen in den Figuren 44 u. 45 damit erhältlich.

Wenn nicht ein Rand des Drehungskörpers, sondern eine durch Auswölbung mit berührenden Lichtstrahlen entstandene Körperschattengrenze den Schlagschatten wirft, wie in Figur 31 b, oder wenn der Schlagschatten von einem äusseren Körper herrührt, so gestaltet sich das Verfahren meist weniger einfach als nach Art. 62; doch dürfte es auch noch in diesem Fall oft eine Abkürzung gegenüber der allgemeinen Lösung bieten. Man sucht von der g a n z e n Körperschattengrenzlinie, welche die zu suchende Schlagschattengrenze als Schatten wirft und zuvor bestimmt sein muss, den Schlagschatten auf irgend einer Parallelkreisebene. Wo der Parallelkreis geschnitten wird von der erhaltenen Hilfsschlagschattenlinie, da liegen zwei Punkte der Schlagschattengrenze auf dem Körper. Für weitere Parallelkreisschnittebenen wird die Hilfsschlagschattenlinie offenbar kongruent der ersterhaltenen, da beide parallele Schnitte desselben Lichtstrahlencylinders bilden. Sie muss also nicht neu konstruiert werden, sondern ist durch paralleles Fortrücken der ersten in der Richtung des Lichtstrahls rasch zu erhalten. Wie weit sie fortrücken muss, hängt in bekannter Weise von der Länge des Achsenstücks zwischen beiden Parallelkreisen ab. Man wird sich die einmal konstruierte Hilfsschlagschattenlinie mit Angabe der Lichtstrahlrichtung auf Pauspapier zeichnen und sie von Kreis zu Kreis verschieben, um auf jedem die zwei Schnittpunkte durchstechen zu können. Doch ist dieses Verfahren schon fast identisch mit dem nächstfolgenden in Art. 62, und nur ausnahmsweise diesem vorzuziehen.

Ein einfaches hübsches Beispiel ist in Figur 61 d gezeichnet. Ein vertikaler Kreiskegel wirft seinen Schatten



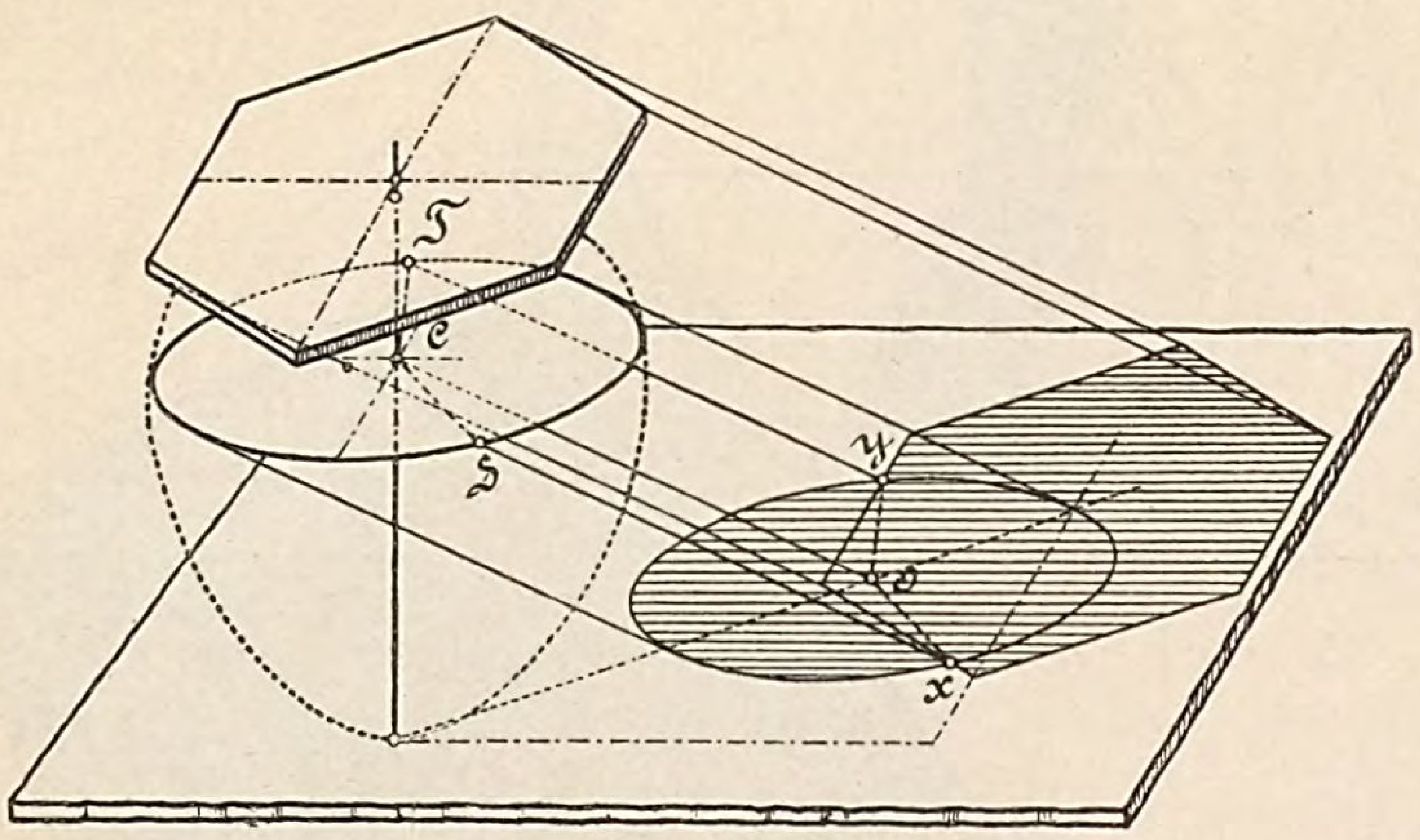
Figur 61 d.

auf eine Kugel oder eine Drehungsfläche mit vertikaler Achse. Eine horizontale Schnittebene schneidet sowohl den Kegel als die Drehungsfläche nach einem Kreis, der im Grundriss als solcher erscheint. Man sucht im Grundriss den Schatten des Kegels auf der Schnittebene, indem in bekannter Weise der Schnittpunkt eines durch die Kegelspitze gezogenen Lichtstrahls mit der Ebene bestimmt und aus diesem Punkt die zwei Tangenten an den Kegelkreis gezogen werden. Wo diese Tangenten den Parallelkreis der Drehungsfläche schneiden, da liegen zwei Punkte

der gesuchten Schlagschattengrenze. Denn die erhaltenen Punkte sind zugleich Punkte der Drehungsfläche und Punkte der am Kegel tangierenden Lichtstrahlenebenen. Das Hinaufloten auf den Parallelkreis im Aufriss liefert die zwei Schattenpunkte auch im Aufriss. Durch Annahme weiterer horizontaler Schnittebenen lassen sich beliebig viele weitere Paare von Schattengrenzpunkten finden.

62. Drittes Verfahren für Schlagschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe zweier Schlagschatten auf einer Ebene senkrecht zur Achse.

Der Gedanke dieser Schlagschattenbestimmung ist in Figur 62a perspektivisch zur Anschauung gebracht. Wenn ein Rand der Fläche, oder die Körperschattengrenze auf einer Auswölbung der Fläche, oder endlich die Selbstschattengrenze eines äusseren Körpers die Schlagschatten-

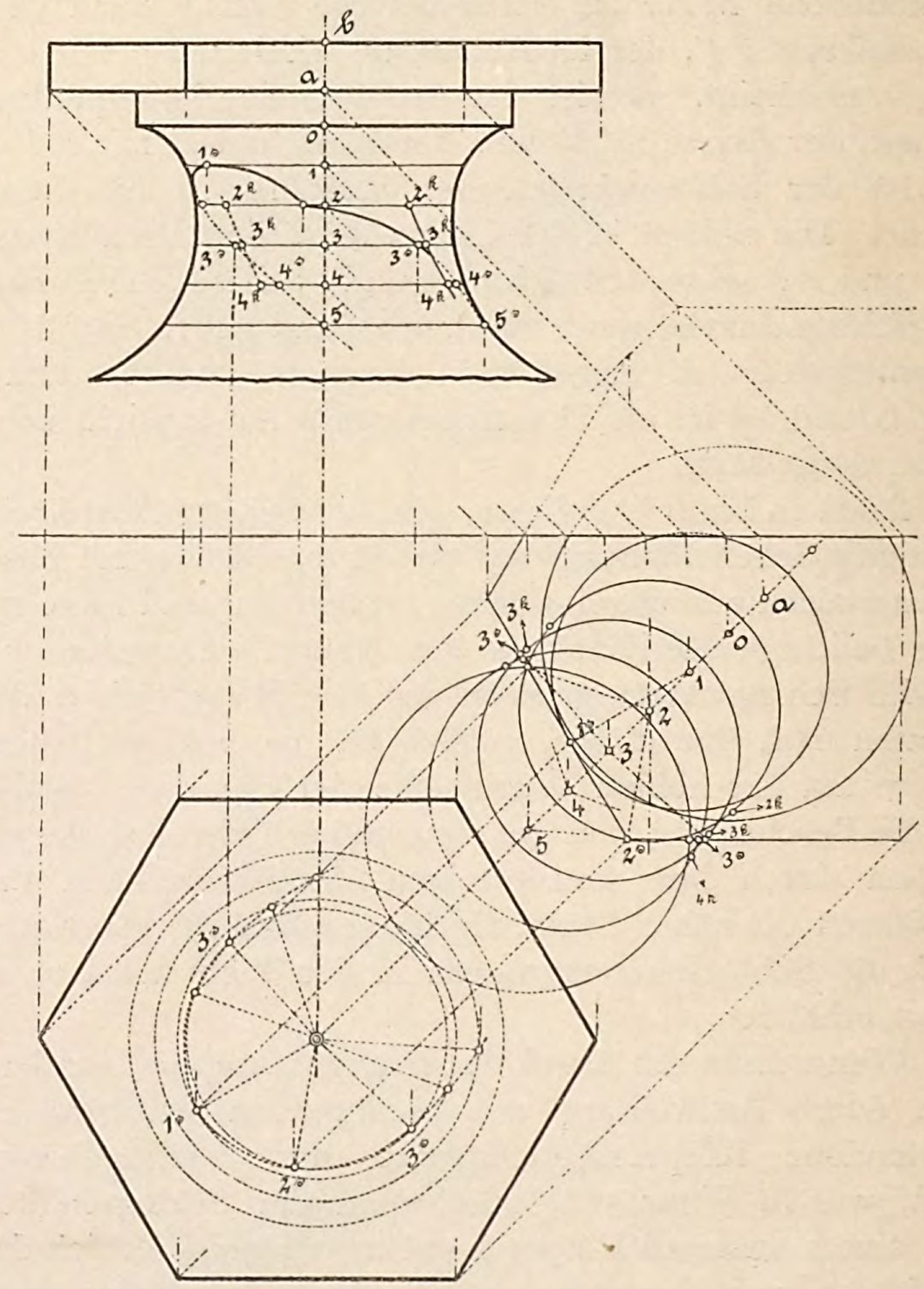


Figur 62a.

grenze auf einer Drehungsfläche erzeugt, so zeichnet man auf der zur Achse senkrecht stehenden Grundebene den Schlagschatten jener schattenwerfenden Linie und dazu denjenigen eines Parallelkreises, von dem zu vermuten ist, dass die zu suchende Schlagschattengrenze über ihn weggeht. Wo die beiden hiedurch auf der Grundebene erhaltenen Schlagschattenlinien sich schneiden, da liegt der gemeinschaftliche Schlagschatten zweier „Fixpunkte" beider Linien, das heisst zweier Punkte, von denen der eine der Schlagschatten des andern ist. Ein rückwärts durch den gemeinschaftlichen Schlagschattenpunkt gezogener Lichtstrahl führt also zu einem Schlagschattenpunkt auf dem Parallelkreis und damit zu einem solchen auf der Drehungsfläche.

Die Figur zeigt ein horizontales Sechseck und darunter einen beliebig ausgewählten Parallelkreis der durch ihren punktierten Umriss angedeuteten Drehungsfläche. Die Umrisse der Schlagschatten, die beide Figuren auf die Horizontalebene werfen, schneiden sich in den Punkten x und y. Die rückwärts durch diese Punkte bis zum Parallelkreis gezogenen Lichtstrahlen treffen diesen in S und T; diese Punkte gehören der Schlagschattengrenze auf der Drehungsfläche an. Sie werden schärfer erhalten, wenn man im Schattenkreis die Radien ox und oy und im Parallelkreis die Radien CS und CT parallel zu jenen zieht.

Figur 62b zeigt ein durchgeführtes Beispiel. Es sind auf der Grundebene gezeichnet die Schlagschatten der sechsseitigen Deckplatte und der Parallelkreise *o, 1, 2, 3, 4, 5*. Die Schlagschatten der Parallelkreise *2, 3, 4* sind nach Art. 59 zur Bestimmung je zweier Körperschattengrenzpunkte auf jedem dieser Kreise mitbenützt (*2 k, 3 k, 4 k*). Schattenkreis *1* berührt den Sechseckschatten in *1 s*, also enthält Parallelkreis *1* den obersten Punkt der Schlagschattengrenze *1 s*. Die Schnittpunkte der Schlagschattenkreise *4* und *5* mit dem Sechseckschatten fallen innerhalb des Kurvenstücks *2 k, 3 k, 4 k*, das auf der Horizontalebene den Schlagschatten der Fläche begrenzt. Hiedurch ist ausgedrückt, dass die auf den Parallelkreisen *4*



Figur 62b.

und *5* erhaltenen Schlagschattenpunkte keine wirklichen Schattengrenzpunkte sind, sondern schon in die Körperschattenfläche fallen. Diese Punkte gehören zwar der Schnittlinie an, die das sechsseitige (vielmehr achtseitige) von der Deckplatte ausgehende Lichtstrahlenprisma mit der Drehungsfläche bildet; die Schnittlinie ist aber nur soweit Schlagschattengrenze, als sie auf die Lichtfläche des Drehungskörpers zu liegen kommt.

Dieses Verfahren kann zuweilen bei Drehungskörpern, deren Selbstbeschattung nicht von Parallelkreiskanten herrührt, an die Stelle des in Art. 61 beschriebenen oder der allgemeinen Lösung treten; auch wird es in verwickelten Fällen oft willkommene Proben für das Resultat der allgemeinen Lösung liefern; aber allgemeine Brauchbarkeit kann es so wenig beanspruchen, wie die mit ihm

verwandte und kombinierbare Körperschattenbestimmung nach Art. 59.

63. Sätze über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse.

a) Soweit der Umriss einer Drehungsfläche durch Meridiane gebildet ist, beginnen und endigen die Körperschattengrenzkurven im Aufriss an den Berührungspunkten der am Umriss tangierenden Lichtstrahlprojektionen. Die Kurven gehen in diesen Punkten mit Berührung am Umriss von ihrem sichtbaren Teil zum unsichtbaren über; doch ist die Berührung häufig eine solche von sehr kleinem Krümmungshalbmesser, so dass sie sich von einem Schnitt wenig unterscheidet. Die Grundrisse dieser Punkte liegen auf dem horizontalen Durchmesser des Grundplans.

b) Jedem solchen Kurvenpunkt entspricht ein gleich hoch liegender auf dem Aufriss der Achse des Drehungskörpers, da die Grenzkurve im Raum symmetrisch ist zu einer Lichtstrahlenebene, die durch die Achse gelegt wird. Die Grundrisse dieser Punkte liegen auf dem vertikalen Durchmesser des Grundplans und auf denselben Parallelkreisen wie die vorigen, wie überhaupt die ganze Grenzkurve im Grundriss symmetrisch ist zum Durchmesserlichtstrahl.

c) Wo der Umriss der Drehungsfläche eine vertikale Tangente hat, da finden sich die Schattenpunkte auf dem zugehörigen Parallelkreis da, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. Im Grundriss berührt im allgemeinen die Schattengrenzlinie in diesen Punkten deren Parallelkreis und geht, wenn dieser den Umriss bildet, vom sichtbaren Teil zum unsichtbaren über.

d) Die höchsten und tiefsten Punkte der Körperschattengrenze liegen im Grundriss auf einem parallel zum Lichtstrahl gezogenen Durchmesser. Ferner liegen diese Punkte auf denselben Parallelkreisen wie die Berührungspunkte von Tangenten, die im Aufriss unter dem Lichtstrahlenneigungswinkel $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$ (s. Art. 38) an den Umriss der Drehungsfläche gezogen werden. Aus diesen zwei geometrischen Orten ergeben sich die Punkte in beiden Projektionen.

e) Schlagschattengrenzen, die vom Körper selbst geworfen werden, gehen im Grundriss und Aufriss berührend am Umriss vom sichtbaren Teil zum unsichtbaren über. Im Aufriss liegen die auf die Achse fallenden Kurvenpunkte gleichhoch mit den Berührungspunkten am Umriss, da auch die Schlagschattenkurve im Raum symmetrisch ist zur Lichtstrahlenmeridianebene. Aus demselben Grund erscheint der Grundriss der Schlagschattenkurve symmetrisch zum Durchmesserlichtstrahl.

f) Der höchste Punkt einer solchen Selbstbeschattungsgrenze liegt im Grundriss auf dem Durchmesserlichtstrahl. Ferner liegt der Punkt auf demselben Parallelkreis wie der Schnittpunkt, welchen die unter d) genannte Tangente mit dem Umriss der Drehungsfläche bildet.

g) Endpunkte einer Selbstbeschattungsgrenzlinie an deren Anstossen an einer Körperschattengrenzlinie sind meist zugleich Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und einem Lichtstrahl, das heisst die Schlagschattengrenze hat an ihrem Endpunkt eine Tangente von 45^0 Neigung (sowohl im Grundriss als im Aufriss). Die Erscheinung findet sich da, wo die Schlagschattengrenze, als Schnitt des Lichtstrahlencylinders mit der Drehungsfläche aufgefasst und in dieser Eigenschaft fortgesetzt gedacht, über den letzten Lichtstrahl, den sie erreicht, nicht hinausgehen könnte, weil er die äusserste Mantellinie des Lichtstrahlencylinders bildet.

Schatten auf Drehungsflächen mit schiefgerichteter, aber einer Grundebene gleichlaufender Achse. 64.

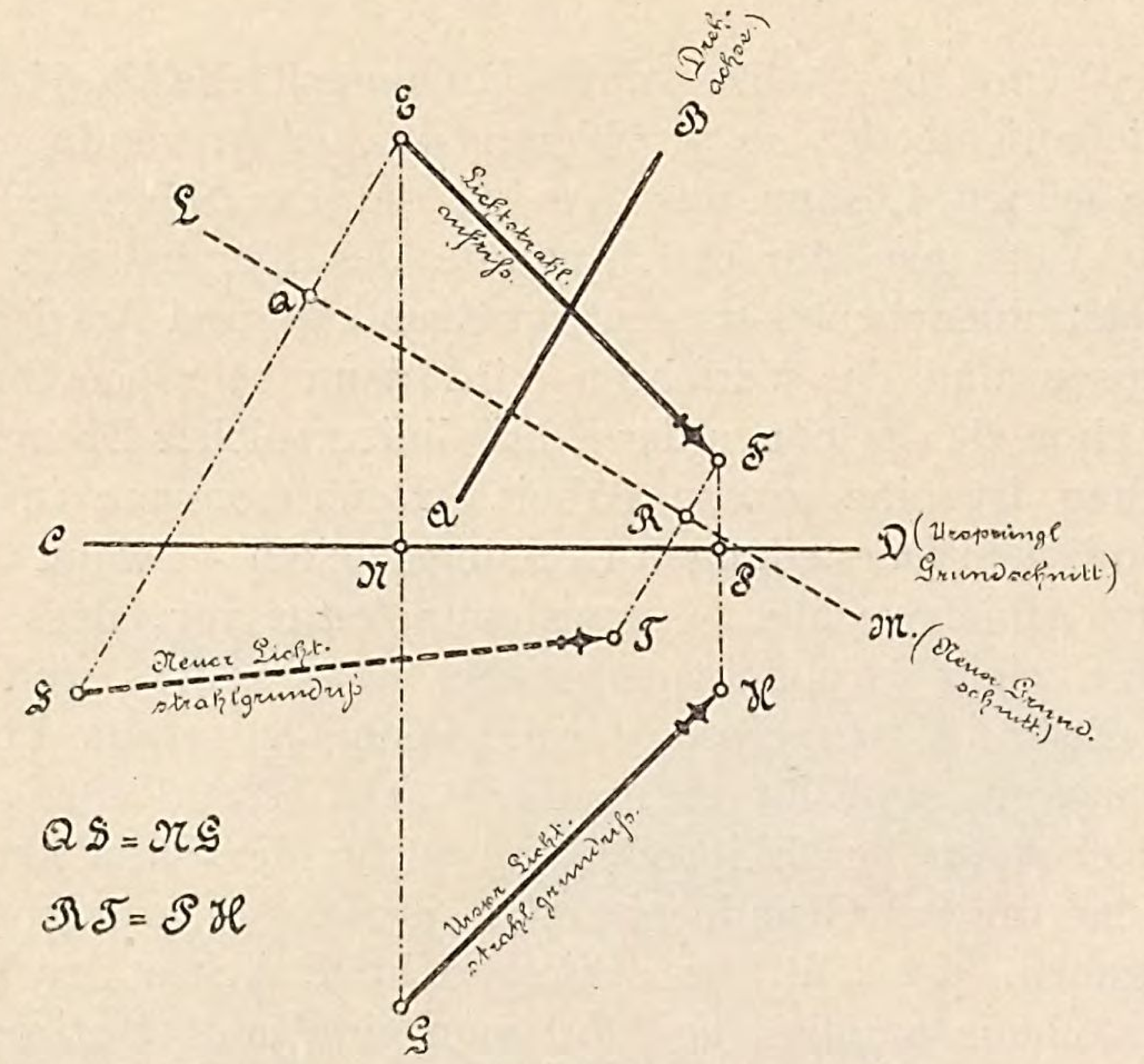
Wenn die Achse einer Drehungsfläche beliebig schiefgerichtet ist, so projizieren sich bei Anwendung der allgemeinen Lösung aus Art. 30 die Parallelkreise, die zum Aufsuchen der Durchschnitte des Körpers mit den Lichtstrahlenebenen dienen, im Grundriss und Aufriss als Ellipsen und das Verfahren wird dann sehr bemühend; ja schon das Zeichnen der Umrisslinien solcher Drehungsflächen ist eine grosse Arbeit. Doch kommen in den technischen Darstellungen Drehungsflächen — wenn überhaupt schiefgerichtet — meist nur derart vor, dass ihre Achse einer Grundebene parallel ist, so dass sich die Parallelkreise auf dieser Grundebene als gerade Linien projizieren, und für diesen Fall giebt es ein Mittel, die Konstruktion der Ellipsen, als welche die Parallelkreise in der andern Grundebene sich projizieren würden, zu umgehen. Ist z. B. die schiefgerichtete Achse der Vertikalebene parallel, so führt man eine neue Horizontalebene ein, die senkrecht zur Drehungsachse steht, auf welcher also die Parallelkreise sich als Kreise projizieren, und bestimmt die Richtungen der beiden Projektionen, welche der Lichtstrahl gegenüber dem neuen Grundschnitt annimmt. Wie sich die Drehungsfläche schattiert im neuen Grundebenensystem mit den neuen Lichtstrahlprojektionen, so muss sie sich auch im ursprünglichen Grundebenensystem mit den ursprünglichen Lichtstrahlenprojektionen schattieren, da ja durch Aenderung der Projektionsebene die Richtung des Lichtstrahls gegenüber der Fläche nicht geändert wird.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Lichtstrahlprojektionen im neuen Grundebenensystem. Die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls bleibt gegenüber der Drehungsachse in derselben Richtung wie zuvor, weil ja die Vertikalebene unveränderlich bleibt; es ändert sich nur der Winkel, den der Grundschnitt mit dieser Projektion bildet. — Zur Bestimmung der neuen Horizontalprojektion dient folgende Betrachtung: Da die ursprüngliche Vertikalebene bleibt, so bleiben auch die ursprünglichen horizontalen Entfernungen aller Punkte eines Lichtstrahls von der Vertikalebene dieselben wie zuvor. Diese Entfernungen erscheinen ebensowohl im neuen Grundriss in ihrer wahren Grösse als im ursprünglichen Grundriss, da sie der neuen Horizontalebene ebensowohl parallel sind wie der ursprünglichen. — Man hat also nur auf einem beliebigen Lichtstrahl des ursprünglichen Grundebenensystems zwei beliebige

Punkte anzunehmen und deren Abstände vom Grundschnitt im neuen Grundriss ebenso gross anzunehmen als sie im ursprünglichen Grundriss waren.

Ist in Figur 64a *A B* die gegebene Drehungsachse, *C D* der ursprüngliche Grundschnitt, *E F* und *G H* die ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen, *L M* senkrecht zu *A B* der neue Grundschnitt, so macht man $QS = NG$ und $RT = PH$, wobei *E S* und *F T* senkrecht zum neuen Grundschnitt *L M* stehen. Es ist dann *S T* die neue Horizontalprojektion, *E F* die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls.

Das Verfahren ist übertragbar auf Drehungsflächen, die der Horizontalebene parallel sind, nicht aber auf solche,

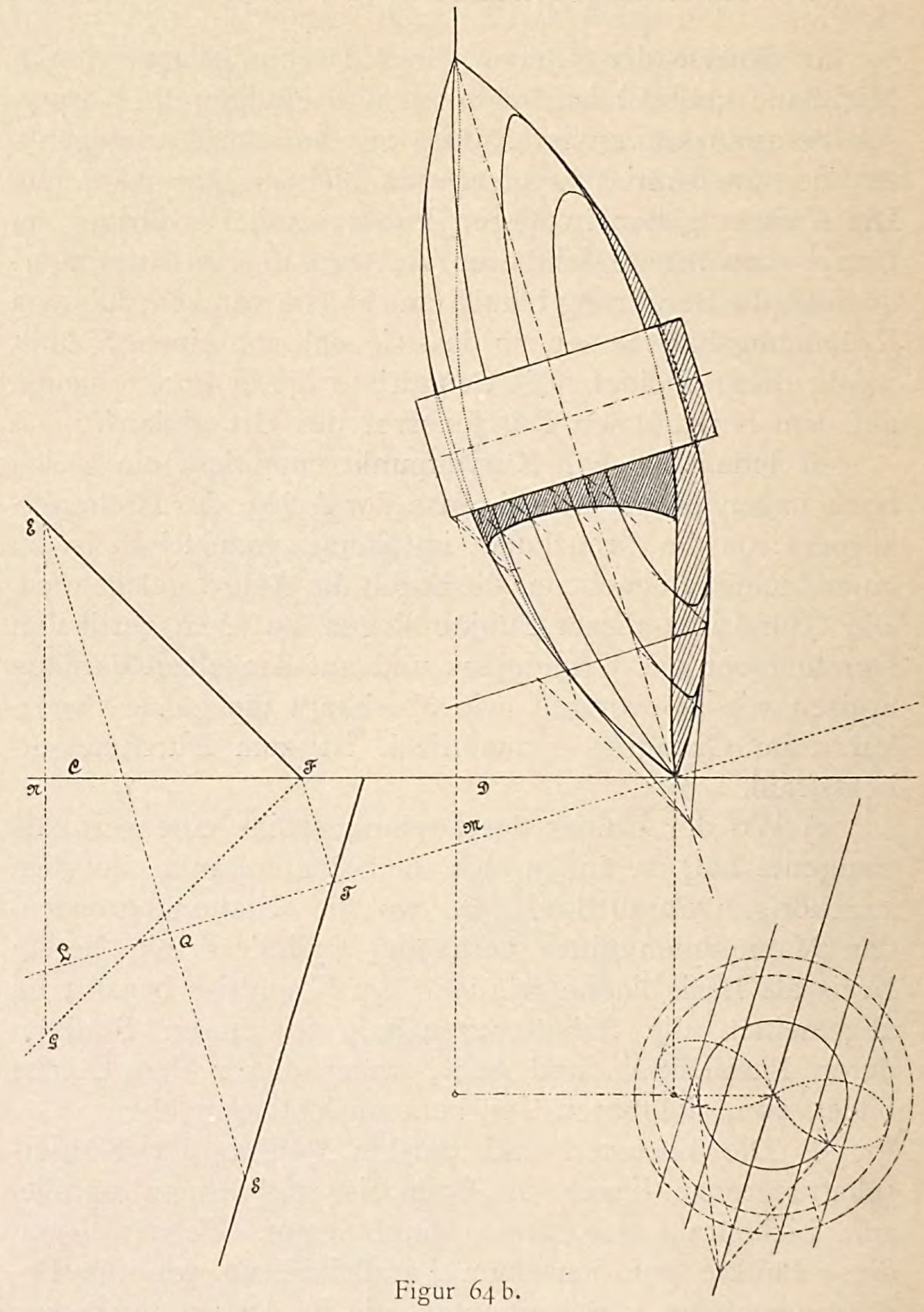


Figur 64a.

deren Achse keiner Grundebene parallel ist, weil bei diesen das gegebene Bild der Drehungsfläche in den neuen Projektionen sich ändern würde.

Der in Figur 64b nur als Aufriss gegebene Drehungskörper mit geneigter Achse parallel zur Vertikalebene (die Achse ist auch im Grundriss gezeichnet) bietet ein durchgeführtes Beispiel.

Durch den Punkt *F* des Grundschnitts *N D* ist ein Lichtstrahl gezogen und auf diesem ein beliebiger Punkt mit den Projektionen *G* und *E* angenommen. *L M* senkrecht zur Achse des Drehungskörpers ist der neue Grundschnitt. *E Q* und *F T* stehen senkrecht zu *L M*. *Q S* ist gleich *N G* aufgetragen. (Da der Lichtstrahl durch den Grundschnitt *N D* gezogen worden ist, so ist das in Figur 64a vorhandene Mass *P H* hier gleich Null geworden, also ist auch das frühere Mass *R T* gleich Null zu machen, das heisst der Endpunkt *T* der neuen Lichtstrahlprojektion fällt nun in den neuen Grundschnitt *L M*.) *E F* und *S T* sind die zum Grundschnitt *L M* gehörigen Lichtstrahlprojektionen, mit deren Benützung der Körper schattiert worden ist. Zu diesem Zweck wurde im neuen Grundebenensystem sein Grundriss gezeichnet, in dem die Parallelkreise sich als Kreise projizieren. Die Schattengrenzen sind teils nach dem in Art. 30 beschriebenen allgemeinen Verfahren, teils mit den Berührungskegeln nach Art. 56 bestimmt, wobei nur die veränderte Lichtstrahlrichtung einen Unterschied hereingebracht hat. Auch der Schlagschatten des Körpers auf der Vertikalebene kann mit Hilfe der neuen Lichtstrahlprojektionen erhalten werden. Der auf die ursprüngliche Horizontalebene fallende Teil des Schlagschattens lässt sich, nachdem die



Figur 64b.

Schattengrenzlinie auf der Vertikalebene ganz konstruiert ist, aus dieser mit Hilfe der ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen und des ursprünglichen Grundebenensystems ableiten, da ja alle Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte dieser beiden Schattenfiguren Lichtstrahlen sind.

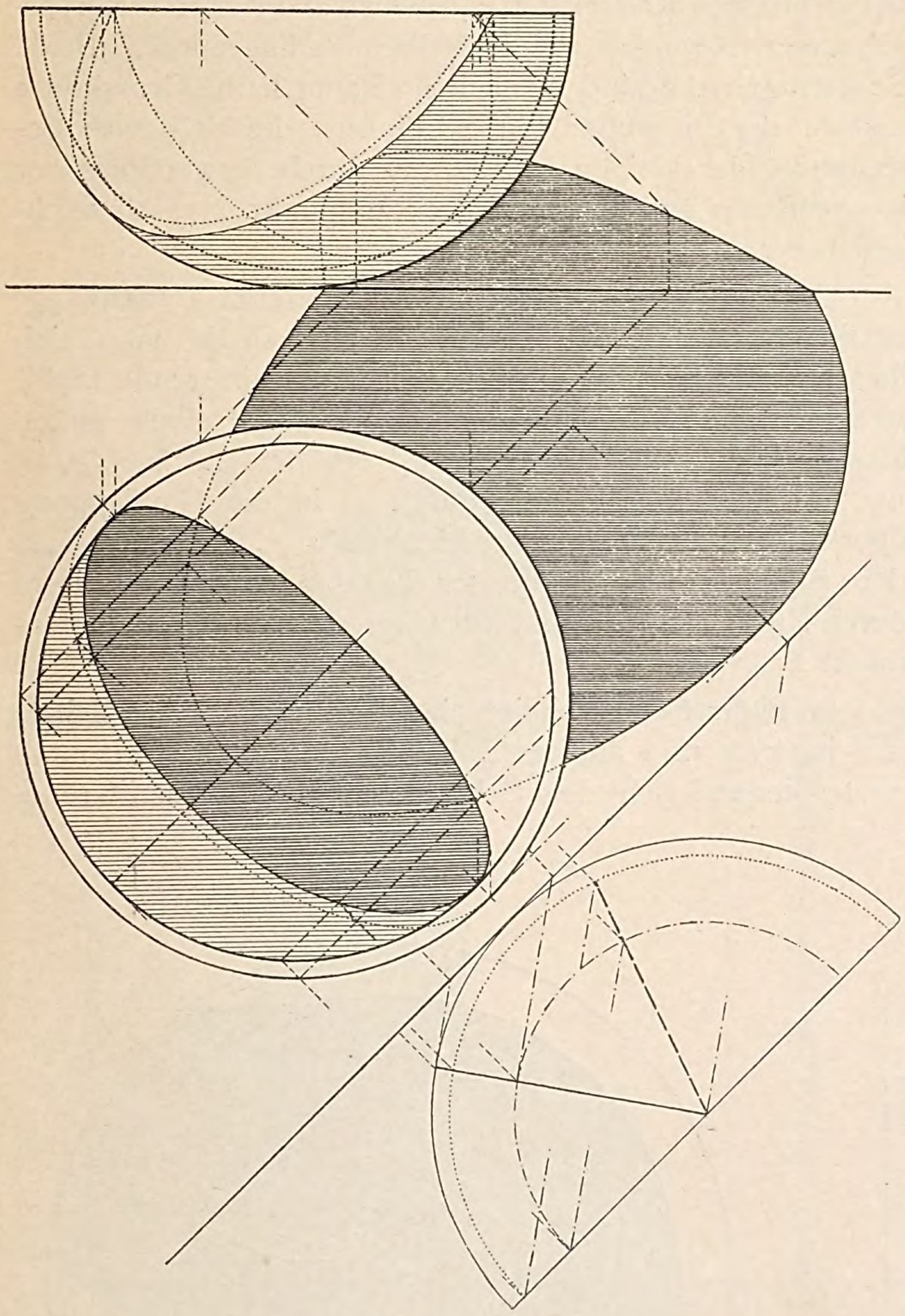
Ein zweites Hilfsmittel zur Körperschattenbestimmung auf schiefgerichteten Drehungsflächen mit Achse parallel zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel“. S. Art. 97.

VIII. Schatten auf Kugelflächen.

Die Umklappung oder schräge Seitenansicht als Hilfsmittel, elliptische Projektionen der Schnittkreise zu umgehen. 65.

Bei Anwendung der in Art. 28 erklärten allgemeinen Lösung für die Beschattung gekrümmter Flächen auf die Kugelfläche, sei sie konvex oder konkav, werden die

Durchschnitte der vertikalen Lichtstrahlenebenen mit der Kugel kreisförmig; denn alle ebenen Durchschnitte der Kugel sind Kreise. Um nun das Konstruieren der Ellipsen zu umgehen, als welche diese Kreise in der Vertikalprojektion erscheinen würden, kann man die Lichtstrahlenebenen in die horizontale Grundebene umklappen und in dieser Umklappung, in welcher die Kreise sich als Kreise darstellen, die Schnittpunkte und Berührungspunkte der Lichtstrahlen aufsuchen. Dabei ist wie in Art. 38 zu beachten, dass die Neigung des Lichtstrahls



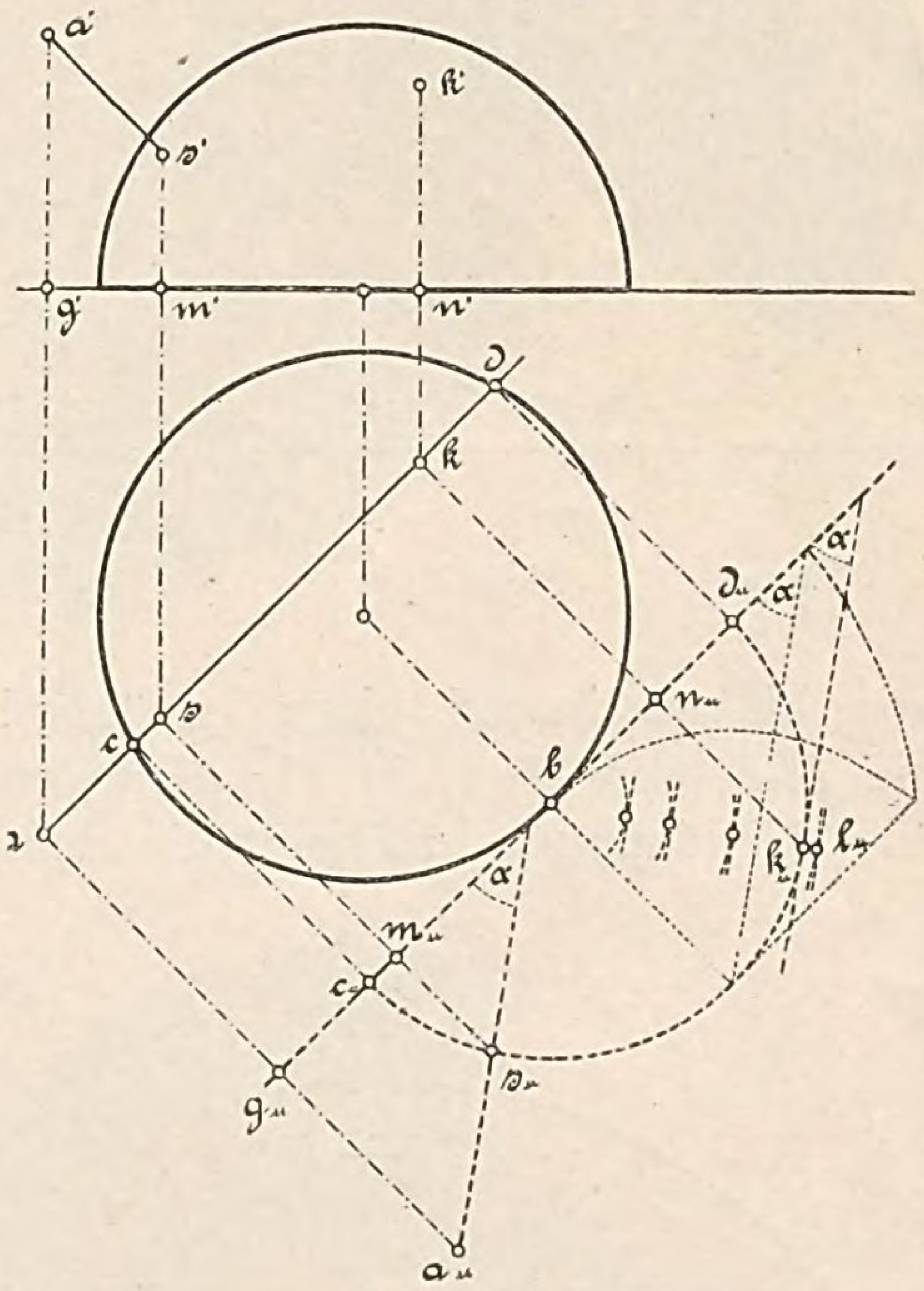
Figur 65 c.

in seiner eigenen (umzuklappenden) vertikalen Ebene nicht 45^0 beträgt, sondern flacher ist, nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über der Seite a (der Winkel ist $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$). Damit die umgeklappten Kreise nicht auf die Kugelprojektion fallen und die Figur verwirren, schiebt man sie vor dem Umklappen parallel in der Richtung des Umklappens fort, alle in dieselbe Ebene, so dass die Umklappung auch als eine vollständige schräge Seitenansicht aufgefasst werden kann.

Anstatt der vertikalen Lichtstrahlenebenen, welche die Schatten zuerst im Grundriss liefern, benützt man, wenn man die Grundrissschatten nicht braucht, besser die vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen; denn die Kugel ist ja auch eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene. Die Durchschnitte dieser Ebenen mit der Kugel werden wieder Kreise und mit Einschluss der Lichtstrahlen wieder in die Vertikalebene umgeklappt. Der Winkel des Lichtstrahls mit der Umklappungsbasis oder Lichtstrahlenprojektion ist wieder derselbe wie bei Umklappung im Grundriss, nämlich $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$.

Beispiel für die Umklappung in die Grundrissebene: Auf einer Halbkugel, deren Basis in der Horizontalebene liegt, ist der Schlagschatten eines äusseren Punktes zu suchen und die Körperschattengrenze zu bestimmen (Figur 65 a).

Man zieht durch den schattenwerfenden Punkt aa' einen Lichtstrahl; seine vertikale Ebene denkt man sich



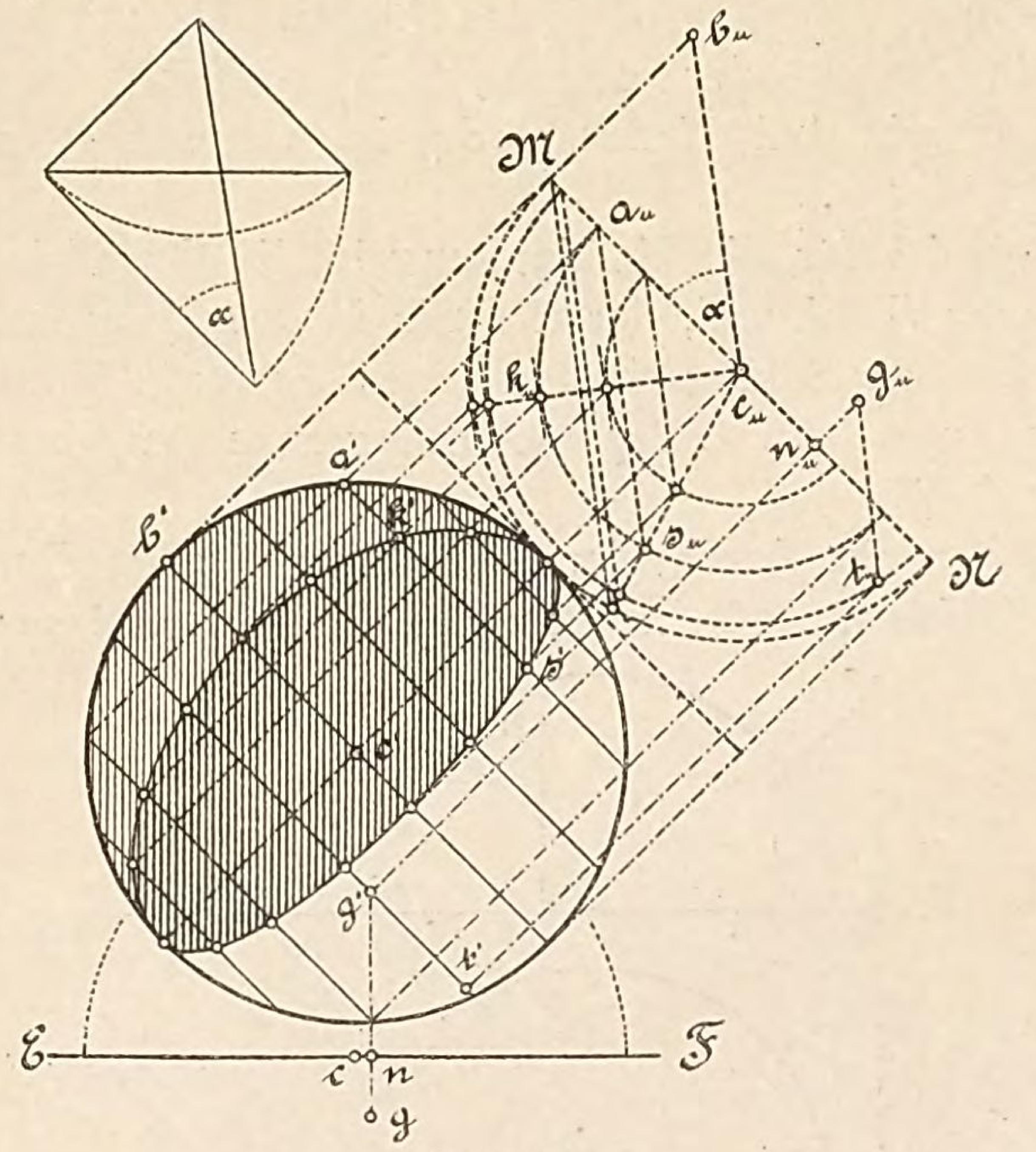
Figur 65 a.

bis b parallel verschoben und dann in die Horizontalebene umgeklappt. In der Umklappung rückt c nach c_u, d nach d_u, a nach a_u, indem $g_u a_u = g' a'$ gemacht wird. Der Schnitt mit der Kugel erscheint in der Umklappung als Halbkreis über $c_u d_u$, der Lichtstrahl als eine Linie durch a_u, die mit der Umklappungsbasis $g_u d_u$ den Winkel α einschliesst (seine Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich). Der Schnittpunkt dieses umgeklappten Lichtstrahls mit dem Halbkreis ist der Schattenpunkt in der Umklappung s_u; sein Zurückklappen in den Grundriss giebt dort den Schattenpunkt s; das Hinaufloten von s in den Aufriss mit $m' s' = m_u s_u$ liefert den Schattenpunkt s' im Aufriss.

Ein zweiter Lichtstrahl, in der Umklappung als Tangente an den Halbkreis gezogen, ergiebt in seinem Berührungspunkt k_u einen Körperschattengrenzpunkt in der Umklappung; er ist zurückzuklappen nach k und dieser Grundriss des Punktes hinaufzuloten in den Aufriss nach k' mit $n' k' = n_u k_u$. Durch weitere Schnittebenen parallel zu $a\,d$ erhält man beliebig viele weitere Körperschattengrenzpunkte. In der Umklappungsfigur erscheint die Grenzlinie als ein Radius $b\,l_u$.

Beispiel für die Umklappung in die Vertikalebene. Eine Halbkugelfläche sei vertieft in der Vertikalebene; es ist ihre Selbstbeschattung zu bestimmen, und zwar nur im Aufriss (Figur 65b).

Man denkt sich die vertikalprojizierende Ebene eines Lichtstrahls, der durch den Kugelmittelpunkt geht, parallel



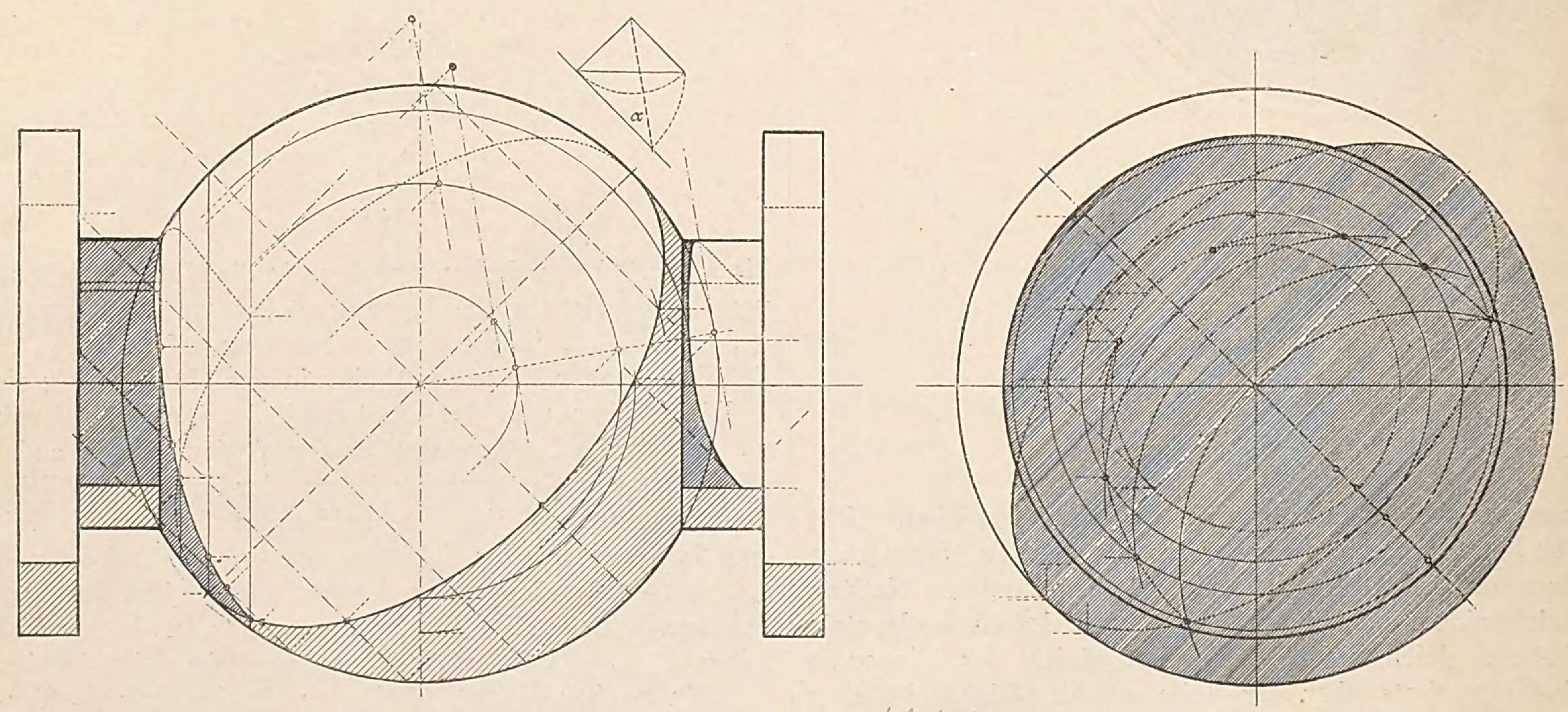
Figur 65b.

fortgeschoben bis zu irgend einer genügend weit entfernten Linie MN und dann in die Grundebene umgeklappt. In der Umklappung erscheint die Schnittlinie der Ebene mit der Kugel als Halbkreis und der Lichtstrahl $b_u c_u$ unter dem Winkel α gegen MN geneigt.

Durch einen beliebigen Randpunkt a' zieht man einen Lichtstrahl und klappt dessen ebenfalls verschoben gedachte vertikalprojizierende Ebene um MN um. Die Schnittlinie der Ebene mit der Kugel erscheint als konzentrischer Kreis um c_u, der Lichtstrahl als eine Linie durch a_u parallel zu $b_u c_u$; er schneidet den Schnittkreis zum zweitenmal im Punkt s_u, welcher den Schlagschatten von a' in der Umklappung darstellt und zurückgeklappt den Aufrissschattenpunkt s' ergiebt. Eine Tangente an den Schnittkreis parallel zu $b_u c_u$ liefert als berührender Lichtstrahl in der Umklappung den Körperschattengrenzpunkt k_u und dessen Zurückklappen den Aufrisspunkt k'. Alle weiteren Schlagschattenpunkte liegen in der Umklappung auf demselben Radius mit s_u, ebenso alle weiteren Körperschattengrenzpunkte auf demselben Radius mit k_u. Beide Schattengrenzen sind hienach im Raum halbe Grosskreise und in der Projektion halbe Ellipsen, die sich nach Bestimmung der kleinen Halbachsen durch Anwendung der Konstruktion auf den einzigen Randpunkt b' rasch zeichnen lassen.

Um den Schlagschatten eines äusseren Punktes gg' zu finden (EF ist der Grundschnitt), denkt man sich diesen Punkt ebenfalls auf die vertikalprojizierende Lichtstrahlenebene MN projiziert und mit derselben umgeklappt. Die Umklappung g_u wird erhalten durch $n_u g_u = ng$. Ist der Parallelkreis durch g' in die Umklappung übertragen, so liefert der Lichtstrahl $g_u t_u$ parallel $b_u c_u$ den Schattenpunkt t_u in der Umklappung, und dieser durch Zurückklappen und Zurückprojizieren den Schattenpunkt t' im Aufriss.

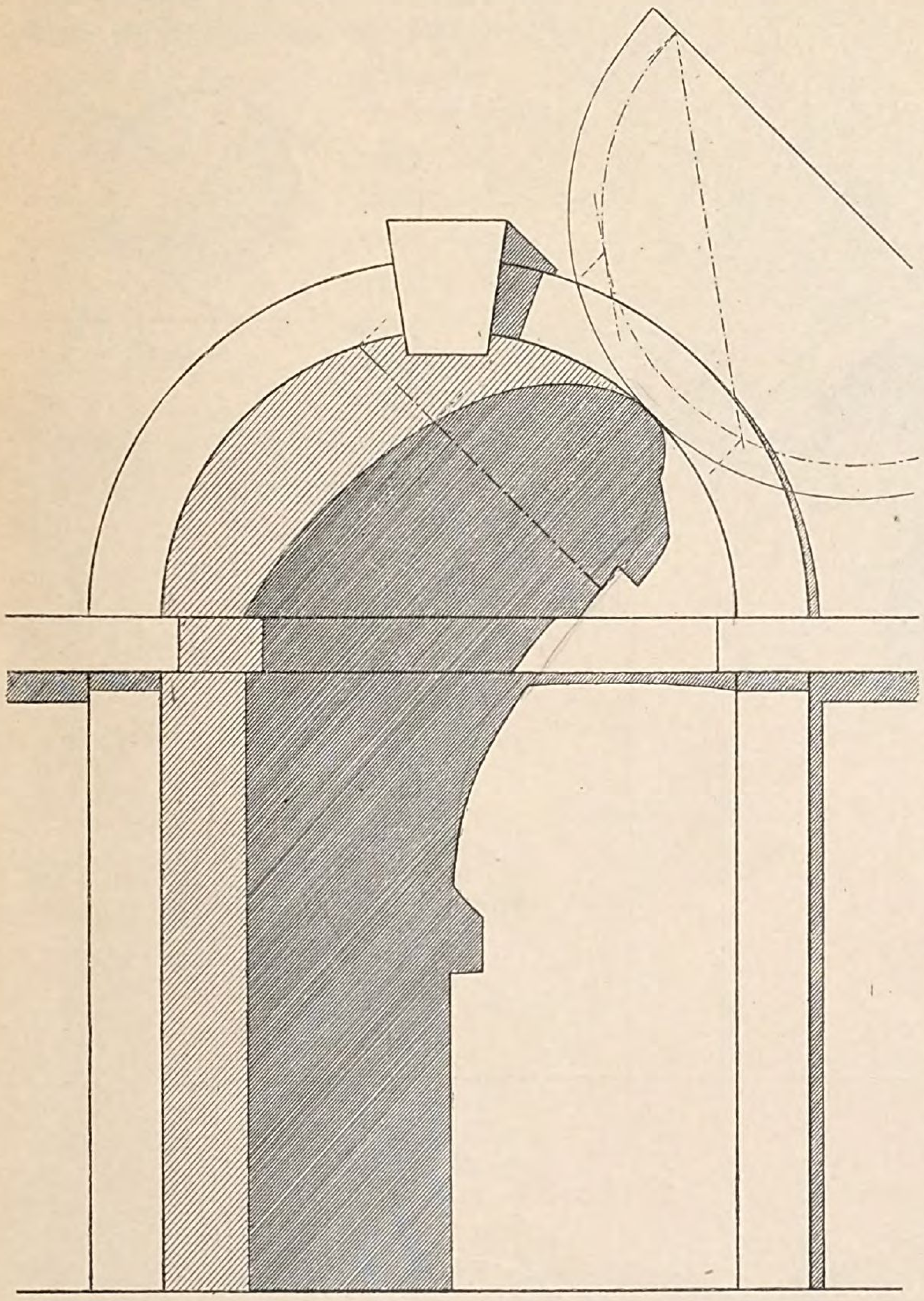
In Figur 65c erscheint eine halbkugelförmige Schale mit inneren und äusseren Schatten auf der Horizontalebene liegend samt dem Schlagschatten auf beiden Grundebenen. Alle Konstruktionsmittel sind durch das Vorangehende erklärt.



Figur 65d.

In Figur 65d beschattet ein aussenliegender, in der Seitenprojektion gegebener Kreis die Kugelfläche, und deren Körperschattengrenze erzeugt eine Schlagschatten-

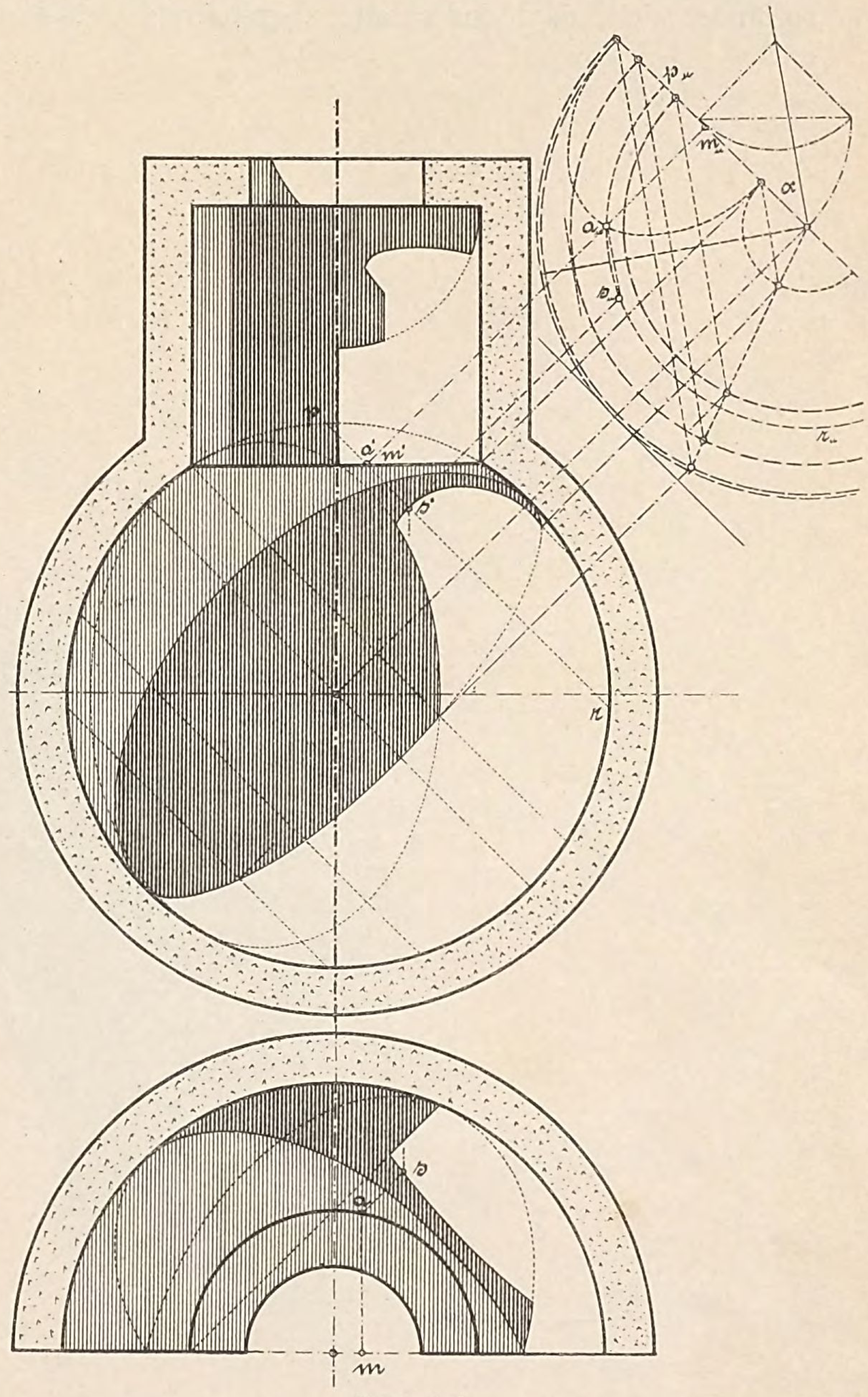
grenze auf einer Cylinderfläche. Die vertikalprojizierenden Lichtstrahlenschnittebenen sind auf die ihnen parallele Grosskreisebene projiziert und mit dieser umgeklappt; nur die Uebertragung der schattenwerfenden Kreispunkte in die Umklappung erfordert einige Bemühung des räumlichen Anschauungsvermögens. In die Seitenprojektion lassen sich die Schattenpunkte mit Hilfe von Parallelkreisen übertragen, deren Ebenen normal zur Längenachse des Körpers stehen; zeichnet man auch die benützten Lichtstrahlen in der Seitenprojektion, so erhält man Proben. Eine zweite Konstruktion der Schlagschatten-



Figur 65 e.

grenze, bei welcher die Schattenpunkte zuerst in der Seitenprojektion auftreten, ist in Art. 67 erwähnt; die Hilfslinien dafür sind ebenfalls gezeichnet.

Die Figuren 65 e, 65 f, 65 g bieten die Beschattung der Hohlkugelfläche teils durch ihre eigenen Ränder, teils durch aussenliegende Körperschattengrenzen, und zwar immer in Verbindung mit leicht erhältlichen Schatten auf vertikalen Cylinderflächen. In den zwei letzten Beispielen ist die Uebertragung der schattenwerfenden Punkte der oberen horizontalen Randhalbkreise in die Umklappung hervorzuheben. Randpunkt a' in Figur 65 f liesse sich zwar durch Zeichnen des ohnehin notwendigen Schnittkreises $p\,r$ in der Umklappung $p_u\,r_u$ und durch die zugehörige Projektionslinie nach a_u übertragen; zur Vermeidung schiefwinkliger Durchschnitte wird aber besser der Punkt a_u durch $m_u\,a_u = m\,a$ im Grundriss erhalten.



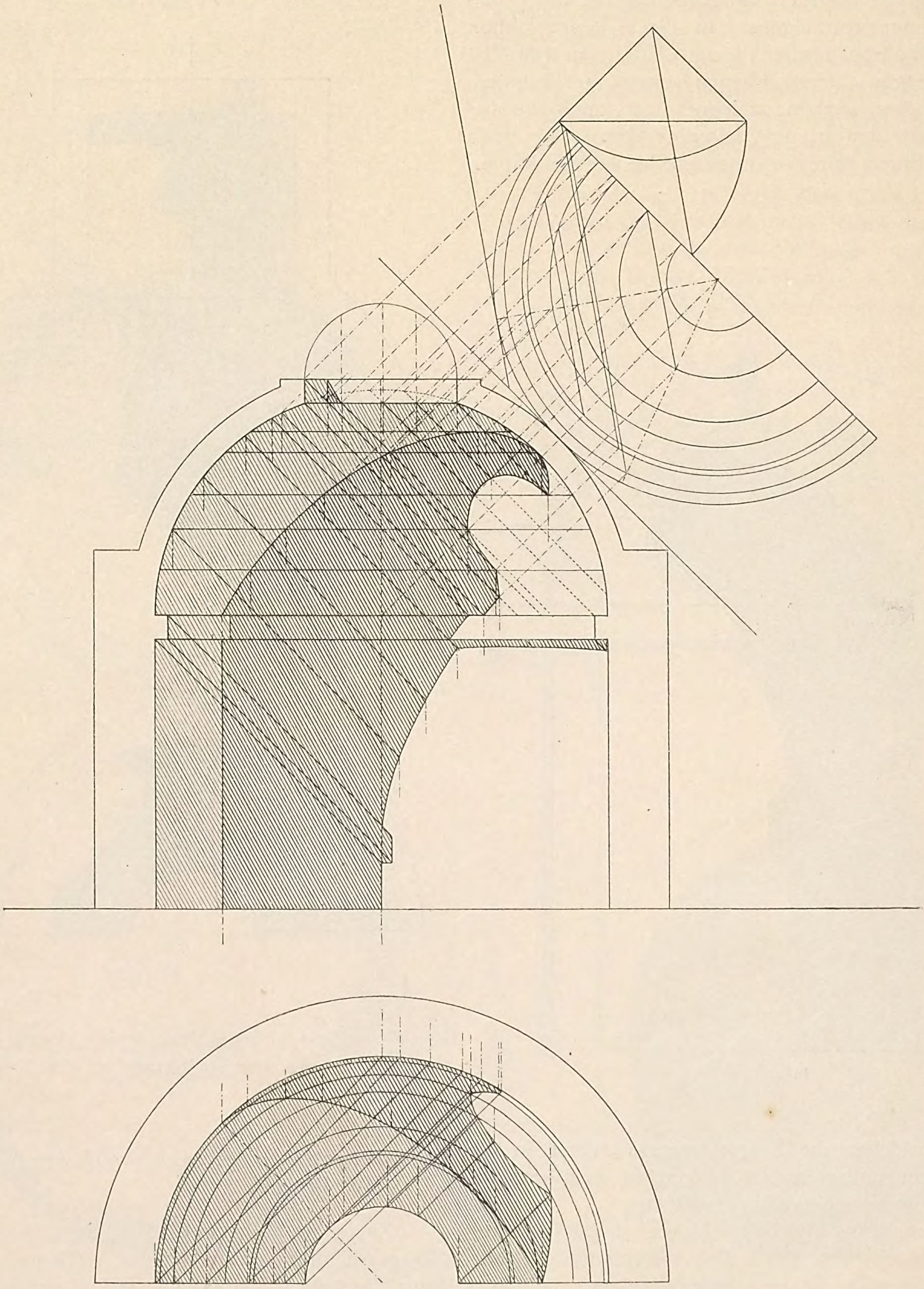
Figur 65 f.

In Figur 65 g ist zum Zweck der Beschaffung der Masse $m\,a$ der obere Randhalbkreis in die Vertikalebene umgeklappt.

Körperschattengrenzen auf der Vollkugel und Hohlkugel. 66.

Zu einem einfacheren Verfahren im Aufzeichnen der Körperschattengrenzen auf der Vollkugel oder Hohlkugel führt folgende Ueberlegung: Indem der berührende Lichtstrahl an der Kugel gleitet, beschreibt er eine Cylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitt, welche die Kugel nach einem Grosskreis berührt, dessen Ebene senkrecht zur Lichtrichtung steht. Projiziert man die Kugel und diesen Grosskreis auf eine durch den Lichtstrahl gelegte vertikale Ebene, so erscheint der Grosskreis als Durchmesser des Kugelbildes senkrecht zum Lichtstrahl und

dieser bildet mit der Horizontalen den bekannten Winkel α (Figur 66a). Klappt man eine solche Ebene HR in die Horizontalebene um und wieder zurück (Figur 66b), so findet sich, dass der schattenabgrenzende Grosskreis rechtwinkligen Dreieck, das zum Aufzeichnen des Winkels α dient, kann das Verhältnis von B zu A unmittelbar abgelesen werden als Verhältnis der kleineren Kathete zur Hypotenuse; doch wird die Rechnung mit der Ver-



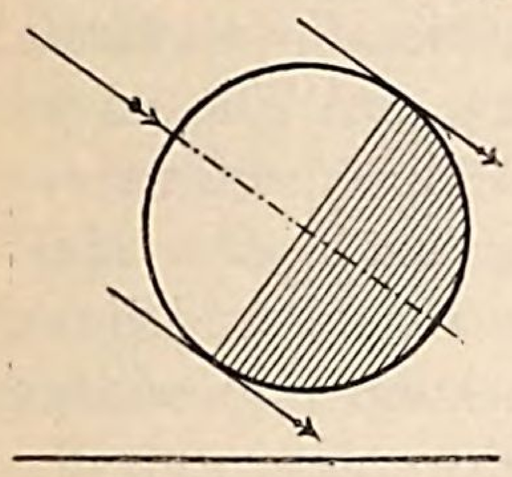
Figur 65 g.

im Grundriss der Kugel eine Ellipse ist mit der grossen Achse $2A$ als Durchmesser des Kugelbildes senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, und der kleinen Achse in der Richtung der Lichtstrahlprojektion $2B = 2A \sin \alpha$. Die Rechnung giebt $B = 0{,}5773\,A$ oder rund $0{,}58\,A$. An dem hältniszahl 0,58 ebenso rasch zum Ziel führen. Im folgenden sind für den Fall, dass die ganze Ellipse mit Hilfe des Massstabs aufgetragen werden will, einige Ordinaten derselben senkrecht zur grossen Achse berechnet. Teilt man die grosse Halbachse in vier gleiche Teile und hal-

biert noch den äussersten Teil, so sind die Ordinaten y in den Teilpunkten die folgenden, wenn die Länge der grossen Halbachse oder der Kugelhalbmesser = 1 gesetzt wird.

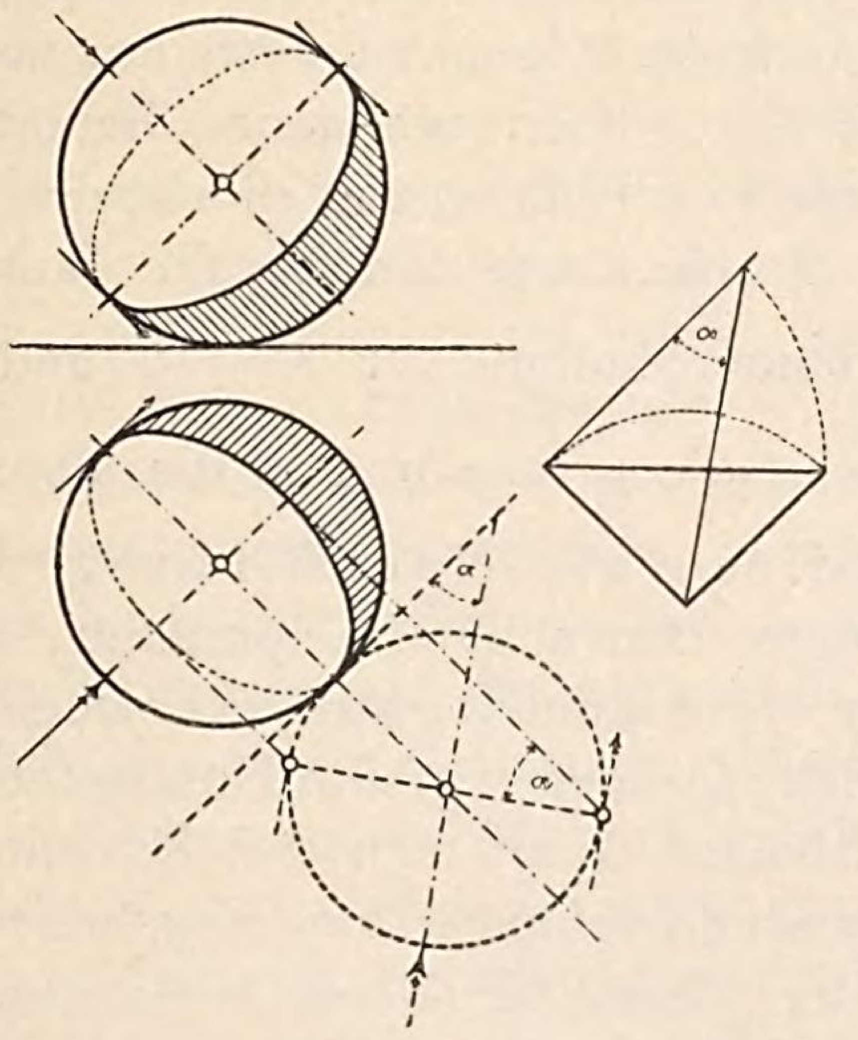
Im ersten Punkt y_0 = 0,577 rund 0,58 (kleine Halbachse);
„ zweiten „ y_1 = 0,559 „ 0,56
„ dritten „ y_2 = 0,500 „ 0,50
„ vierten „ y_3 = 0,382 „ 0,38
„ fünften „ y_4 = 0,280 „ 0,28
„ Endpunkt y_5 = 0 „ 0.

Was für die Grundrissellipse des Kugelkörperschattens in Beziehung auf Richtung und Grösse gesagt ist, gilt völlig unverändert auch für die Aufrissellipse, wofern nur die Vertikalprojektion des Lichtstrahls an die Stelle seiner Horizontalprojektion gesetzt wird. Die Aufrissellipse ist kongruent der Grundrissellipse, und ihre grosse Achse steht ebenfalls senkrecht zur Lichtstrahlprojektion.



Figur 66a.

Zum raschen Aufzeichnen der Ellipsen bei Darstellungen in kleinerem Massstab genügt oft schon die Angabe der vier Krümmungskreise in den



Figur 66b.

Scheiteln, wobei die Radien nach der unten in Art. 68f angegebenen Konstruktion zu bestimmen sind und die zwischenliegenden Teile des Ellipsenumfangs nach Schätzung eingefügt werden.

67. Behandlung der Kugel als Drehungsfläche.

In manchen Fällen ist es zweckmässig, die Kugelfläche als Drehungsfläche mit Achse senkrecht zu einer Grundebene aufzufassen und von der Eigenschaft ihrer zum Lichtstrahl parallelen Schnitte als Kreislinien keinen Gebrauch zu machen. Dies gilt besonders dann, wenn die in Art. 61 für Drehungsflächen beschriebene Lösung mit Parallelkreisschnitten und den kongruenten Schlagschatten auf deren Ebenen Anwendung finden kann. So liesse sich z. B. auf dem in 65d gezeichneten Beispiel, ferner in dem als Höhenschnitt gezeichneten, oben kreisförmig offenen Kuppelgewölbe mit kugelförmiger Leibung in 65g die Selbstbeschattung mit solchen Parallelkreisschnitten bestimmen. Auch die Betrachtung der Parallelkreisschnitte der Kugel als niedriger Kegelzonen, wie bei den Drehungsflächen nach Art. 56, kann in manchen Fällen rascher zum Ziel führen als die Umklappung von Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl, indem sie mit der ebengenannten Schlagschattenbestimmung verbunden die Körperschattengrenze liefert.

Oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Ellipse und ihre Tangenten. 68.

Da die Ellipse sowohl als Schattengrenzlinie auf Kugelflächen, Cylinderflächen, Kegelflächen, wie auch als Kante und Hilfslinie bei den Schattenkonstruktionen auf diesen und anderen Körpern samt ihren Tangenten sehr häufig zu zeichnen ist, so sind im folgenden einige oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Linie selbst, wie für die scharfe Bestimmung von Tangenten und Berührungspunkten eingeschaltet. In der letzten Beziehung sind auch andere Kurven berücksichtigt.

a) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man beschreibt um den Schnittpunkt beider Achsen zwei Kreise mit den Halbachsen als Radien. Man zieht eine Anzahl beliebiger gemeinschaftlicher Radien beider Kreise. Für jeden solchen Halbmesser zieht man durch seinen Endpunkt auf dem grösseren Kreis eine Parallele zur kleinen Achse und durch seinen Punkt auf dem kleineren Kreis eine Parallele zur grossen Achse. Der Schnittpunkt je zweier zu demselben Halbmesser gehöriger Parallelen ist ein Ellipsenpunkt. — Da sich bei dieser Konstruktion alle zu benützenden Punkte aus einem rechtwinkligen Schnitt zweier Linien ergeben, so liefert sie die Ellipsenpunkte mit grosser Sicherheit.

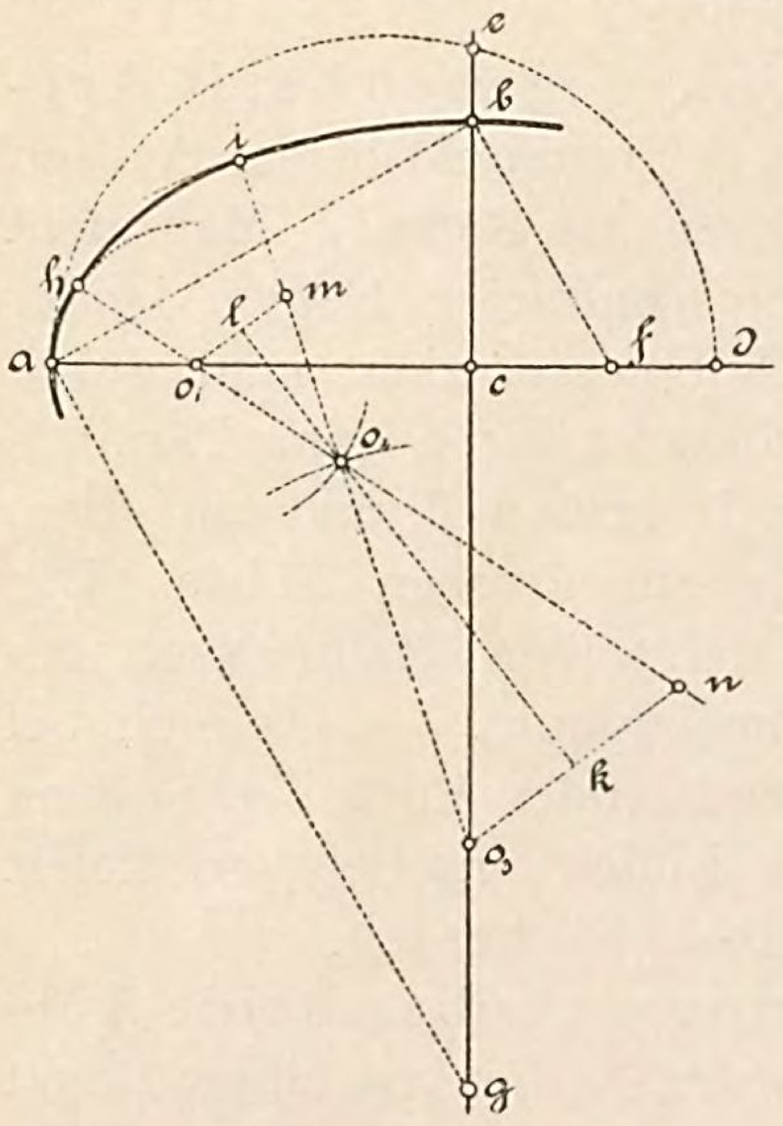
b) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man trägt auf einem Papierstreifen von einem Punkt p aus die grosse Halbachse pa und in derselben Richtung die kleine Halbachse pb auf, so dass in dem Stück ab die Differenz beider Halbachsen erscheint. Man legt nun in verschiedenen Richtungen nacheinander den Papierstreifen so an, dass der Punkt a auf eine kleine Halbachse, der Punkt b auf eine grosse fällt. In jeder solchen Lage giebt der Punkt p einen Ellipsenpunkt an. Diese Konstruktion liefert die Ellipsenpunkte zwar rascher, aber weit weniger zuverlässig als die erste, letzteres besonders bei geringem Unterschied beider Halbachsen. Immerhin ist sie zum praktischen Schattenkonstruieren meist ausreichend, wenn nicht andere Resultate aus der Ellipse abzuleiten sind.

c) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man durchschneidet die grosse Achse von den Endpunkten der kleinen Achse aus mit Kreisbögen, deren Halbmesser gleich der grossen Halbachse ist. Die zwei Schnittpunkte sind die Brennpunkte der Ellipse. Man beschreibt nun aus dem einen Brennpunkt einen Kreisbogen mit einem beliebigen Bruchteil der grossen Achse, aus dem andern einen Kreisbogen mit dem Rest der grossen Achse; beide Kreisbögen schneiden sich in einem Ellipsen-

punkt. Die Konstruktion steht an Zeitverbrauch und Genauigkeit der ersten nach.

d) Ellipsenkonstruktion; gegeben zwei verwandte (konjugierte) Durchmesser. Diese müssen sich halbieren; ihr Schnittpunkt wird der Mittelpunkt der Ellipse. Man fällt von einem Endpunkt des kleineren Durchmessers ein Lot auf den grösseren und trägt auf diesem Lot von demselben Endpunkt aus nach beiden Richtungen die Hälfte des grösseren Durchmessers auf. Die Radien vom Mittelpunkt nach den beiden hiedurch erhaltenen Punkten geben die Summe, beziehungsweise die Differenz beider Halbachsen der Ellipse. Da $(a + b) — (a - b) = 2b$, so ist der Unterschied beider Radien gleich dem Doppelten der kleinen Halbachse; die Länge der grossen ergiebt sich dann leicht aus dem grösseren Radius als der Summe beider. Die Richtung der grossen Halbachse ist dargestellt durch die Halbierungslinie des Winkels zwischen jenen beiden Radien.

e) Bestimmung der Achsen und Ergänzung einer Ellipse, von welcher nur ein Teil des Umfangs gefunden ist. Man zieht zwei oder drei Gruppen paralleler Sehnen des gegebenen Bogenstücks, wobei man auch die längstmögliche Sehne als Richtung einer Gruppe benützen wird. Die Halbierungspunkte der Sehnen einer Gruppe müssen auf einer Geraden liegen; sonst ist das gegebene Bogenstück kein Ellipsenstück, und zwar sind die erhaltenen Geraden Stücke von Durchmessern; sie schneiden sich also verlängert im Mittelpunkt der Ellipse. Von diesem aus durchschneidet man (womöglich) den gegebenen Bogen mit einem beliebigen Kreis, der zwei Schnittpunkte liefert, halbiert den Bogen zwischen beiden Schnittpunkten und hat im Radius nach dem Halbierungspunkt die Richtung einer Achse; zugleich ergiebt sich die Grösse dieser Achse. Man beschreibt über ihr einen Kreis, zieht eine Anzahl von Ordinaten der Ellipse und dieses Kreises senkrecht zu der Achse und vergrössert oder verkleinert dann diejenigen Kreisordinaten, die noch nicht auf Ellipsenpunkte treffen, in demselben Verhältnis, das die vorhandenen Ellipsenordinaten gegenüber den übrigen Kreisordinaten darbieten. Die Konstruktion ist selbstverständlich um so unsicherer, je kleiner das gegebene Bogenstück gegenüber dem ganzen Umfang der Ellipse, und kann bei stark schiefwinkligen Durchschnitten zwischen Bogen und Sehnen stark verschiedene Ellipsen für dasselbe Bogenstück liefern.



Figur 68.

Wenn jener Kreis um den Mittelpunkt den gegebenen Bogen nur in einem Punkt schneidet, das heisst, wenn der Bogen keinen Scheitel enthält, so versagt die Konstruktion; in diesem Fall ist aber ohnehin das Resultat so unsicher, dass auch seine Erlangung auf anderem Weg nur geringen praktischen Wert hat. Ein solcher anderer Weg wäre der folgende:

Man zieht, nachdem der Mittelpunkt gefunden ist, eine Tangente an den Bogen und eine Gerade durch den Mittelpunkt parallel zur längsten Sehne und beschreibt mit dem Abstand der Tangente vom Mittelpunkt einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Geraden liegt. Bis zu diesem Kreis verlängert man die längste Sehne und zieht dann in ihm und in der werdenden Ellipse noch weitere parallele Sehnen. Wie sich die längste Sehne des gegebenen Ellipsenstücks verhält zu der ihr im Kreis entsprechenden Sehne, so muss sich auch jede andere parallele Sehne der Ellipse verhalten zu der ihr im Kreis entsprechenden. Daraus lässt sich die ganze Ellipse erhalten, indem man die für die halben Ellipsensehnen erhaltenen Masse von dem Durchmesser nach dem Halbierungspunkt der längsten Sehne nur rechts und links aufträgt. Zur Bestimmung der Achsen kann nun wieder jener Kreis um den Mittelpunkt benützt werden.

f) Bestimmung der Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der Ellipse; gegeben beide Achsen. Man verbindet einen Endpunkt der grossen Achse mit einem Endpunkt der kleinen und errichtet in den Endpunkten Lote auf der Verbindungslinie. Diese Lote schneiden beide Achsen zum zweitenmal. Die Stücke auf den Achsen von den erhaltenen Schnittpunkten bis zum Mittelpunkt der Ellipse sind die beiden Krümmungshalbmesser. Die Konstruktion beruht darauf, dass der grössere Krümmungshalbmesser $R = \frac{A^2}{B}$ und der kleinere $r = \frac{B^2}{A}$, wenn A die grosse und B die kleine Halbachse.

g) Korblinie als Nachbildung der Ellipse durch Kreisstücke mit acht Mittelpunkten, wobei in den vier Scheiteln die Krümmungskreise erscheinen.

Um möglichst gleich verteilte Unterschiede der Krümmungen zu erhalten, kann man den Kreisbogen, der den Uebergang zwischen beiden Krümmungskreisen bilden soll, so gross wählen, dass der kleine Krümmungshalbmesser r sich zum Halbmesser des Zwischenkreises z verhält wie dieser zum grossen Krümmungshalbmesser R. Sind mit $ac = A$ und $cb = B$ (Figur 68) die beiden Halbachsen der nachzubildenden Ellipse gegeben, so ist nach f) $R = A^2/B$ und $r = B^2/A$, woraus $z = \sqrt{Rr} = \sqrt{AB}$. Wird also $cd = cb$ aufgetragen, und über ad ein Kreis beschrieben, so ist $ce = z$. Die beiden Krümmungshalbmesser werden erhalten durch bf und ag senkrecht zu ab, worauf $r = cf = ao_1$ und $R = cg = bo_3$. Man beschreibt nun aus o_1 einen Kreis mit $z - r$ und aus o_3 einen Kreis mit $R - z$; der Schnittpunkt beider Kreise o_2 ist der Mittelpunkt des Uebergangskreises und die Uebergangspunkte zwischen den drei Kreisbögen h und i werden erhalten durch Ziehen von $o_2 o_1$ und $o_3 o_2$.

Anstatt den Zwischenradius z anzunehmen, kann man auch nach Schätzung aus freier Hand einen Bogen zwischen beide Krümmungskreise einfügen und dieser Schätzung entsprechend entweder auf dem kleineren Krümmungskreis oder auf dem grösseren den Punkt festsetzen, in welchem der Uebergangskreis anschliessen soll. Es sei

hiefür Punkt h angenommen. Man zieht $h o_1$ mit Verlängerung und macht $h n = R$. Die auf der Mitte von $o_3 n$ in k errichtete Senkrechte zu $o_3 n$ giebt als Durchschnitt mit $h n$ den Punkt o_2 als Mittelpunkt des Uebergangskreises. — Wird Punkt i auf dem grösseren Krümmungskreis als Uebergangspunkt angenommen, so zieht man $i o_3$ und macht darauf $i m = r$. Das Mittellot $l o_2$ von $m o_1$ liefert als Schnitt mit $i o_3$ den Mittelpunkt des Uebergangskreises o_2 Für die praktische Verwertung der Konstruktion empfiehlt sich die Annahme des Uebergangspunktes auf dem kleinen Krümmungskreis am meisten. Die Annäherung an die Ellipse kann hiebei rascher erreicht werden als mit der Wahl eines Zwischenradius z und ist bei allen Konstruktionen um so vollständiger, je kleiner der Unterschied beider Halbachsen ist.

h) Eine Tangente an die Ellipse aus einem äusseren Punkt oder parallel zu einer andern Geraden ist durch Anlegen des Lineals an der Kurve mit Sicherheit genau zu ziehen; damit ist aber der Berührungspunkt noch nicht bestimmt. Man erhält ihn, wenn die Achsen bekannt sind, durch Betrachtung der Ellipse als der aus dem Kreis durch proportionale Verkürzung aller Ordinaten abgeleiteten Kurve. Die Tangenten in den Endpunkten aufeinanderfallender Ordinaten des Kreises und der aus ihm abgeleiteten Ellipse schneiden sich auf der Abscissenachse, das heisst auf der grossen Achse der Ellipse. Man beschreibt also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, zieht aus dem Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der grossen Achse eine Tangente an den Kreis, bestimmt deren Berührungspunkt und erhält dann den Berührungspunkt der Ellipsentangente als Schnitt mit der durch den Kreisberührungspunkt gezogenen Ordinate. Liegt der Berührungspunkt der grossen Achse näher, so wird besser der Kreis über der kleinen Achse mit dem Schnittpunkt der Tangente und der kleinen Achse benützt.

i) Ist die Tangente in einem gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehen, so wird dieselbe Thatsache benützt, indem zuerst die Ordinate durch den Punkt für Ellipse und Kreis, dann die Kreistangente gezeichnet und aus ihrem Schnittpunkt mit der grossen Achse nach dem gegebenen Berührungspunkt gezogen wird. Dasselbe Problem lässt sich auch mit Hilfe der Brennpunkte lösen; die Tangente an der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen.

k) Sind die Achsen der Ellipsen nicht bekannt und es ist der Berührungspunkt einer vorhandenen Tangente zu bestimmen, so zieht man zwei zur Tangente parallele Sehnen in thunlichst grosser Entfernung voneinander und mit möglichst sicherem Schnitt mit der Peripherie. Die gerade Verbindungslinie der Halbierungspunkte beider Sehnen ist der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Die Konstruktion ist die Anwendung der folgenden, für alle Kurven möglichen, auf den besonderen Fall der Ellipse. Man zieht eine Anzahl zur Tangente paralleler Sehnen und halbiert sie; die Kurve, welche die Halbierungspunkte verbindet, führt zum Berührungspunkt. Bei den Linien zweiter Ordnung wird diese Kurve zur Geraden.

l) Ist in einem Punkt eines Ellipsenstücks mit unbekannten Achsen eine Tangente zu ziehen, so kann man zur thunlichst sicheren Bestimmung ihrer Richtung folgende, auch für alle andern Kurven brauchbare Konstruktion benützen, durch welche man einen zweiten Punkt der Tangente erhält. Man beschreibt um den Berührungspunkt einen Kreis, zieht verschiedene Radien, welche auch die Kurve schneiden und trägt von den Kreispunkten einer Seite aus auf den Radien die Sehnen der Kurve nach aussen und innen auf. Man erhält dann zwei Kurven, welche sich auf dem Kreis schneiden; der Schnittpunkt ist ein Tangentenpunkt. Nimmt man die Konstruktion zu beiden Seiten des Berührungspunktes vor, so erhält man zwei auf einem Durchmesser liegende Tangentenpunkte. An die Stelle des Kreises kann auch eine Gerade oder beliebig gezogene Kurve treten, welche von den Verlängerungen der zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Sehnen der gegebenen Kurve geschnitten wird.

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Die Flächen zweiter Ordnung. 69.

Soweit diese Flächen nicht zu den Drehungsflächen gehören und als solche schattiert werden, sind es die folgenden: das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweimantelige elliptische Hyperboloid, das einmantelige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

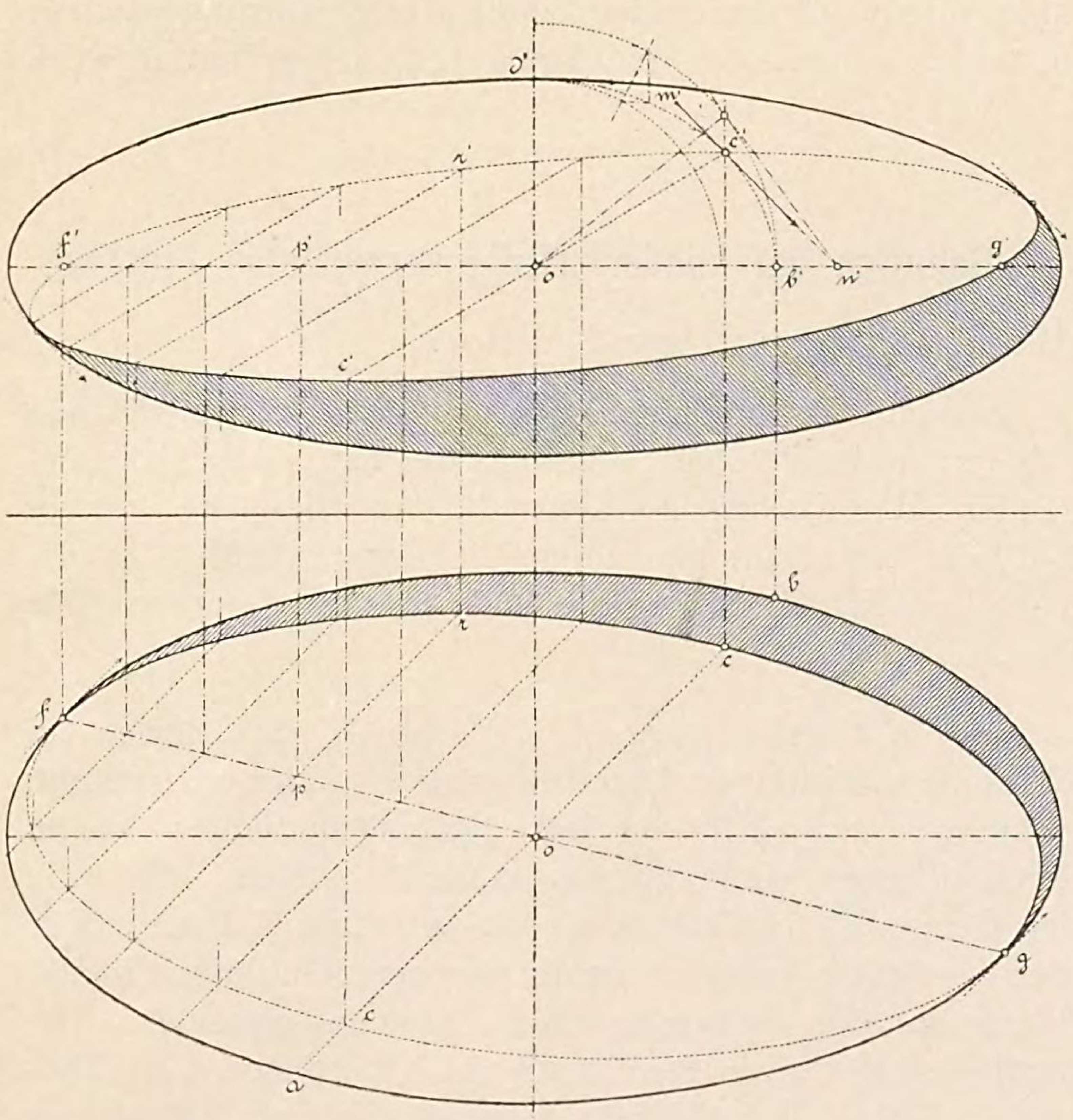
a) Ein dreiachsiges Ellipsoid, das heisst ein Ellipsoid mit drei verschieden grossen Achsen, entsteht, wenn von zwei Ellipsen mit gemeinschaftlicher Achse, deren Ebenen senkrecht zu einander stehen, die eine derart parallel fortrückt, dass sie mit ihren Achsen immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die andere in zwei Punkten schneidet. Die fortrückende Ellipse beschreibt die Oberfläche des Ellipsoids. (Wird sie ein Kreis, oder ist die feste Ellipse ein Kreis, so geht das dreiachsige Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid über, das nach Kap. VII zu behandeln ist.)

Die Fläche hat die Eigenschaft, dass sie von parallelen Ebenen irgend welcher Richtung nach Ellipsen geschnitten wird, die unter sich geometrisch ähnlich sind. Wenn also in Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen das Ellipsoid durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten und an die Schnittkurven die berührenden Tangenten gezogen werden, so sind alle diese Schnittkurven ähnliche Ellipsen, auf welchen auch die Berührungspunkte der Lichtstrahlen, das heisst die Körperschattengrenzpunkte, ähnlich liegen. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion der Körperschattengrenze, wobei nach Figur 69a ein Ellipsoid mit senkrecht zu den drei Grundebenen stehenden Achsen als Beispiel gewählt sein mag.

Man zieht durch den Mittelpunkt o der Grundrissellipse einen Lichtsrahl $a b$ und zeichnet im Aufriss die Ellipse $b' c' d'$, nach welcher die Vertikalebene dieses Lichtstrahls den Körper schneidet. (Für diese Ellipse ist die

vertikale Achse diejenige des Ellipsoids und die horizontale durch Hinaufloten der Endpunkte des Grundrissdurchmesserlichtstrahls *a b* erhältlich.) Man zieht an diese Schnittellipse einen berührenden Lichtstrahl *m' n'*, bestimmt dessen Berührungspunkt *c'* scharf nach Art. 68 und lotet ihn auf den Grundrissdurchmesser nach *c* hinunter. Hierauf zieht man genügend viele Sehnen der Grundrissellipse parallel zum Lichtstrahl und teilt sie in demselben Verhältnis ein, in welchem der Lichtstrahldurchmesser durch die beiden Punkte *c* und *e* eingeteilt ist (*o e* = *o c*). Die stetige Verbindung der erhaltenen Punkte liefert die Körperschattengrenze im Grundriss, die ihrer Entstehungsweise nach elliptisch sein muss.

Die Verbindungslinie *g f* der Halbierungspunkte der parallelen Sehnen ist ein horizontaler Durchmesser sowohl des Ellipsoids, als der Schattengrenzlinie auf ihm. Diese



Figur 69 a.

Linie erscheint im Aufriss als *f' g'* horizontal und durch den Mittelpunkt gehend; die Halbierungspunkte *p* können also durch Hinaufloten auch im Aufriss erhalten werden. Durch diese Punkte *p'* sind im Aufriss Parallelen zu dem schrägen Durchmesser *o' c'* jener ersten vertikalstehenden Schnittellipse zu ziehen und dann die Endpunkte der Sehnen *r* aus dem Grundriss in den Aufriss nach *r'* hinaufzuloten, um auch dort die Schattengrenzpunkte zu erhalten. Bei einem hohen Ellipsoid würden die Projektionslote schiefwinklige Durchschnitte ergeben; man bestimmt in diesem Fall die Aufrisspunkte besser aus der Proportionalität der Sehnen. Jede Aufrisssehne *p' r'* verhält sich zu dem ihr parallelen Durchmesser *o' c'* wie die zugehörige Grundrisssehne *p r* zu dem ihrigen *o c*. Zur Abnahme der Proportionalmasse für Grundriss und Aufriss kann dasselbe Strahlenbüschel dienen.

Die Körperschattengrenzlinie wird eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt, welche also die Oberfläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. In der Projektion des Körpers auf eine zur Richtung *f g* senkrecht stehende vertikale Ebene erscheint sie als gerade Linie.

Die an den beiden Körperumrissen tangierenden Lichtstrahlenprojektionen berühren in denselben Berührungspunkten auch die Projektionen der Schattengrenzlinie. Diese Thatsache gilt allgemein für gekrümmte Flächen, deren Umrisse in den beiden Projektionen nicht durch Kanten, sondern durch Auswölbung gebildet sind; sie ist eine notwendige Folgerung aus dem in Art. 34a ausgesprochenen Satz. Denkt man sich für eine solche etwa im Aufriss gezogene Lichtstrahltangente die vertikalprojizierende Ebene, so berührt diese Ebene den Körper in einem Punkt, der der Körperschattengrenze angehört, weil er auf einem berührenden Lichtstrahl liegt. Diese Grenze kann aber über die Ebene offenbar nicht hinaus, da sie sonst aus der Körperoberfläche hinausgehen müsste; sie muss also umkehren und da sie bei stetiger Krümmung der Fläche keine Ecke bilden kann, muss sie mit Berührung umkehren, abgesehen von dem seltenen Fall, in welchem der sichtbare Teil mit dem unsichtbaren zusammenfällt. Vergl. Art. 63a, Schattengrenzen auf Drehungsflächen. Weitere Beispiele für die beschriebene Thatsache bieten die Figuren 69b, 69c, 71, 74a, 74c.

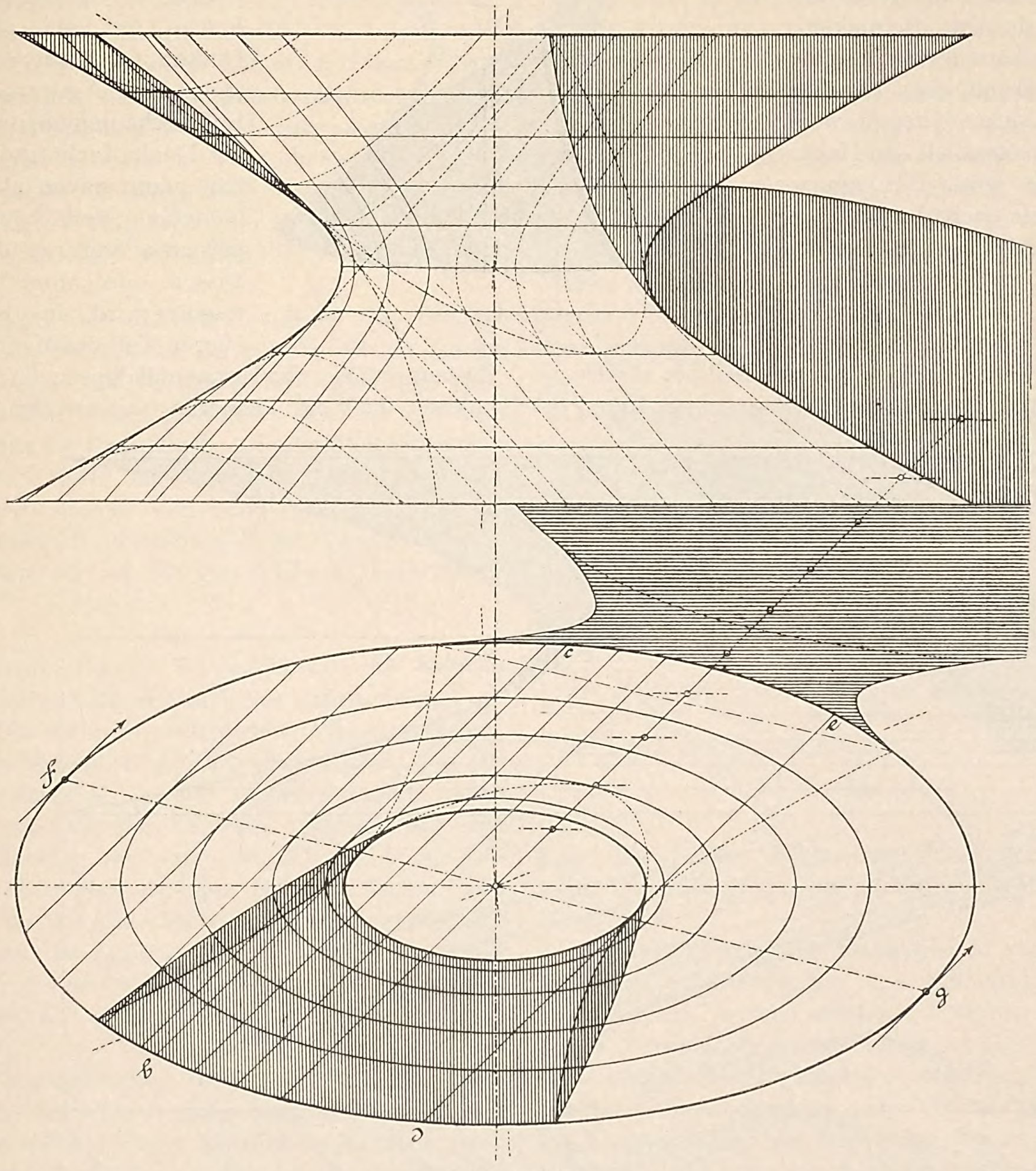
Ein zweites Verfahren für die Schattenbestimmung auf dem Ellipsoid wäre das im folgenden für das elliptische Hyperboloid angewendete Behandeln jedes horizontalen Durchschnitts als eines niedrigen elliptischen Kegelrumpfes.

b) Das elliptische Paraboloid (mit vertikaler Achse) entsteht, wenn an die Stelle der festen Ellipse, die bei Erzeugung des Ellipsoids vorausgesetzt wurde, eine Parabel (mit vertikaler Achse) tritt. Die Bestimmung der Körperschattengrenze, die selbst parabolisch und im Grundriss geradlinig wird, kann einen ähnlichen Weg verfolgen wie bei jenem, wenn an die Stelle der Grundrissellipse eine beliebige horizontale Schnittellipse des Paraboloids als Fussfläche gesetzt wird. Alle Vertikalschnitte werden parabolisch und nicht nur ähnlich, sondern kongruent. Auf kurzem Weg kann die geradlinige vertikale Projektion der Körperschattengrenze auf einer zu *f g* senkrechten Vertikalebene gefunden und zur Konstruktion jener benützt werden.

c) Ein zweimanteliges elliptisches Hyperboloid entsteht, wenn eine (am besten horizontalliegend gedachte) Ellipse, deren Ebene senkrecht zur wirklichen Achse einer Hyperbel steht, derart parallel fortrückt, dass sie mit ihrer Achse immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die Hyperbel immer in zwei Punkten schneidet. Die beiden Schnittpunkte mit der Hyperbel können Endpunkte einer Achse oder eines andern Ellipsendurchmessers sein. Die bewegliche Ellipse erzeugt zwei kongruente Mantelflächen, auf denen die hyperbolische Körperschattengrenze in ähnlicher Weise gefunden werden kann wie beim Ellipsoid und Paraboloid,

wenn eine beliebige Lage der beweglichen Ellipse als Grundrissellipse aufgefasst wird. Alle Vertikalabschnitte werden hyperbolisch und geometrisch ähnlich.

Zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen auf allen drei Flächen wird, von besonderen Fällen abgesehen, nur das allgemeine Verfahren mit den Vertikalschnitten zur Verfügung stehen; doch bringt auch hiebei die Thatsache, dass alle Vertikalschnitte parallel zur Lichtrichtung geometrisch ähnlich sind, eine Abkürzung, indem das Zeichnen konzentrischer Grundrissellipsen erspart werden kann.

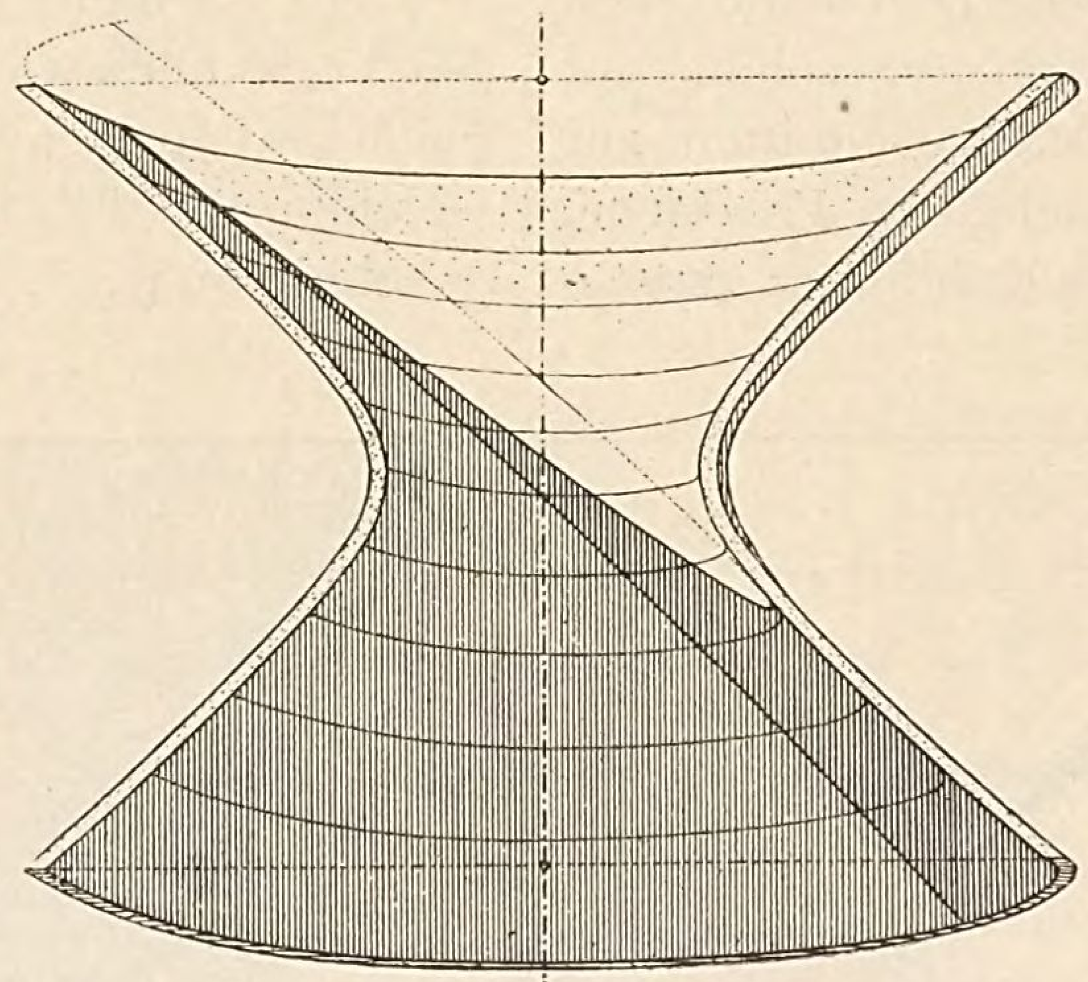


Figur 69 b.

d) Das einmantelige elliptische Hyperboloid entsteht durch das parallele Fortrücken einer (am besten horizontalliegend gedachten) Ellipse auf einer Hyperbel (mit vertikaler imaginärer Achse) in der Weise, dass 1) die Ebene der Ellipse immer senkrecht bleibt zur imaginären Achse der Hyperbel, 2) die Ellipse sich immer geometrisch ähnlich und gleichgerichtet bleibt. Die Fläche bietet neben der Körperschattengrenze auch eine Selbstbeschattung; der Schlagschatten kann entweder auf die Aussenseite des Mantels oder auf die Innenfläche fallen, je nach der Neigung der Hyperbelzweige.

Die Schattenkonstruktion könnte auch bei dieser Fläche, ähnlich wie bei den drei vorhergehenden, Gebrauch machen von der Thatsache, dass alle Hyperbeln, nach welchen die Fläche durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten wird, geometrisch ähnlich sind, und es wäre dieser Weg der kürzeste. Diese Schnitthyperbeln projizieren sich auf eine zu fg (Figur 69 b) senkrecht stehende vertikale Ebene als eine Hyperbelschar, deren Assymptoten dargestellt sind durch die Projektionen der zwei geraden Linien, nach welchen eine berührende Schnittebene bc oder de die Fläche schneidet. Von dieser Hyperbelschar wäre nur eine einzige Hyperbel (bei Annahme der Fläche nach Figur 69 b ausserhalb bc und de liegend) zu zeichnen, um die gerade Linie zu erhalten, als welche die Körperschattengrenze sich auf die zu fg senkrecht gerichtete vertikale Ebene projiziert.

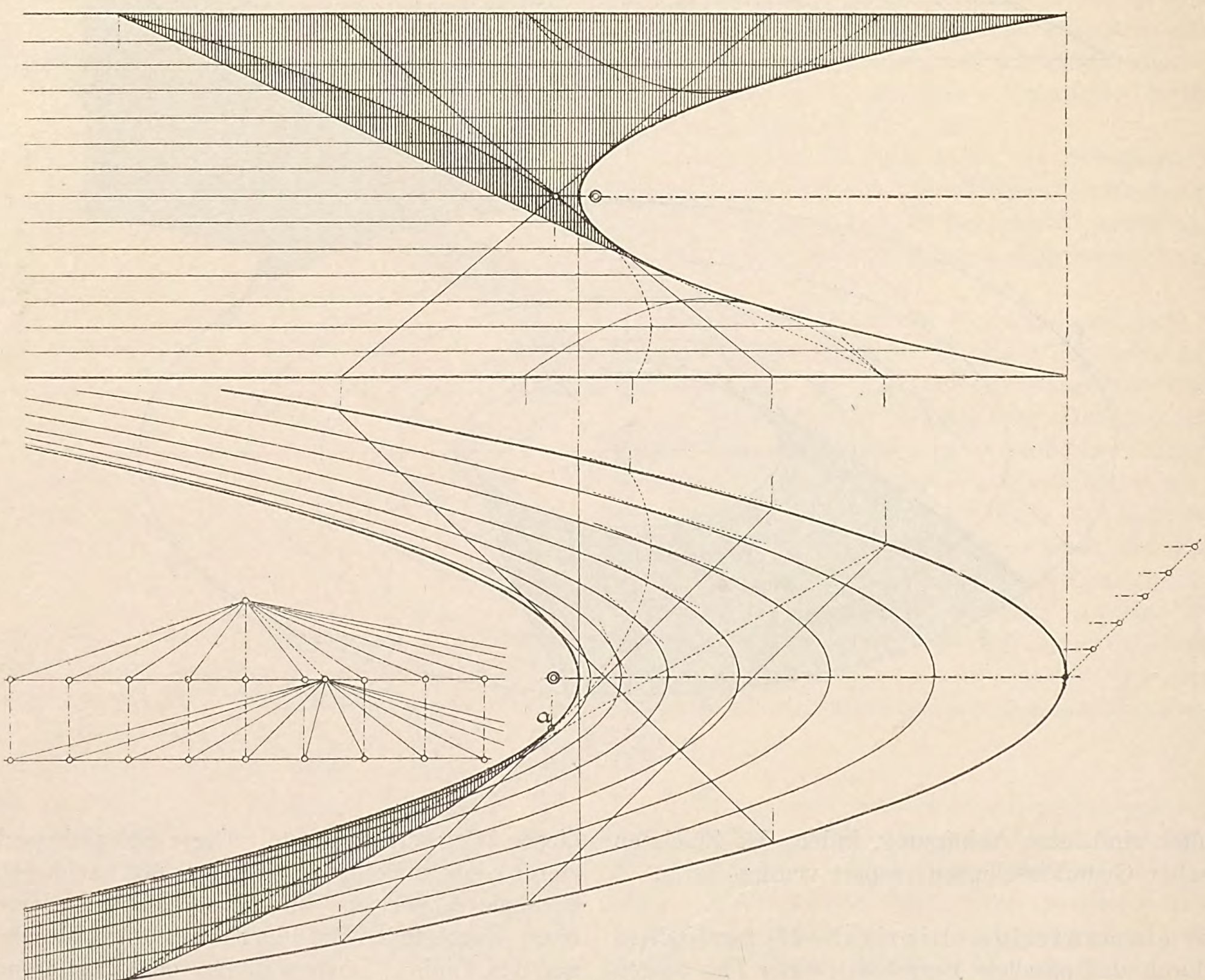
Die an Figur 69b und c durchgeführte Lösung für die Körperschattengrenzlinie eines vertikalstehenden Hyperboloids ist eine andere und zwar die folgende. Jeder horizontale Durchschnitt des Körpers liefert eine Ellipse, welche betrachtet werden kann als sehr niedriger Abschnitt eines elliptischen Kegels, dessen äusserste Mantellinie dieselbe Neigung hat wie die Tangente der Hyperbel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf dieser Ellipse liegt als auf einer Zone des Kegels, da muss sie auch liegen, wenn die Ellipse als Bestandteil des Hyperboloids aufgefasst wird. Bestimmung der Kegelschatten nach Art. 41.



Figur 69c.

Zur Durchführung des Verfahrens ist nicht nötig, die Schnittellipsen im Grundriss zu zeichnen, sondern die Bestimmung der Kegelschattenmantellinien kann mit einer einzigen Grundrissellipse als der gemeinschaftlichen Basis der verschieden steilen Kegel geschehen, wenn immer der Radius nach dem Berührungspunkt der Tangente, den das Verfahren liefert, im selben Verhältnis vergrössert oder verkleinert wird, in welchem die Schnittellipse grösser oder kleiner wäre als die Grundrissellipse. Scharfe Bestimmung der Berührungspunkte auf der Ellipse nach Art. 68; scharfe Bestimmung der Tangenten an der Hyperbel in den für die Horizontalschnitte ausgewählten Punkten als der Halbierungslinien des Brennstrahlenwinkels.

Die Körperschattengrenze wird eine Hyperbel, die sich auf eine zur Richtung $f\ g$ senkrechte vertikale Ebene als Gerade projiziert und die Fläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. Ihre Assymptoten sind durch Endstücke angedeutet. Welche Hälfte der Fläche Licht und welche Schatten hat, hängt davon ab, ob das Hyperboloid als Vollkörper oder als Hohlkörper aufgefasst, das heisst ob die äussere oder innere Mantelfläche betrachtet wird. Im ersten Fall sind am oberen Teil des Mantels die grösseren Umfangsstücke der Horizontalellipsen im Schatten und am unteren Teil die kleineren; im zweiten Fall ist es umgekehrt. In der Figur ist der Aufriss als Ansicht der Aussenfläche, der Grundriss als Oberansicht der Innenfläche aufgefasst, weshalb die Lichtflächen der Vertikalprojektion im Grundriss als Schattenflächen auftreten.



Figur 69d.

Die Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung ist ähnlich erhalten wie in Art. 61 bei Drehungsflächen. Es wurden die Ellipsen einiger Horizontalschnitte im Grundriss gezeichnet und auf den Ebenen dieser Schnitte der Schatten der oberen Randellipse angegeben, der eine kongruente, aber in der Lichtrichtung verschobene Ellipse ist. Zu diesem Zweck wurde die Randellipse auf Pauspapier gezeichnet und im Grundriss nacheinander in der Richtung des Lichtstrahls je um soviel fortgeschoben, als die Länge des Lichtstrahls bis zur Schnittebene angab (die Mittelpunkte der fortgeschobenen Lagen sind bezeichnet). In jeder Lage wurden die zwei Schnittpunkte zwischen Schattenellipse und Schnittellipse als Schlagschattenpunkte durchgestochen und bezeichnet. Fast ebenso rasch, aber mit minder sicherer Bestimmung der Körperschattengrenze, würde das allgemeine Verfahren zum Ziel geführt haben. Einige Schnittebenen und Schnittkurven hiefür sind eingezeichnet.

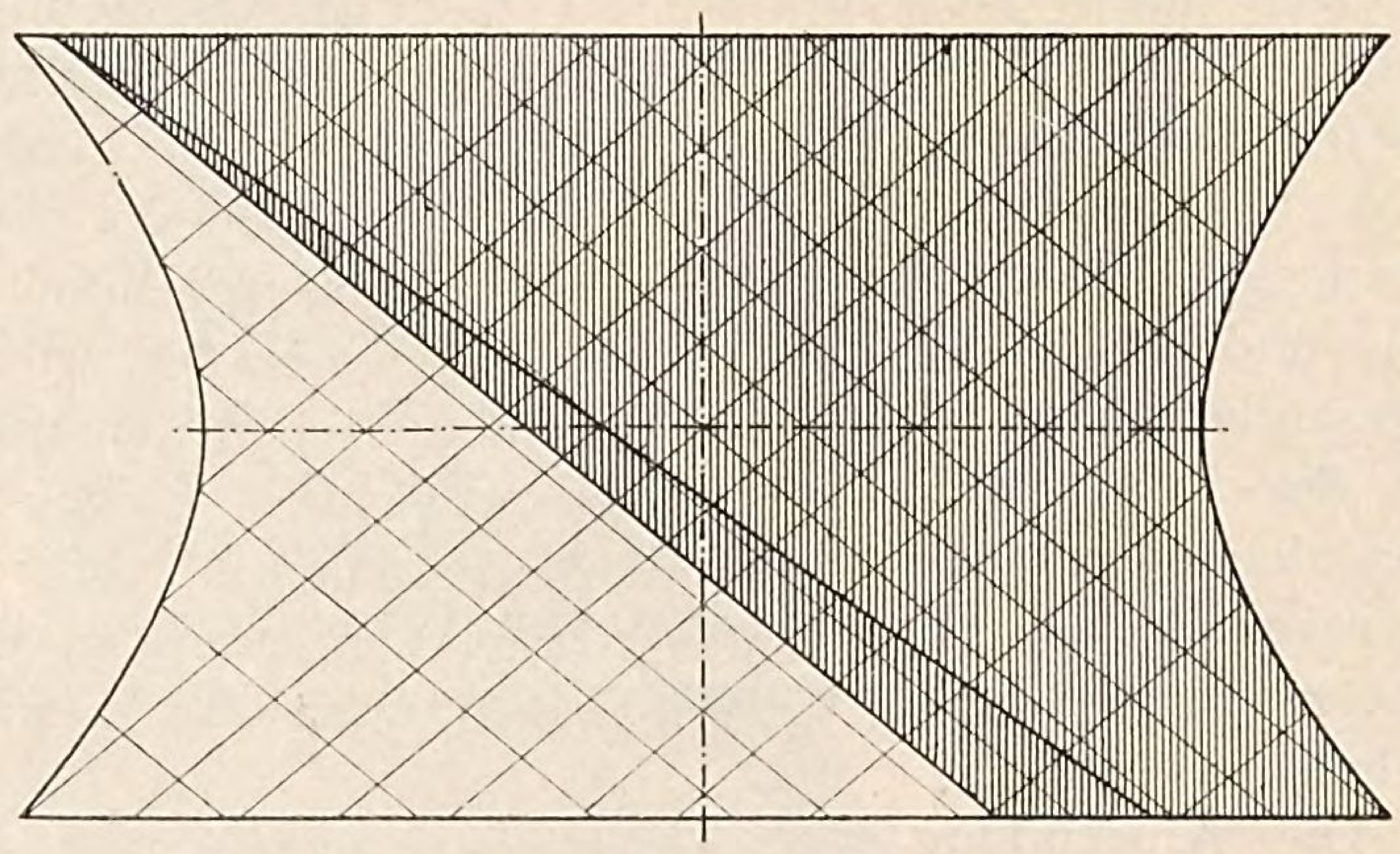
Nur im Innern des Mantels erscheint der Schlagschatten, und zwar umfasst er am obern Teil die beiden spitzwinkligen Zwickel als Ausläufer des unter dem Hals von den gekrümmten Linien gebildeten Vierecks mit dem kleineren Abschnitt der Fussellipse. Die Parallelperspektive Figur 69c (Schnitt nach der durch die Achse gehenden Lichtstrahlenebene) soll die Verteilung der Innenfläche an Licht, Körperschatten und Schlagschatten besser zur Anschauung bringen, als es die geometrische Darstellung vermag.

e) Das hyperbolische Paraboloid, bei Abgrenzung durch vier gerade Ränder auch das „windschiefe Viereck" genannt, lässt sich auf verschiedene Weise erzeugen; in Figur 69d ist diejenige als „Rückungsfläche" aus der Bewegung einer Parabel gewählt. Zwei Parabeln haben Scheitel und Achse gemein; die erste, festgedachte, liegt in einer Vertikalebene und erstreckt sich rechts ins Unendliche; die zweite liegt in einer Horizontalebene und erstreckt sich links ins Unendliche; sie rückt parallel und unveränderlich auf der ersten fort, mit dem Scheitelpunkt auf ihr bleibend. Beide Parabeln können ihre Eigenschaft als fest und beweglich vertauschen, ohne dass die Fläche sich ändert.

Dieser Erzeugungsweise entsprechend kann jeder Horizontalschnitt der Fläche aufgefasst werden als ein sehr niedriger schiefer Cylinder parallel zur Vertikalebene, dessen horizontale Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinien gleich geneigt sind wie die Tangente der festen Parabel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf der horizontalen Parabel liegt als auf einer Zone des Cylinders, da muss sie auch für das Paraboloid liegen. Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Cylinder geschieht nach Art 49. In einfacher Weise ergeben sich aus einer und derselben Hilfsfigur, die innerhalb des Grundplans gezeichnet ist, die Richtungen der Tangenten, welche an die horizontalen Schnittparabeln zu ziehen sind, und deren Berührungspunkte die Körperschattengrenze bilden. Diese wird eine Parabel, die sich in der Seitenprojektion als gerade Linie projiziert, also wie bei 69b auch auf kürzerem Weg gefunden werden kann.

(Bestimmung der Tangenten in den ausgewählten Punkten der festen Parabel und ebenso der Berührungspunkte der Tangenten an der beweglichen Parabel nach dem Satz, dass jede Tangente der Parabel senkrecht und in der Mitte steht auf der Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Fusspunkt des Lotes, das vom Berührungspunkt auf die Direktrix gefällt wird.)

Zur Bestimmung der Schlagschattengrenze ist dasselbe Verfahren gewählt wie oben für das elliptische Hyperboloid; das heisst, die obere Randparabel wurde auf Pauspapier gezeichnet und in der Lichtstrahlrichtung parallel verschoben. Im gezeichneten Fall wurde die Schlagschattengrenze zufällig nahezu geradlinig, was mit der geringen Krümmung des schattenwerfenden Randstücks zusammenhängt; eine strenge gerade Linie kann aber nicht entstehen. Denn wenn die Schlagschattengrenze wirklich eine Gerade wäre, so würden die Lichtstrahlen, welche sie erzeugen, eine Ebene bilden, und eine solche müsste die horizontale Ebene des oberen Randes nach einer geraden Linie schneiden; das heisst, der obere



Figur 69c.

Rand der Fläche müsste, soweit er den Schatten wirft, selbst geradlinig, anstatt parabolisch mit geringer Krümmung sein.

Figur 69c zeigt die Seitenansicht von rechts mit Angabe der Schattenflächen und Beifügung einiger Lagen der Geraden, welche entstehen, wenn man die Fläche durch Vertikalebenen schneidet, welche die ursprüngliche Lage der horizontalen Parabel berühren. Eine wichtige Ebene dieser Art ist die Vertikalebene parallel zur Lichtrichtung; sie liefert den Durchgangspunkt a, in welchem die Körperschattengrenze jene horizontale Parabel schneidet.

Der Schlagschatten erscheint an der Aussenseite des Mantels; würde der Parameter der festen Parabel genügend vergrössert, so würde nur auf der Innenseite Selbstbeschattung stattfinden. Zwischen beiden Fällen liegt ein Grenzfall, in welchem gar kein Schlagschatten erscheint; er ist geboten, wenn die zwei Geraden, nach welchen die Fläche von einer tangierenden vertikalen Lichtstrahlenebene geschnitten wird, im Aufriss unter 45^0 stehen und beide gegebene Parabeln kongruent sind. Für die Schlagschattenbestimmung hätten auch Schnitte parallel zur Vertikalebene, die ebenfalls alle kongruent sind, verwertet werden können.

Das allgemeine Verfahren ist durch Einzeichnen der mit einer vertikalen Lichtstrahlenebene erhaltenen Schnittkurve angedeutet.

70. Schraubenflächen, Wendelflächen. Die Schrauben und die schraubenförmig verdrehten Stabformen.

Eine Schraubenfläche im weitesten Sinne entsteht, wenn eine Gerade auf einer Schraubenlinie derart fortschreitet, dass sie ihre Richtung gegenüber der Schraubenlinie nicht ändert, das heisst, dass sie einen Kreiscylinder, der die Achse mit der Schraubenlinie gemeinschaftlich hat, fortwährend berührt und mit den Mantellinien dieses Cylinders immer denselben Winkel einschliesst. Auch die Berührung dieses Cylinders findet nach einer Schraubenlinie statt, und zwar hat diese dieselbe Ganghöhe wie die als Leitlinie dienende.

Ein erster besonderer Fall ist geboten, wenn die bewegliche Gerade die Tangente der Schraubenlinie bildet; die Fläche heisst dann eine „entwickelbare“ Schraubenfläche. Ein zweiter, bei den scharfgängigen Schrauben verwirklichter Fall ist der, dass die erzeugende Gerade die Achse der Schraubenlinie schneidet (wobei der obengenannte Cylinder den Durchmesser Null angenommen hat), und der Winkel zwischen beiden Geraden wieder unveränderlich ist. Wird der Winkel zwischen der Achse und der Erzeugenden ein rechter (gleichviel ob sie sich schneiden oder nicht), so heisst die gebildete Fläche eine Wendelfläche. Unterflächen von Wendeltreppen und die Gewindeflächen flachgängiger Schrauben sind Wendelflächen.

Die Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen auf die Schraubenflächen aller Art gestaltet sich ganz wie in Art. 27 für „Regelflächen“ überhaupt beschrieben (Figur 70a). Man zeichnet eine genügende Zahl von Mantellinien in Grundriss und Aufriss, indem man den Umfang des Grundrisskreises und die Ganghöhe der Schraubenlinie je in 8 oder 12 oder 16 gleiche Teile teilt und Gebrauch macht von der Thatsache, dass bei einem Fortschreiten der Erzeugenden im Grundriss von einem Teilpunkt zum andern ihre beiden Endpunkte um denselben Bruchteil der Ganghöhe höher rücken. Die Schnittkurve einer jeden vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Fläche ergiebt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte dieser Ebene mit den verschiedenen Mantellinien, die im Grundriss vorhanden sind, sobald die Lichtstrahlprojektion gezogen ist, hinauflotet in die Aufrisse der Mantellinie und die erhaltenen Punkte verbindet. Im übrigen gelangt die allgemeine Lösung aus Art. 27 ohne weitere Hilfsmittel zur Verwertung; für den unteren Teil der Fläche sind die Schnittkurven eingezeichnet.

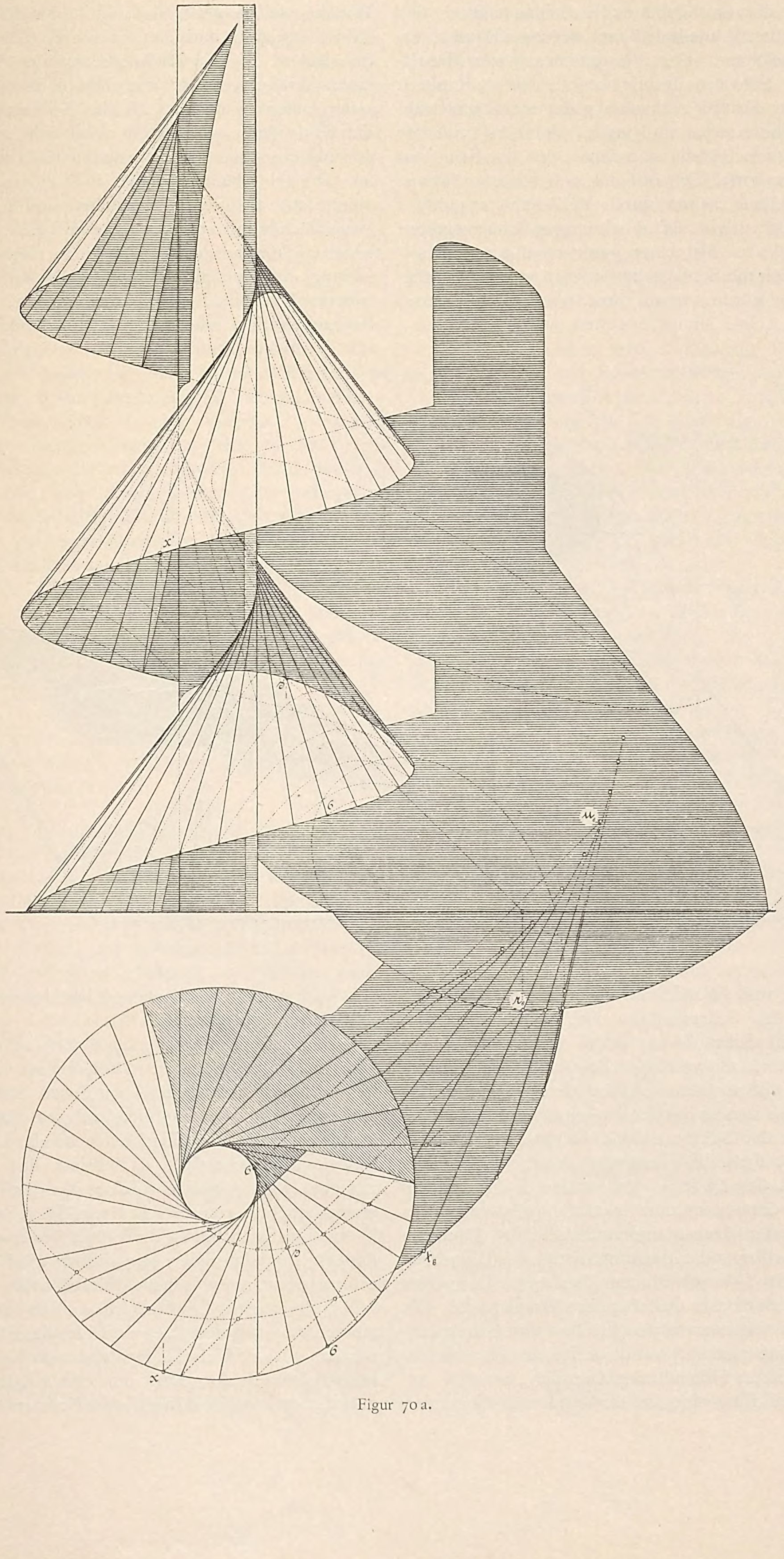
Dieses allgemeine Verfahren liefert zwar die Schlagschattengrenzen rasch und genügend scharf, leidet aber in Beziehung auf die Körperschatten an dem Mangel, dass die Berührungspunkte der Tangenten innerhalb weiter Grenzen unsicher sind. Eine genauere Bestimmung ist möglich nach Art. 105; die dort genannte Lichtstufenlinie ± 4, die mit dem Werkzeug der Beleuchtungskunde, der „Normalkugel“ erhalten wird, ist nichts anderes als die Körperschattengrenze der Fläche.

Eine weitere Konstruktion für die Schlagschattengrenzen, ebenfalls in Figur 70a zur Anschauung gebracht, ist die folgende. Man sucht auf einer beliebigen Horizontalebene (hier der Grundebene) die Schlagschatten einer Anzahl von Mantellinien, ferner den Schlagschatten derjenigen Linie, deren Schlagschatten auf der Schraubenfläche zu suchen ist, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung in Figur 70a, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines anderen Körpers. Wo der Schlagschatten $t_6 u_6$ einer Mantellinie 6 geschnitten wird vom Schlagschatten dieser Grenzlinie (das heisst des nächstoberen Flächenrandes), da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten r_6 derjenigen zwei Punkte s und x beider Linien, die einander in Schatten setzen. Dieser Schlagschattenpunkt liegt auf demselben Lichtstrahl mit den zwei Punkten, so dass ein durch ihn rückwärts bis zur Mantellinie gezogener Lichtstrahl zum Schlagschattenpunkt ss' auf der Fläche führt. Selbstverständlich ist der erhaltene Punkt nur dann ein wirklicher Schattengrenzpunkt, wenn die Mantellinie nicht selbst im Körperschatten ist; denn andernfalls kann sie keinen Schatten aufnehmen. Man erhält auf diesem Weg die Schlagschattengrenze rasch und genügend scharf.

Auch zur Bestimmung der Körperschattengrenze kann dieses Verfahren dienen, wenigstens der Theorie nach. Man sucht auf derselben Horizontalebene die Schlagschatten einiger Mantellinien aus demjenigen Teil der Fläche, auf welchem die Schattengrenze zu vermuten ist, zeichnet die Umhüllungskurve dieser Schlagschattenlinien und bestimmt möglichst scharf den Berührungspunkt zwischen der Kurve und jeder Mantellinie. Der durch einen solchen Berührungspunkt rückwärts gezogene Lichtstrahl führt zu dem Körperschattengrenzpunkt auf der zugehörigen Mantellinie. Wo der Durchschnitt unsicher wird, da ist zu beachten, dass die Mantellinie selbst durch den Körperschattenpunkt im gleichen Verhältnis eingeteilt wird wie die Schlagschattenlinie durch den Berührungspunkt. An die Stelle der horizontalen Ebene kann bei diesem Verfahren auch die vertikale Grundebene oder eine dazu parallele Ebene treten. Leider stösst es bei der praktischen Ausführung gewöhnlich auf unüberwindliche Hindernisse, indem es um so schwieriger ist, die Berührungspunkte auf den Schatten der Erzeugenden zu bestimmen, je mehr sich die Schraubenfläche einer entwickelbaren nähert. —

Wenn die erzeugende Gerade der Schraubenfläche horizontal wird, so entsteht die Wendelfläche. Die Bestimmung der Schattengrenzen bleibt dabei völlig unverändert.

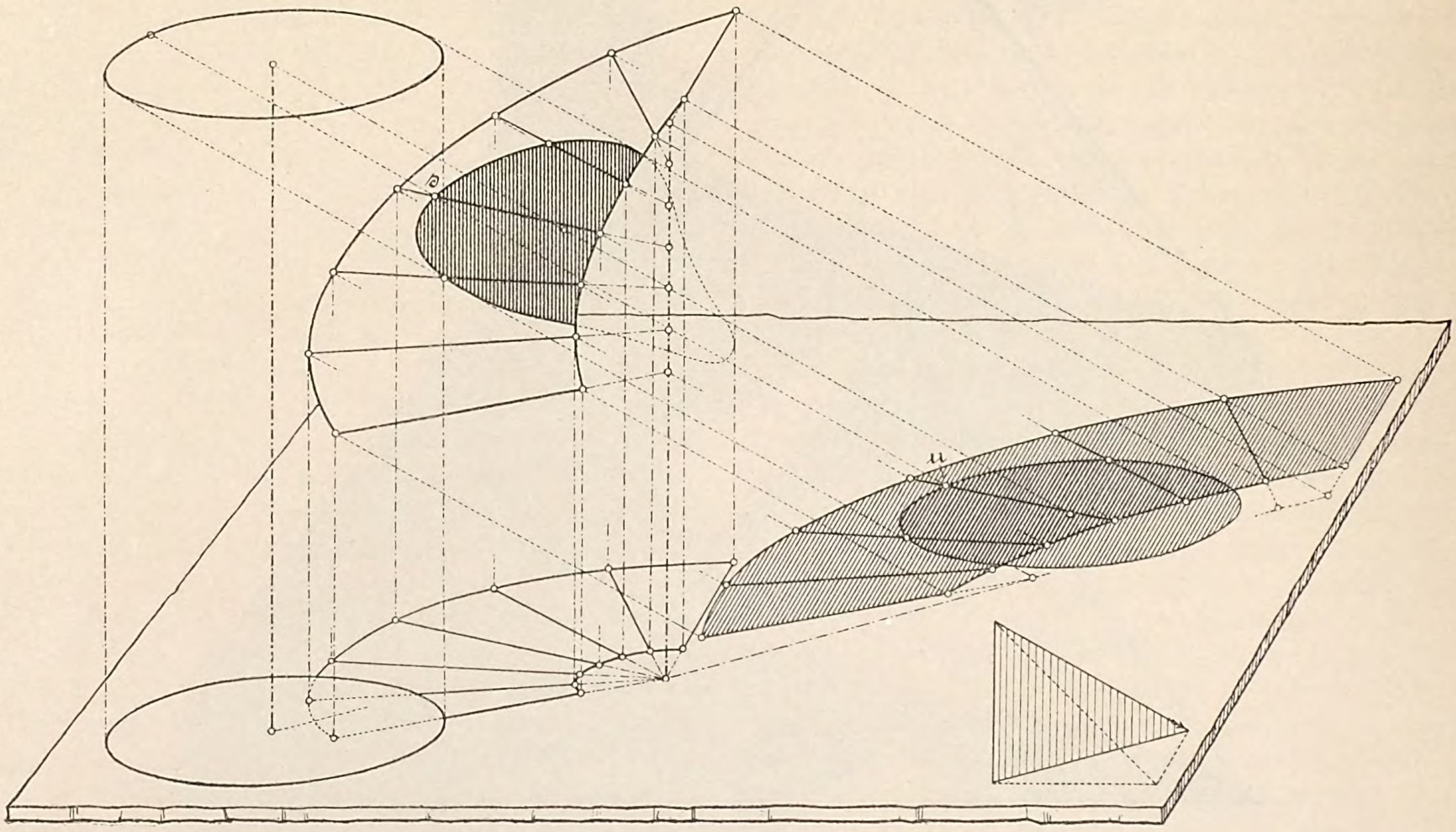
In Figur 70b ist der zweite für die Schraubenfläche beschriebene Weg der Schlagschattenbestimmung in seiner Anwendung auf eine Wendelfläche parallelperspektivisch zur Anschauung gebracht. Auf der horizontalen Grundebene ist links der Grundriss eines schattenwerfenden horizontalen Kreises und einer beschatteten Wendelfläche mit sieben Mantellinien perspektivisch gezeichnet, darüber die beiden Raumgebilde selbst. Auf dem gewöhnlichen



Figur 70a.

Weg sind auf der Grundebene die Schlagschatten des Kreises, der sieben Mantellinien und der zwei Ränder der Wendelfläche bestimmt. Der Schatten der vierten Mantellinie wird vom Schatten des Kreises in einem Punkt *u* geschnitten. Ein durch *u* rückwärts gezogener Lichtstrahl trifft die Mantellinie selbst im Punkt *s*, der ein Punkt der Grenze des Schlagschattens sein muss, den der Kreis auf die Wendelfläche wirft. Er bestimmt sich schärfer daraus, dass die Mantellinie selbst durch den Schattenpunkt *s* ebenso eingeteilt wird wie ihr gleich langer Schlagschatten durch den Punkt *u*. Mit einer punktierten Linie ist angegeben, wie sich die Schlagschattenfigur auf der Wendelfläche ergänzen würde, wenn diese über ihren inneren Rand und ihre Achse hinaus erweitert würde.

Winkel, welche der Höhenschnitt der Schraube nach dem zuvor Gesagten darbietet, durch Kreisbögen abgerundet. So hat z. B. das Schraubensystem nach Whitworth einen Winkel von 55° zwischen den geneigten Dreiecksseiten; diese sind in 6 gleiche Teile geteilt gedacht und die Kreisbögen sowohl der konkaven als der konvexen Abrundung schliessen je am äussersten Teilpunkt berührend an. Die Oberflächen solcher Schrauben sind also zusammengesetzt aus Schraubenflächen und schraubenförmigen Wulstflächen mit kreisförmigem Vertikalschnitt. Diese letzteren können beim Schattieren nach der allgemeinen Lösung mit Vertikalschnitten parallel zum Lichtstrahl ohne weitere Hilfsmittel einbezogen werden, indem man die Schraubenlinien, die auf diese Flächen fallen, in Grund-



Figur 70 b.

Schrauben- und Wendelflächen sind am häufigsten verwirklicht in den Schrauben. Die scharfgängige (vertikalstehende) Schraube entsteht, wenn ein gleichschenkliges Dreieck mit vertikaler Basis auf einer flachen Schraubenlinie mit vertikaler Achse derart fortschreitet, dass seine Ebene immer durch die Achse geht und seine Fusspunkte auf der Schraubenlinie bleiben. Aus dieser Erklärung folgt, dass die Ganghöhe der Schraubenlinie gleich der Basis des Dreiecks sein muss. Es giebt auch Schrauben mit doppeltem und dreifachem Gewinde, bei welchen zwei oder drei übereinandergestellte Dreiecke derselben Form drehend fortschreiten und die Ganghöhe der beschriebenen Schraubenlinien gleich dem Doppelten oder Dreifachen der Basis des einzelnen Dreiecks ist. Die von den Dreiecksseiten erzeugten Flächen sind Schraubenflächen der einfachsten Art, und es ist zu deren Schattierung kein weiteres Hilfsmittel notwendig.

In der Ausführung sind die ein- und ausspringenden riss und Aufriss zeichnet und benutzt wie diejenigen auf den Schraubenflächen.

Bei den flachgängigen Schrauben erscheint anstatt des gleichschenkligen Dreiecks der vorigen ein Rechteck mit horizontalen und vertikalen Seiten, das bei bestimmten Systemen zum Quadrat wird. Die Ganghöhe der erzeugten Schraubenlinien ist meist das Doppelte der vertikalen Rechtecksseite; das heisst das hohle Rechteck zwischen je zwei vollen Rechtecken des Höhenschnitts ist ebenso hoch wie diese. Die wagrechten Seiten beschreiben Wendelflächen. Auch die Schrauben dieser Art können doppelte und dreifache sein, indem zwei oder drei Rechtecke übereinander drehend fortschreiten.

Schraubend verdrehte Stabformen können als zusammengesetzt aus Schraubenflächen aufgefasst werden und sind als Gegenstände der Beleuchtungskunde beschrieben in Art. 106; um den Zusammenhang nicht aufzuheben, ist dort auch die Konstruktion der Schlag-

schattengrenzen erklärt, die sich übrigens ganz in derselben Weise finden lassen wie bei den Schraubenflächen. Die Körperschattengrenze ergiebt sich als Lichtstufenlinie ± 4 oder auch ohne die Hilfsmittel der Beleuchtungskunde auf eigenen Wegen, die ebenfalls in Art. 106 gezeigt sind.

Verwandt mit den Schraubenflächen, weil auffassbar als aus solchen zusammengesetzt, ist ferner das ringförmig-steigende Tonnengewölbe. Es ist als Gegenstand der Beleuchtungskunde ebenfalls behandelt in Art. 106 und in den Figuren 106c und d. Ein Halbkreis mit vertikaler Achse (oder Segmentbogen oder Spitzbogen oder eine andere Mauerbogenlinie) rückt derart fort, dass sein Scheitelpunkt immer auf einer vertikalstehenden Schraubenlinie bleibt und seine Ebene immer durch die Achse dieser Schraubenlinie geht. Jede Tangente an dem beweglichen Bogen beschreibt eine Schraubenfläche. Das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen ist hier das nächstliegende, weil Schlagschatten auftreten. Zu seiner Durchführung ist eine genügende Zahl der von den Kreispunkten beschriebenen Schraubenlinien in Grundriss und Aufriss zu zeichnen. Für jeden im Grundriss gezogenen Lichtstrahl sind die Schnittpunkte mit den Grundrisskreisen in die Aufrisse der Schraubenlinien hinaufzuloten (und bei schiefwinkligem Durchschnitt mit Hilfe der Proportionalität der Höhen und Centriwinkel schärfer zu bestimmen). Hiedurch wird im Aufriss die Schnittlinie der vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Leibungsfläche erhalten, die mit den übrigen in bekannter Weise zu benützen ist.

71. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Querschnitt.

Unter einer „Röhrenfläche" versteht man zwar gewöhnlich die Fläche, welche ein unveränderlicher Kreis bei normalgerichtetem Fortschreiten auf irgend einer Linie erzeugt; hier sollen jedoch, um eine kurze Bezeichnung für eine in der Technik nicht selten vorkommende Art von Flächen zu haben, als Röhrenflächen im weitesten Sinn bezeichnet werden alle Flächen, welche eine beliebige unveränderliche oder geometrisch ähnlich bleibende gekrümmte oder zusammengesetzte ebene Linie erzeugt, indem ein Punkt ihrer Ebene auf einer Leitlinie fortschreitet und ihre Ebene immer normal zu dieser Linie bleibt. (Man kann ja die bewegliche Linie immer zur geschlossenen Figur ergänzen, so dass in der That eine „Röhre" erzeugt wird.) Zur Begriffserklärung der Fläche gehört noch, dass sich die bewegliche Linie gegenüber der Leitlinie auch nicht in ihrer eigenen Ebene verdrehen darf; das heisst, es muss bei einer ebengekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in der Ebene der Leitlinie bleiben, und bei einer gewundenen Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in die „Schmiegungsebene" der Leitlinie fallen; mit andern Worten, die bewegliche Linie muss immer dieselbe Lage gegenüber der „Hauptnormalen" der Leitlinie beibehalten.

(„Schmiegungsebene" in einem bestimmten Punkt einer gewundenen Kurve heisst diejenige Ebene, welche durch die beiden an den Punkt anstossenden, geradlinig gedachten Elemente der Kurve gelegt ist. Verbindet man den Punkt geradlinig mit einem vor ihm liegenden und einem nachfolgenden Punkt, so bilden die beiden Verbindungslinien eine bestimmte Ebene. Nähern sich die beiden Punkte dem gegebenen, so schmiegt sich die Ebene der Kurve immer mehr an; fallen sie endlich mit dem gegebenen zusammen, so ist die Ebene zur „Schmiegungsebene geworden. Die Tangente liegt in der Schmiegungsebene. — „Hauptnormale" für einen bestimmten Punkt einer gewundenen Kurve heisst die Schnittlinie der Schmiegungsebene mit der Normalebene oder zur Tangente senkrecht stehenden Ebene; diese Linie steht also senkrecht zur Tangente.)

Im vorliegenden Artikel sind die Röhrenflächen im engeren Sinn, das heisst diejenigen mit kreisförmigem unveränderlichem Normalschnitt behandelt. Sie können auch als Umhüllungsflächen aller Lagen einer unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der als Leitlinie gegebenen Kurve fortschreitet; jede solche Kurve berührt die Röhrenfläche nach einem Normalschnittkreis, und wo die Körperschattengrenzpunkte auf diesem als auf einem Bestandteil der Kugel liegen, da liegen sie auch für die Röhrenfläche.

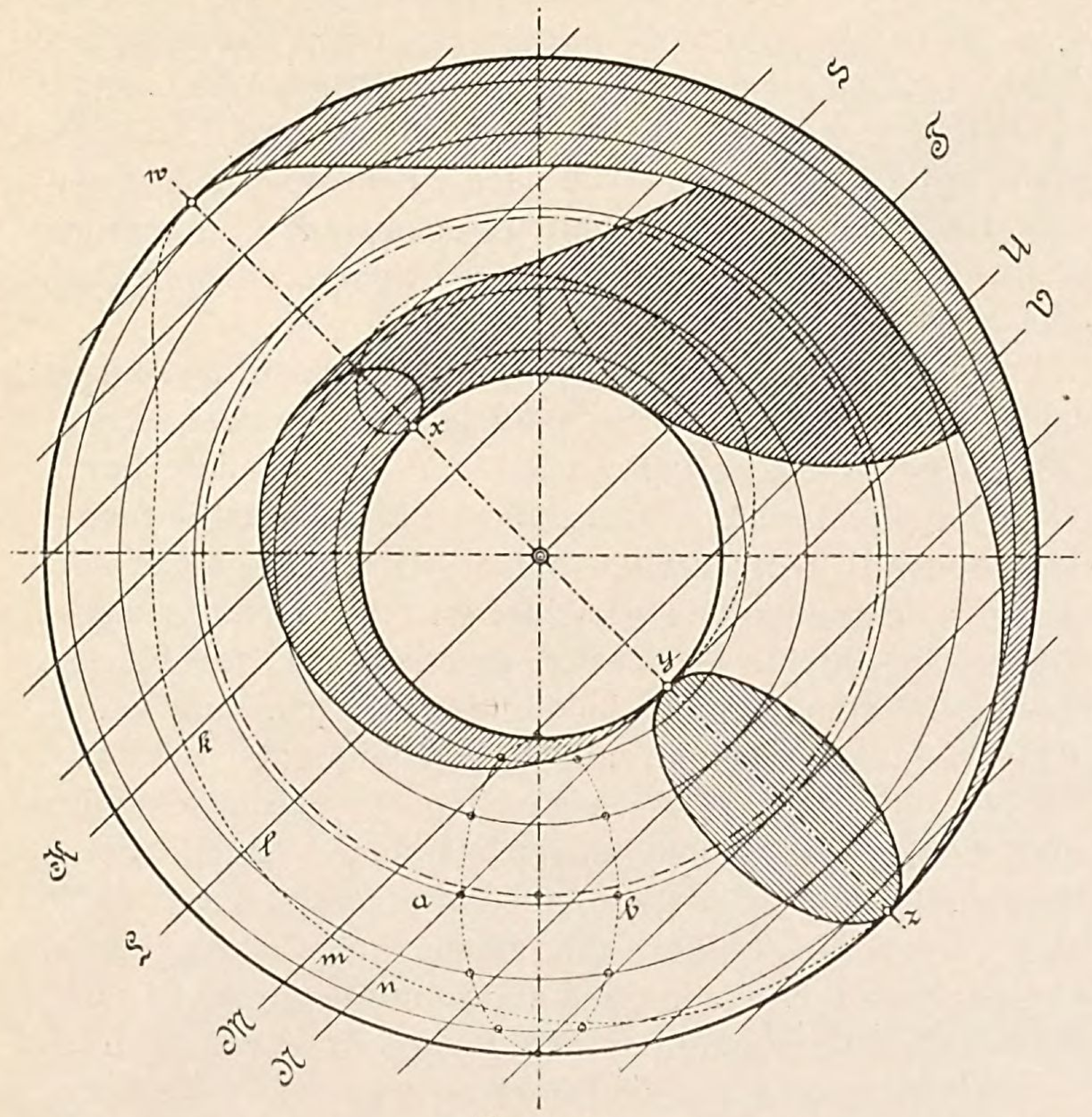
Das interessanteste Beispiel einer solchen Fläche ist die schraubenförmige Röhre, die auch zuweilen der schraubenförmige Wulst genannt wird. Sie wird erzeugt durch einen unveränderlichen Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet und dessen Ebene immer normal zur Schraubenlinie gerichtet ist. Jeder Punkt dieses Kreises beschreibt eine Schraubenlinie auf der Fläche; alle diese Schraubenlinien haben dieselbe Achse und Ganghöhe wie die gegebene, aber ihre Steigungen sind verschieden. Die Fläche lässt sich nach dem Voranstehenden auch erklären als Umhüllungsfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet. Jede Lage der Kugel berührt die Fläche längs eines Grosskreises, dessen Ebene normal zur Schraubenlinie steht und der mit dem vorgenannten beweglichen Kreis identisch ist.

Zur Bestimmung der Schattengrenzen, wofür die Achse vertikal gedacht sein mag, steht zunächst das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen zur Verfügung, und zwar gestaltet es sich wie folgt:

Man zeichnet im Grundriss eine genügende Zahl der zuvor genannten konzentrischen Schraubenlinien, indem man den beweglichen Kreis in 6, 8 oder 12 gleiche Teile teilt und die einander entsprechenden Teilpunkte der verschiedenen Lagen verbindet. Dabei ist zu beachten, dass die elliptischen Grundrisse aller Lagen des beweglichen Kreises kongruent und mit der grossen Achse gegen den Mittelpunkt gerichtet sind. Das Achsenverhältnis dieser Ellipsen ergiebt sich, indem man (Figuren 71a und 71b) eine Lage des beweglichen Kreises so annimmt, dass er sich im Aufriss als gerade Linie $a' b'$ projiziert, das heisst an einem Punkt, in welchem die schraubenlinienförmige Röhrenachse eine Tangente parallel zur Vertikalebene hat. Ist aus diesem Aufriss die erste Grundrissellipse abgeleitet, so legt man durch deren Punkte konzentrische Kreise; diese stellen die Grundrisse jener Schraubenlinien dar.

Teilt man nun den Grundrisskreis in 8 oder 12 Teile und zeichnet für jeden Teil die Ellipse ebenso wie sie sich für jenen ersten Punkt ergeben hat, so lassen sich die zu jeder Ellipse gehörigen Aufrisspunkte erhalten, indem man Gebrauch macht von der Thatsache, dass beim Fortschreiten des Schnittkreises von einem Teilpunkt zum andern alle seine Punkte um gleich viel, und zwar hier um ein Achtel oder Zwölftel der ganzen Ganghöhe höher rücken. Die stetige Verbindung der einander entsprechenden Punkte der Aufrissellipsen des beweglichen Kreises liefert die Aufrisse jener Schraubenlinien. Figur 71 b zeigt ihre Bewegung auf der Fläche.

Die Schnittkurve zwischen der Fläche und einer beliebigen vertikalen Lichtstrahlenebene ergiebt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den konzentrischen Kreisen aus dem Grundriss auf die



Figur 71 a.

Schraubenlinien im Aufriss hinauflotet. Wo der Schnitt allzu schief wird, da lässt sich die Höhenlage des Punktes aus der Steigung der zugehörigen Schraubenlinie schärfer bestimmen, da die in jedem Punkt einer Schraubenlinie erreichte Höhe proportional dem Centriwinkel ist. Figur 71 c zeigt die Fläche mit allen im Grundriss Figur 71 a angegebenen Vertikalschnitten, worunter auch diejenigen der inneren, die Röhre in x und y berührenden Ebenen, deren Kurven schief verzogene doppelte Schleifen bilden.

Die Körperschattengrenze ergiebt sich nun in bekannter Weise als Verbindungslinie der Berührungspunkte k' l' m' n' der Lichtstrahltangenten, welche im Aufriss an die Schnittkurven gezogen werden. Wo eine solche Tangente eine in derselben Vertikalebene liegende zweite Schnittkurve schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt.

Schnittkurve K liefert z. B. links oben den Körperschattenpunkt k; die Verlängerung des berührenden Lichtstrahls schneidet rechts unten die in derselben Vertikalebene mit K liegende Schnittkurve S im Punkt s'; dieser ist ein Punkt der Schlagschattengrenze. Ebenso liefern die Körperschattenpunkte l' m' n' u. s. w. die Schlagschattenpunkte t' u' v' u. s. w.

Die obere Grenzkurve der Schlagschattenfläche ist nur im Grundriss sichtbar; im Aufriss konnte sie nicht eingetragen werden, da sie fast durchaus mit dem oberen Umriss der Röhre zusammenfällt.

Die Schnittpunkte x' und y' der zuvor genannten doppelten Schleifen sind wichtige Körperschattengrenzpunkte. Ebenso liefern die im Grundriss den äusseren Umriss berührenden Lichtstrahlen die wichtigen Grenzpunkte w' und z' in gleicher Höhenlage mit den vorigen; die Höhenlage lässt sich aus der Ganghöhe leicht scharf bestimmen. Die Körperschattengrenzen werden im Grundriss durchaus symmetrisch zur Achse $w\,z$, weil die Schnittkurven, beziehungsweise Paare von Schnittkurven, welche die vertikalen Lichtstrahlenebenen liefern, polar kongruente Hälften haben, beziehungsweise polar kongruent sind.

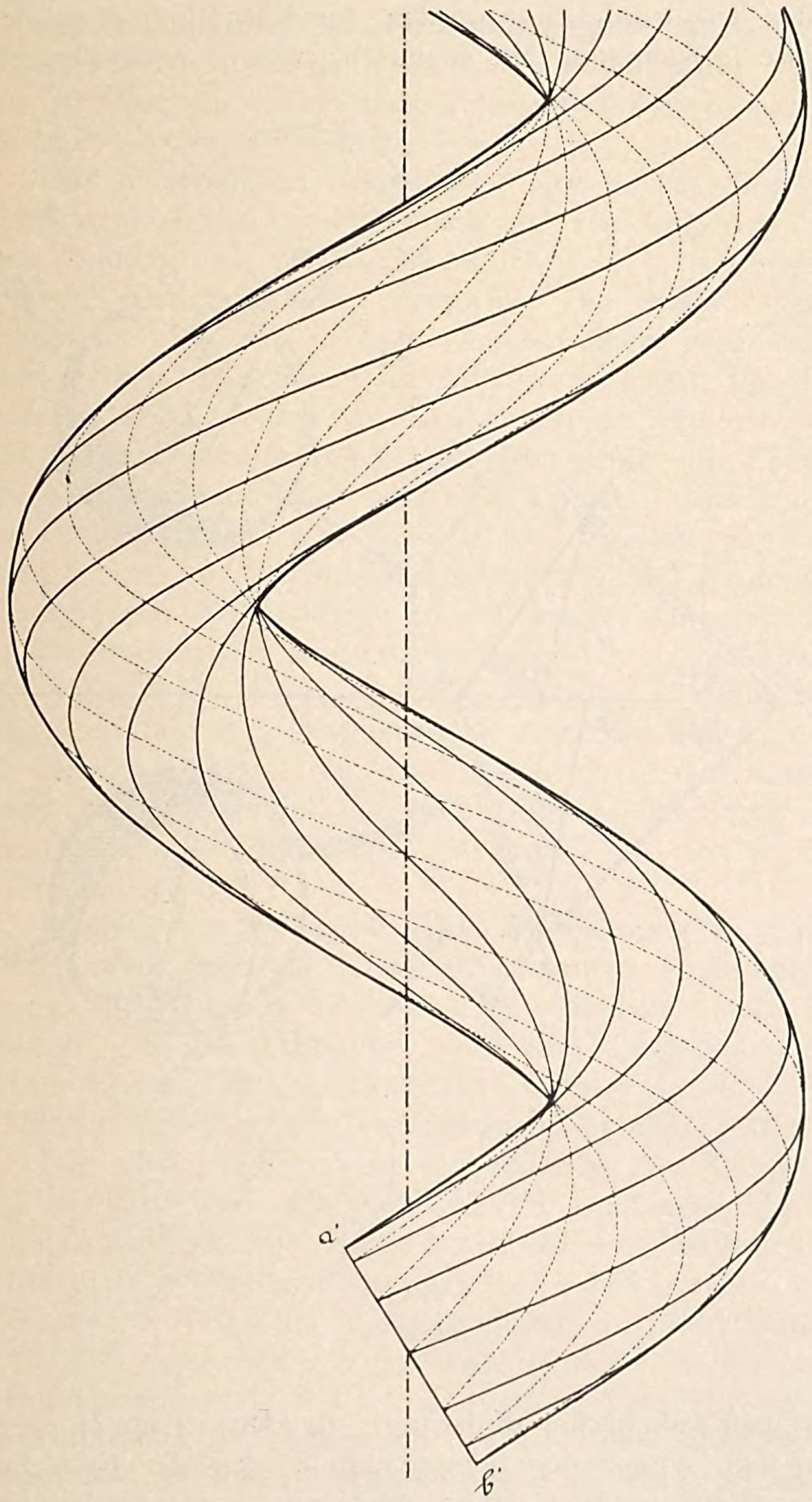
Um den Verlauf der Kurven noch deutlicher zu zeigen, ist in Figur 71 d ein Vertikalschnitt nach dem Grundrissdurchmesser $L\ T$ beigefügt, der auch die im Aufriss nicht sichtbare obere Schlagschattengrenze darbietet. In diesem Schnitt fallen die Projektionen der Punkte xx' und ww' aufeinander. Zu beachten ist, dass die in der Figur erscheinende Vertikalschnittfläche der Röhre nicht symmetrisch zu ihrer vertikalen Mittellinie, sondern innen voller ist als aussen.

Interessant ist das Hinuntersteigen der inneren Körperschattengrenze von der oberen Hälfte zur unteren im Punkt xx' mit der Schleife im Grundriss, ebenso der Uebergang der äusseren Körperschattengrenze mit Fallen und Wiederaufsteigen in der Nähe des Punktes ww' unter Bildung einer kleinen Schleife im Aufriss. Auf der entgegengesetzten Seite der Röhre, an den Punkten y und z, verlaufen die Schattengrenzen ohne jeden Konflikt.

Ein eigenartiger Grenzfall für diese Uebergänge wird erhalten, wenn man den Steigungswinkel der leitenden Schraubenlinie der Röhre genau der Neigung des Lichtstrahls entsprechend, also gleich dem Winkel $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$ annimmt. Ein Kreiscylinder, dessen Achse mit der Richtung des Lichtstrahls zusammenfällt, hat Körperschatten als Streiflicht auf der ganzen Mantelfläche. Wird er im Grundriss um einen kleinen Winkel flacher zum Grundschnitt gedreht, so erhält die rechte Hälfte Licht; wird er etwas steiler zum Grundschnitt, die linke. Dies angewendet auf den genannten Fall und auf den Normalschnitt $w\,x$ mit zwei nahen Normalschnitten rechts und links von ihm ergiebt folgendes: Eine obere Grenzkurve läuft stetig durch den höchsten Punkt des Normalschnitts $w\,x$, ebenso eine untere durch den tiefsten. Der Normalschnittkreis $w\,x$ selbst ist ebenfalls Körperschattengrenze. Von den vier Flächenräumen, welche durch die drei Kurven abgegrenzt werden, haben zwei Scheitelräume Licht und zwei solche Schatten, und zwar sind im Schatten der äussere untere und der obere innere. In diesem Grenzfall findet also der Uebergang der Schattengrenze von oben nach unten und umgekehrt auf dem Normalschnittkreis selber statt. Wird

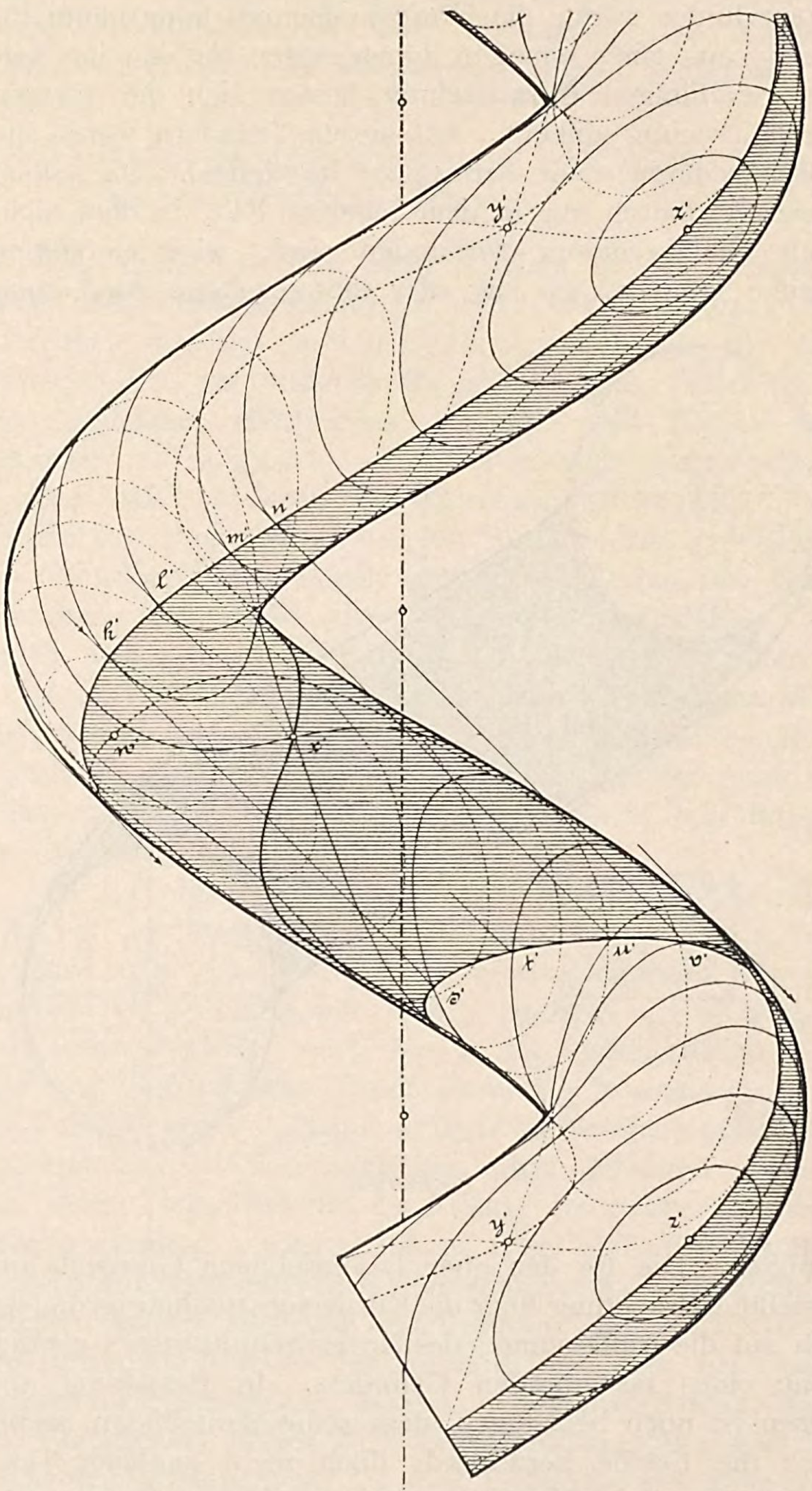
die Röhrenachse noch flacher angenommen, so trennen sich die Schattengrenzen wieder und verlaufen ohne Verwicklung, bis als weiterer Grenzfall der wagrecht liegende Wulst mit kreisförmiger Mittellinie (Figur 38a) erreicht ist.

Die Schlagschattengrenzlinie wird auf dem oben beschriebenen Weg genügend scharf bestimmt; auch wird für sie ein anderes Verfahren kaum rascher zum Ziel führen. Dagegen kann man die Körperschattengrenze in



Figur 71b.

der angegebenen Weise wegen der Unmöglichkeit der scharfen Bestimmung der Berührungspunkte, wenn auch wohl praktisch genügend, doch minder genau erhalten. Zu einer exakten Konstruktion führt die Betrachtung des Normalschnittkreises der Röhrenfläche als des Bestandteils der berührenden Kugelfläche. Legt man im Grundriss auf die elliptischen Projektionen der Normalschnitte nacheinander den Grundriss einer mit ihrer elliptischen Schattengrenze versehenen gleich grossen Kugel, und zwar so, dass die kleine Achse der Kugelellipse immer in der Richtung des Lichtstrahls bleibt, so kann man auf jeden Normalschnitt die zwei Punkte durchstechen, in welchen die Kugelschattengrenze, also auch die Röhrenschattengrenze, die Normalschnittellipse schneidet. Für die Aufrisspunkte kann man entweder dasselbe Verfahren mit dem Aufriss der Kugel gegenüber den Aufrissellipsen der Normalschnitte anwenden, oder man kann die Grundrisspunkte

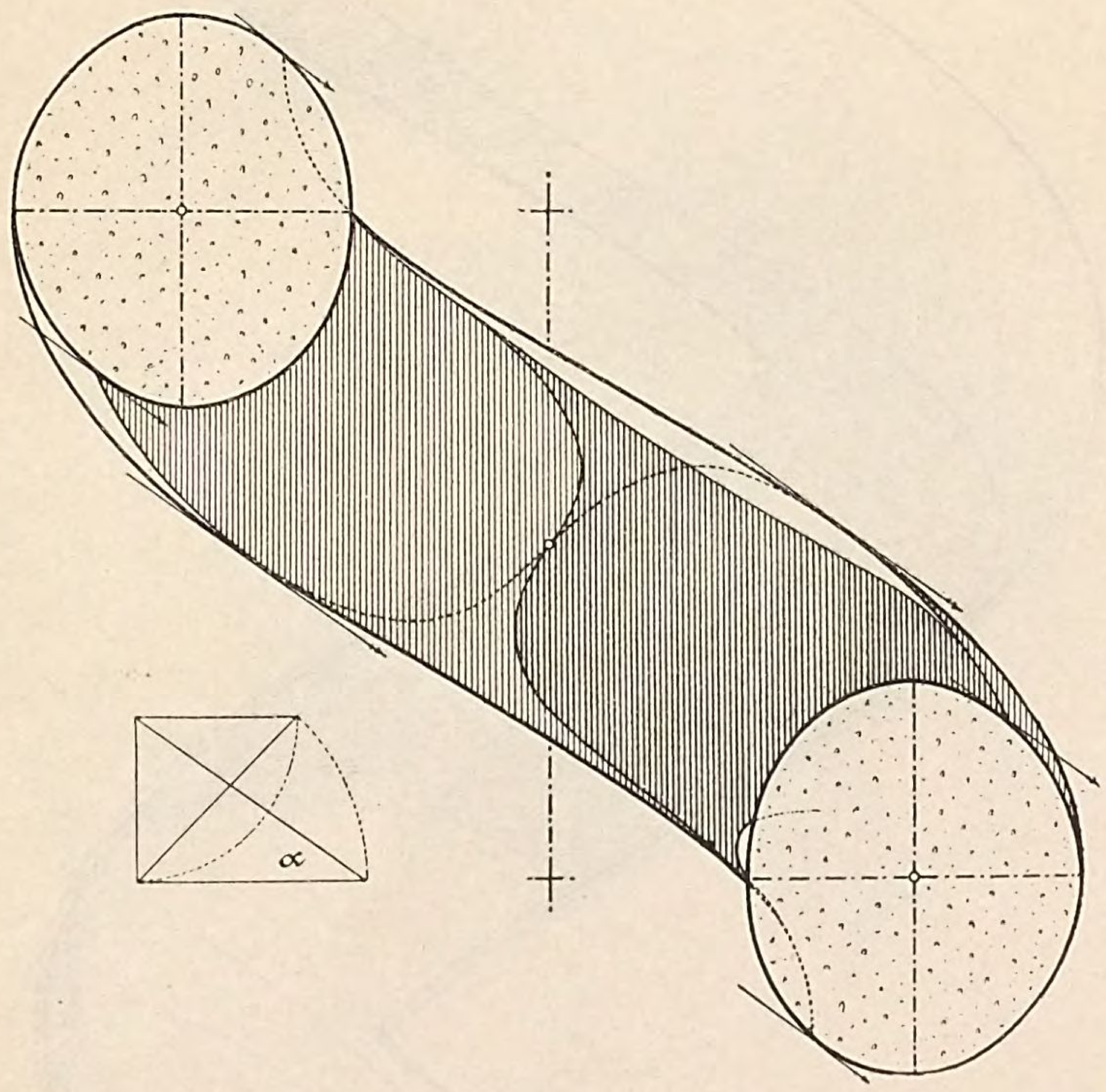


Figur 71c.

in den Aufriss hinaufloten, oder endlich man kann wieder die Höhenlage jedes Aufrisspunktes über oder unter dem Mittelpunkt seiner Kugel aus dem Grundriss ableiten. Der vertikale Abstand eines solchen Grenzpunktes vom Mittelpunkt seiner Kugel ist nämlich proportional dem Abstand seines Grundrisspunktes von der grossen Achse seiner Grundrissellipse, da alle Normalschnitte gleiche Horizontalneigung haben; an dem Normalschnitt, der sich im Aufriss als gerade Linie projiziert, lassen sich für alle

solche Grundrissabstände die zugehörigen Höhen leicht abnehmen. Diese Körperschattenbestimmung bildet einen Bestandteil der Konstruktion der Lichtstufenlinien, die in Art. 107 beschrieben ist, wonach in Beziehung auf den Gang der Konstruktion auf diesen Artikel verwiesen werden kann.

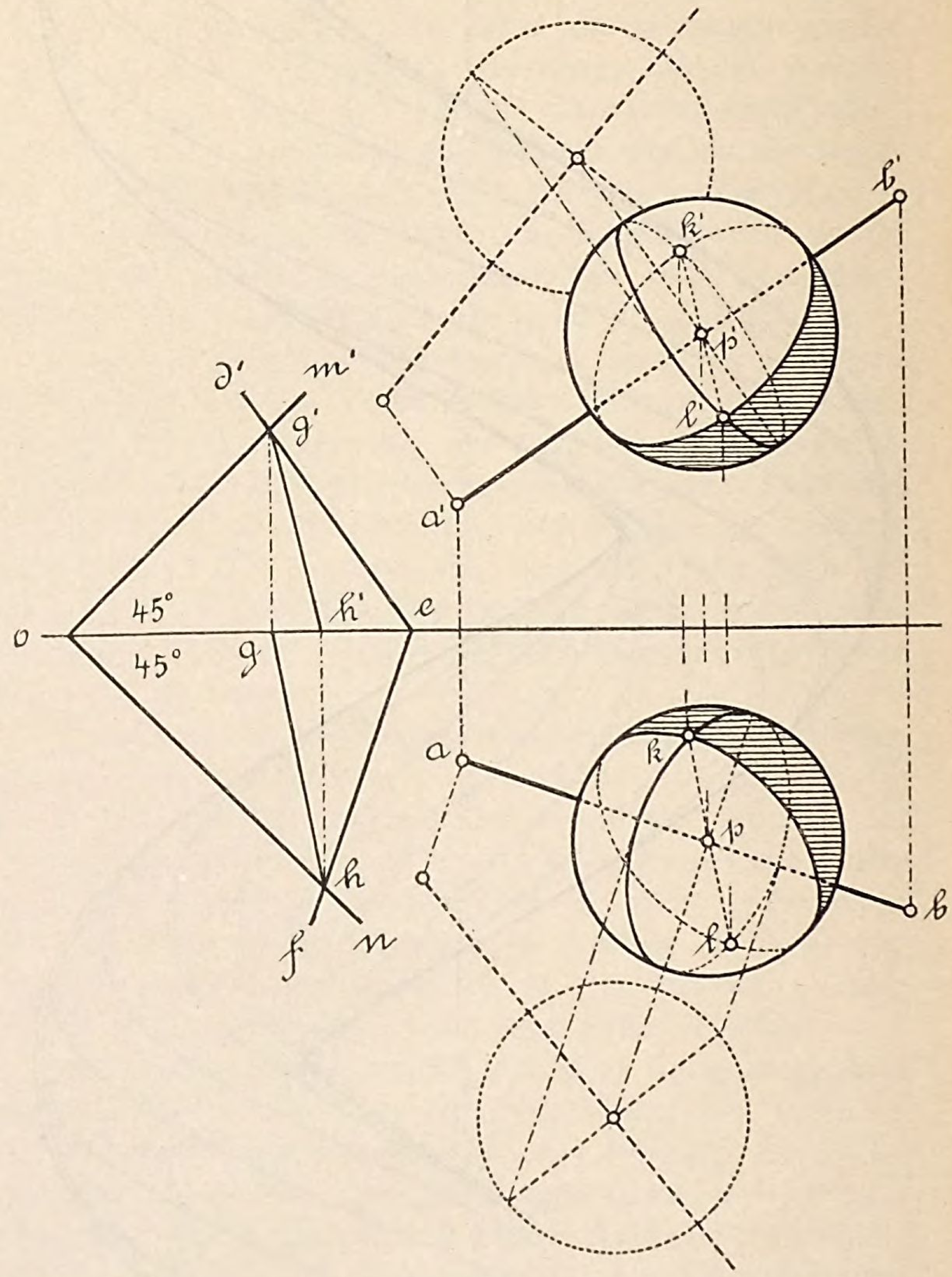
Ein dritter Weg wäre die Auffassung jedes Normalschnittkreises als der Zone einer schiefgerichteten Cylinderfläche mit diesem Normalschnitt. Für alle derart erhaltenen Kreiscylinder wären die Horizontalspuren kongruente Ellipsen; aus einer einzigen konstruierten für den im Aufriss geradlinigen Normalschnitt liessen sich die übrigen durch Drehung ableiten. Auf diesen Cylindern wären die Körperschatten nach Art. 49 zu bestimmen. Da jedoch dieses Verfahren nur in dem seltenen Fall, in dem nicht auch Schlagschatten vorhanden sind, wird empfohlen werden können, so mag hier die gegebene Andeutung



Figur 71 d.

genügen. Die für den oben beschriebenen Grenzfall angestellte Betrachtung über die Körperschattenlinie gründete sich auf die Auffassung jedes Normalschnittkreises als der Zone eines berührenden Cylinders. In Beziehung auf diesen ist noch beizufügen, dass seine Mantellinien, wenn auch die Fläche berührend, doch nicht zugleich Tangenten der Schraubenlinien auf der Röhrenfläche sind; diese haben ja verschiedene Neigungen und sind innen steiler als aussen, wogegen die Mantellinien des gedachten Cylinders alle die Neigung der leitenden Schraubenlinie haben. Die Tangenten an den Schraubenlinien erzeugen eine Fläche weit höherer Ordnung. Folgerichtig ist aber auch die Grundrissrichtung jeder solchen Tangente eine andere als die der Cylindermantellinie in demselben Punkt. Es gehen also durch den Berührungspunkt einer Tangentialebene an der Fläche drei Gerade, die alle in dieser Ebene liegen, erstens die Cylindermantellinie senkrecht zur Normalschnittebene oder parallel zur Tangente im zugehörigen Punkt der leitenden Schraubenlinie, zweitens die Tangente am Normalschnittkreis, drittens die Tangente an der Schraubenlinie.

Tritt an die Stelle der Schraubenlinie der betrachteten Röhre eine beliebige andere Kurve, so erscheint der allgemeine Fall der Röhrenfläche mit kreisförmigem Normalschnitt. Auch dieser Fall kann als Umhüllungsfläche aller Lagen einer beweglichen unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der Kurve fortschreitet. Mit ebenen Kurven ist er häufig ver-



Figur 71 e.

wirklicht (elliptischer Wulstring); als Beispiel für eine gewundene ausser der Schraubenlinie mag der Rundstab eines Bogengesimses (einer „Archivolte“) auf cylindrischer Wandfläche genannt werden.

Zur Bestimmung der Körperschattengrenze führt im allgemeinen am raschesten die oben bei der Schraubenröhre durchgeführte Betrachtung des Normalschnittkreises als der Berührungslinie der rückenden Kugel und die Bestimmung der Schattenpunkte auf diesem Kreis der Kugel. An die beliebig gekrümmte Achse der Röhre sei in einem bestimmten Punkt *pp'* (Figur 71 e) eine Tangente *a b a' b'* gezogen worden. Man hat dann auf der mit ihren Körperschattengrenzen versehenen Umhüllungskugel in *pp'* den Kreis zu zeichnen, dessen Ebene normal zu dieser Tan-

gente steht. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Körperschattenkreis der Kugel sind die Schattenpunkte *kk'* und *ll'* für den Normalschnitt der Röhre im Punkt *pp'*.

Der gesuchte Kreis projiziert sich in zwei Ellipsen, deren grosse Achsen senkrecht zu den Tangentenprojektionen stehen. Die kleine Achse im Grundriss ergiebt sich aus der Umklappung der horizontalprojizierenden Ebene der Tangente in die Horizontalebene. In dieser Umklappung ist der Schnittkreis eine Gerade senkrecht zur umgeklappten Tangente; das Zurückklappen der Endpunkte dieser Geraden giebt die kleine Achse im Grundriss. Die Durchführung derselben Konstruktion im Aufriss liefert die kleine Achse der Aufrissellipse.

Das umständliche Konstruieren der beiden Ellipsen des Normalschnittkreises lässt sich nun aber ersparen und zwar dadurch, dass man die Schnittlinie *k l k' l'* der Ebenen beider Kreise unmittelbar aufsucht. Die Spuren einer Ebene, die senkrecht zu einer Geraden steht, sind senkrecht zu den Projektionen der Geraden gerichtet, also die Spuren der Ebene der Kugelschattengrenze senkrecht zu den Lichtstrahlprojektionen und die Spuren der Ebene des Normalschnittkreises senkrecht zu den Projektionen der Tangente. Sind also in Figur 71 e *o m'* und *o n* senkrecht zu den Lichtstrahlprojektionen die Spuren der ersten Ebene, ferner *e d'* senkrecht zu *a' b'* und *e f* senkrecht zu *a b* die Spuren der zweiten, so geben die Projektionen der Schnittlinie beider Ebenen *g h* und *g' h'* die Richtungen *k l* und *k' l'*, in welchen im Grundriss und Aufriss der Berührungskugel die Durchmesser durch den Mittelpunkt *pp'* zu ziehen sind, um als Schnitte mit den Schattenkreisprojektionen der Kugel die Punkte *kk'* und *ll'* zu liefern.

Zu grösserer Sicherheit in der Bestimmung der Tangentenprojektionen für einen ausgewählten Punkt einer doppelt gekrümmten Leitlinie kann man oft Gebrauch machen von der Thatsache, dass eine Tangente einer ebenen Kurve beim Aufwickeln der Kurvenebene auf einem vertikalen Cylinder ihre Horizontalneigung nicht ändert.

Die zuvor beschriebene Konstruktion der Körperschattengrenze einer Röhrenfläche mit kreisförmigem Normalschnitt vereinfacht sich wesentlich, wenn die Röhrenachse eine ebene Kurve parallel zu einer Grundebene wird, weil dann in der Projektion auf diese Grundebene alle Normalschnitte geradlinig werden. Die Körperschattengrenze ergiebt sich in diesem Fall ohne Benützung eines Grundplans, indem der Aufriss der Umhüllungskugel samt ihrer Körperschattengrenze einmal gezeichnet und mit Durchmessern parallel zu den ausgewählten Normalschnitten versehen wird. Jede Normalschnittlinie im Aufriss der Fläche ist dann ebenso einzuteilen, wie der ihr parallele Durchmesser durch die Schattengrenzlinie der Kugel eingeteilt ist. (Vergl. Art. 58; die dort gezeichnete Figur kann auch für den vorliegenden Fall als Beispiel gelten.)

Für Schlagschatten auf solchen Flächen (mit ebengekrümmter oder doppeltgekrümmter Achse) wird kaum eine andere als die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen zu finden sein. Sie erfordert das Zeichnen von Linien, die von auszuwählenden Punkten des fortrückenden Kreises beschrieben werden, in Grundriss und Aufriss, und es sind diese Linien ganz in derselben Weise zu benützen, wie die Schraubenlinien bei der schraubenförmigen Röhre. Sehr häufig wird jedoch dieses umständliche Verfahren dadurch umgangen werden können, dass mässig lange Stücke zwischen zwei Normalschnitten als Kreiscylinder betrachtet und mit Schattengrenzen beider Art bedacht werden. Dies ist zwar nur eine Annäherung und um so weniger streng richtig, je stärker die Krümmung der Röhrenachse; aber es wird in den meisten Fällen der praktischen Schattenkonstruktion genügen.

Röhrenflächen mit beliebigem, aber unveränderlichem Normalschnitt. 72.

Der einfachste Fall einer solchen ist die Cylinderfläche mit beliebigem Normalschnitt; Kreislinien des Fortschreitens ergeben Drehungsflächen. Beispiele für das Fortschreiten auf anderen ebengekrümmten Linien sind die Rundstäbe, Hohlkehlen, Karniese und Wellen der Gesimse mit elliptisch oder wellenförmig geschweiften Kanten, wie sie etwa der Barockstil anwendet, oder die Horizontalgesimse auf ebenso im Grundriss geschweiften Wandflächen. Doppelt gekrümmte Linien des Fortschreitens bieten die zuvor genannten geschweiften Gesimse, wenn sie auf cylindrischer Wandfläche auftreten.

Jeder Normalschnitt einer solchen Fläche lässt sich als eine niedrige Zone eines Cylinders vom selben Normalschnitt auffassen, dessen Mantellinien parallel sind der Tangente an der Kurve des Fortschreitens in dem Punkte des Normalschnitts.

Ist z. B. diese Kurve eine solche in der Vertikalebene, wie bei geschweiften Gesimsen auf ebener Wand, so zeichnet man eine Anzahl von Normalschnitten nur im Aufriss, wo sie als gerade Linien erscheinen, und behandelt jeden derselben nach Art. 53 als Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene, indem man den Normalschnitt in die Vertikalebene umklappt und die Mantellinien senkrecht zur Richtung des Normalschnitts anfügt. Hiedurch werden auf jedem Normalschnitt die Punkte der Körperschattengrenze erhalten. Schlagschatten einer Selbstbeschattung können zunächst nach dem allgemeinen Verfahren erhalten werden, indem man die äquidistanten Kurven zeichnet, die bestimmte Punkte der Normalschnittkurve bei deren Bewegung beschreiben; als Schnittebenen wird man dabei im allgemeinen besser die vertikalprojizierenden als die vertikalen wählen, und oft ohne Grundriss mit Hilfe der leicht erhältlichen Umklappungen der Schnittlinien in die Vertikalebene arbeiten, indem man in einer besonderen Figur alle Schnittlinien als Profile verschiedener Höhe, aber gleicher Ausladung aufeinanderlegt und die veränderte Richtung des Lichtstrahls für die Umklappung mit dem Winkel α berücksichtigt. Wenn man aber einmal solche Schnitte der Schlagschatten wegen einzuführen hat, so benützt man sie zweckmässig auch für die Körperschattengrenze, und es entfällt dann deren zuerst beschriebene Bestimmung.

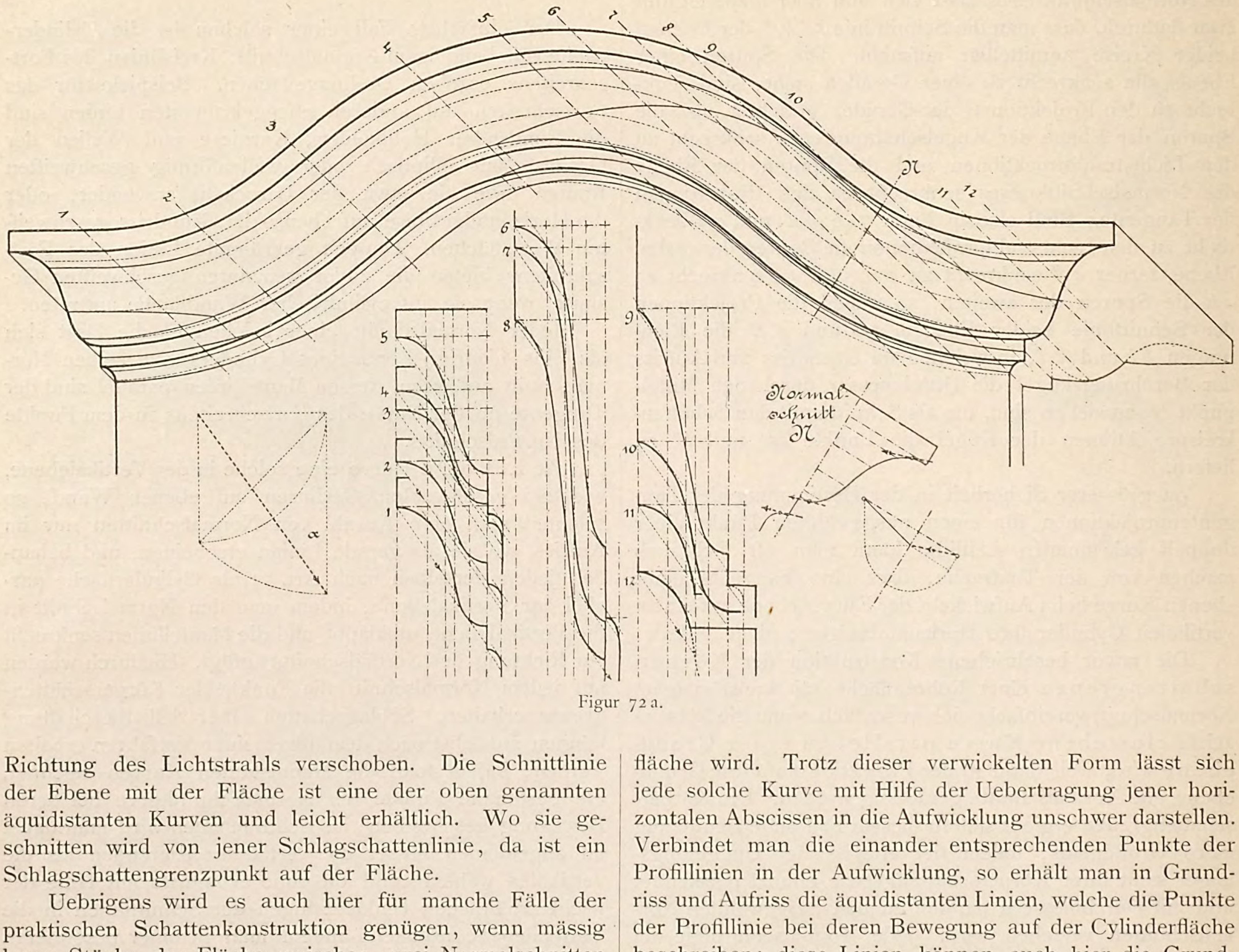
Figur 72a bietet ein durchgeführtes Beispiel. Unter der Hauptfigur sind die Schnittkurven der vertikalproji-

zierenden Ebenen 1 bis 12 herausgetragen; links unten ist die Richtung des Lichtstrahls für die Ebenen dieser Schnittkurven bestimmt und diesen letzten sind sowohl die berührenden als die schlagschattengebenden Lichtstrahlen beigefügt. Rechts unten erscheint die zuerst beschriebene Bestimmung der Körperschattenpunkte für den Normalschnitt *N* mit Verwertung von Art. 53.

Wenn die Schlagschattengrenze auf der Fläche von einem Flächenrand erzeugt wird, wie in Figur 72 a, so giebt es noch ein zweites Verfahren zu ihrer Bestimmung, verwandt mit demjenigen aus Art. 61 für Drehungsflächen. Man sucht den Schlagschatten des Flächenrandes auf einer Schnittebene, die zur Vertikalebene parallel steht; die Schattenlinie wird kongruent der Randlinie und nur in der Richtung des Lichtstrahls verschoben. Die Schnittlinie der Ebene mit der Fläche ist eine der oben genannten äquidistanten Kurven und leicht erhältlich. Wo sie geschnitten wird von jener Schlagschattenlinie, da ist ein Schlagschattengrenzpunkt auf der Fläche.

Uebrigens wird es auch hier für manche Fälle der praktischen Schattenkonstruktion genügen, wenn mässig lange Stücke der Fläche zwischen zwei Normalschnitten als Cylinderflächen betrachtet und sowohl in Beziehung auf die Schlagschattengrenze einer Selbstbeschattung als auf die Körperschattengrenzen als solche behandelt werden. Die gebrochenen Linien, die bei diesem Näherungsverfahren für die Schattengrenzen entstehen, sind leicht durch stetige zu ersetzen.

Schwieriger, aber auch theoretisch interessanter wird die exakte Schattenkonstruktion bei doppelt gekrümmten Kurven des Fortschreitens, etwa bei einem Glockenleisten, der in dem Rahmengesims um einen Steinbogen in kreiscylindrischer Mauer auftritt, wobei die ursprünglich in einer Vertikalebene liegende kreisbogenförmige Unterkante des Bogengesimses samt ihrer Vertikalebene und dem Gesims darauf auf der cylindrischen Wand aufgewickelt zu denken ist. Jede gerade Linie als Basis eines Normalschnittprofils in dem auf der Vertikalebene stehenden Gesims verwandelt sich bei diesem Aufwickeln in eine Schraubenlinie, und die horizontalen, zur Vertikalebene senkrechten Abscissen der Normalschnittprofillinie in deren eigener Ebene bilden nach dem Aufwickeln, indem sie sich normal zur Cylinderfläche stellen, eine Wendelfläche, so dass auch die ursprünglich ebene Normalschnittprofillinie eine doppeltgekrümmte Kurve, und zwar eine solche in einer Wendelfläche wird. Trotz dieser verwickelten Form lässt sich jede solche Kurve mit Hilfe der Uebertragung jener horizontalen Abscissen in die Aufwicklung unschwer darstellen. Verbindet man die einander entsprechenden Punkte der Profillinien in der Aufwicklung, so erhält man in Grundriss und Aufriss die äquidistanten Linien, welche die Punkte der Profillinie bei deren Bewegung auf der Cylinderfläche beschreiben; diese Linien können auch hier die Grundlage des allgemeinen Verfahrens bilden, das jedoch in diesem Fall nur mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl durchgeführt werden kann. Bei kreiscylindrischer Mauer werden die Linien selbstverständlich im Grundriss konzentrische Kreise.

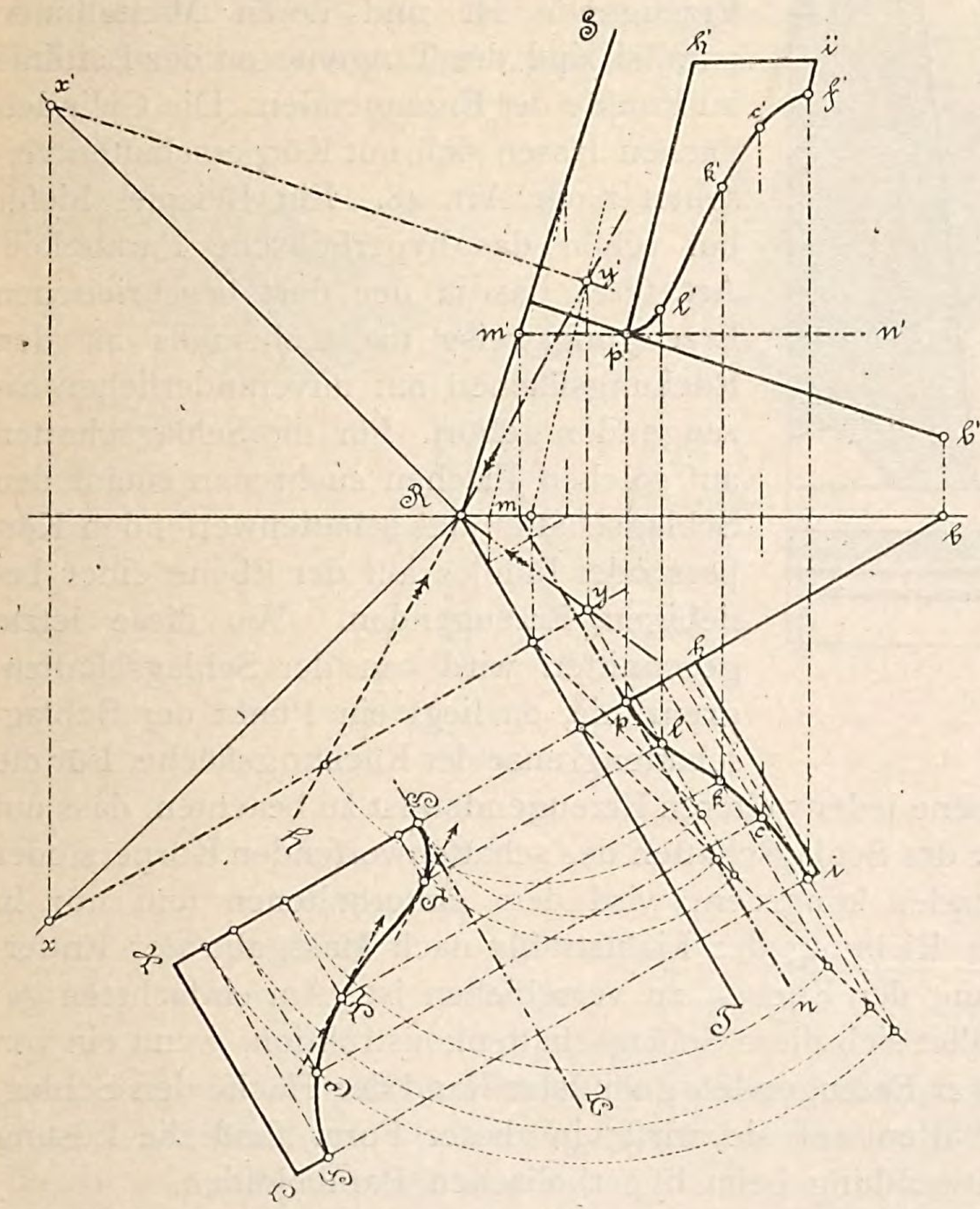


Figur 72 a.

Mit der angegebenen Erzeugungsweise entfernt sich übrigens das Gesimsglied ein wenig von dem eingeführten Begriff der Röhrenfläche, in dem nicht mehr die e b e n e n Normalschnitte kongruent sind, und es wären streng ge-

nommen jene horizontalen Abscissen nicht von den Punkten der Schraubenlinien aus zu ziehen, sondern von denen der Tangenten an den Schraubenlinien in deren Fusspunkten auf der aufgewickelten Kreislinie, womit die Verdrehung der Normalschnittprofillinien aus ihrer Ebene heraus vermieden wäre. Doch würde sich die so erzeugte strenge Röhrenfläche der Wandfläche nicht anschmiegen, sondern zwischen Scheitel und Bogenfuss klaffen, weil die Radien der ursprünglich ebenen Bogenlinie nach deren Aufwicklung nicht in die Cylinderfläche fallen, wenn sie gerade bleiben.

Für eine strenge Röhrenfläche mit beliebig gewundener Leitlinie ist schon das Aufzeichnen der Umrisse und Kanten der Fläche eine sehr zeitraubende Arbeit, mehr noch die Schattenkonstruktion; doch mag sie in den Grundzügen



Figur 72 b.

hier beschrieben werden. Sind nur Körperschattengrenzen zu suchen, so kann die Auffassung jedes Normalschnitts als eines kurzen Cylinderstücks zur Lösung dienen. Als gegeben ist zu betrachten (Figur 72 b) erstens die Profillinie der Röhre *F P H J* mit Beifügung einer in ihrer Ebene liegenden Geraden *P N*, welche die in allen Normalschnitten unveränderliche Lage der Hauptnormalen zur Leitlinie gegenüber der Profillinie darstellen soll, zweitens die Projektionen $p\,b\,p'\,b'$ der Tangente an der Leitlinie in dem für einen Normalschnitt ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie, drittens die beiden Projektionen $p\,n\,p'\,n'$ der Hauptnormalen im Punkt pp', welche senkrecht zur Tangente $p\,b\,p'\,b'$ gerichtet sein muss und für den gewählten Normalschnitt horizontal angenommen ist, aber auch geneigt sein könnte.

Nach Art. 48 ist der Lichtstrahl auf die Normalschnittebene zu projizieren und zwar in der Richtung der Mantellinie des gedachten Cylinders, also rechtwinklig. Werden an den Normalschnitt mit der so erhaltenen, für seine Ebene gültigen Lichtrichtung Tangenten gezogen, so gehören deren Berührungspunkte der gesuchten Körperschattengrenze an.

Die Richtung der Spuren *S R* und *R T* der Normalschnittebene ist rasch erhältlich; sie stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen $p'\,b'$ und $p\,b$ der Tangente. Da die Hauptnormale in der Normalschnittebene liegt, so müssen die Spuren der letzten durch die Spuren der ersten gehen, also muss die Vertikalspur *S R* durch m' gezogen werden.

Um den durch den Winkelpunkt *R* der Spuren gezogenen Lichtstrahl rechtwinklig auf die Normalschnittebene zu projizieren, fällt man aus einem beliebigen Punkt xx' des Lichtstrahls ein Loth $x\,y\,x'\,y'$ auf diese Ebene und verbindet den Fusspunkt yy' dieses Lothes mit dem Winkelpunkt *R*; die Verbindungslinie $R\,y\,R\,y'$ giebt die in der Normalschnittebene gültige Lichtrichtung an.

Man klappt nun die Normalschnittebene samt dieser Lichtrichtung und der Hauptnormalen in eine Grundebene um, fügt in der Umklappung an die Hauptnormale *P N* die Profillinie der Röhre *F P H J* in der gegebenen Lage und bestimmt die Berührungspunkte *K* und *L* der in der gefundenen Lichtrichtung *Y R* gezogenen Tangenten an der Profillinie. Durch Zurückklappen dieser Punkte und einer genügenden Zahl von andern Punkten *C* der Profillinie erhält man in den Projektionen gleichzeitig die Schattenpunkte und die zum Zeichnen der Umrisslinie der Röhre notwendigen Normalschnittlinien.

Sind auch Schlagschattengrenzen zu bestimmen, so verschafft man sich mit Hilfe der Umklappung nur die zwei Projektionen der Normalschnittlinie für eine Reihe von Punkten pp', verbindet kongruent liegende Punkte cc', um die Kurven zu erhalten, welche bestimmte Punkte der Profillinie bei Erzeugung der Fläche durchlaufen, und benützt diese Kurven zur Durchführung des allgemeinen Verfahrens für gekrümmte Flächen.

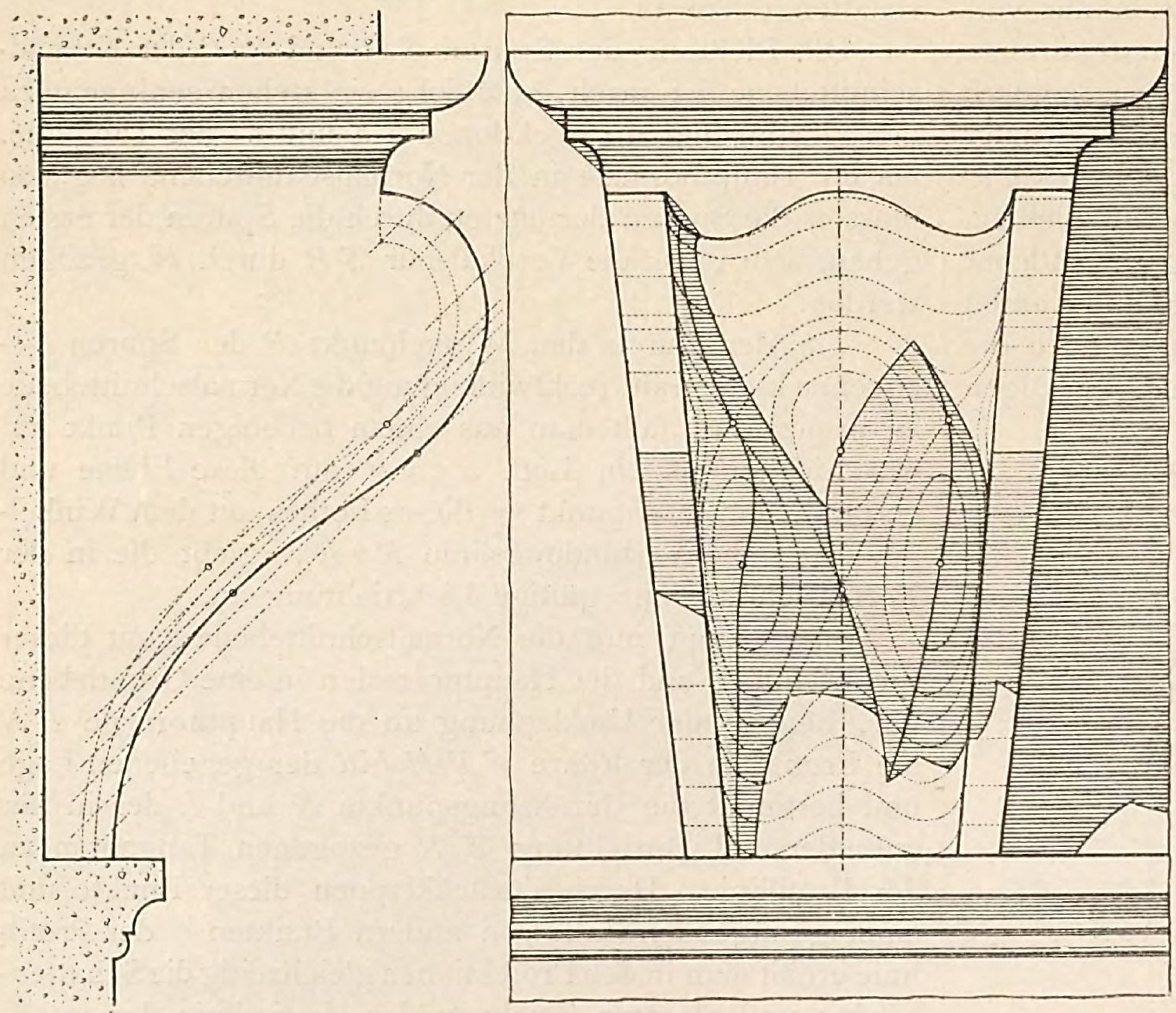
Röhrenflächen mit veränderlichem Normalschnitt. 73.

In Figur 73 ist eine solche Fläche gezeichnet. Die Leitlinie als Mittellinie einer Volutenkonsole ist eine ebene Kurve; ihre Ebene ist parallel zur Seitenebene; sie erscheint also in der als Linksansicht gezeichneten Seitenprojektion in ihrer wahren Gestalt. Die Erzeugende ist eine Wellenlinie, die geometrisch ähnlich bleibend im Fortschreiten nach unten ihre Pfeilhöhen im selben Mass verjüngt, wie ihre Längen sich zwischen den beiden senkrecht zur Vertikalebene stehenden Grenzebenen vermindern. Diese Normalschnitte oder Lagen der Erzeugenden projizieren sich in der Seitenprojektion als gerade Linien normal zur Leitlinie.

Die Schattenkonstruktion ist die strenge Durchführung des allgemeinen Verfahrens mit Benützung der seitlich projizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen, wobei sich eine interessante Schnittkurvengruppe auf einfachem Weg ergeben hat.

Für solche Flächen mit gewundenen Leitlinien (Bei-

spiele gewundene Hornformen oder gewundene Rokokogesimse, die ihr Profil im Fortschreiten verjüngen) dürfte ebenfalls nur das allgemeine Verfahren anwendbar sein. Hiebei wären für eine genügende Zahl von Normalschnitten



Figur 73.

die beiden Projektionen ganz in derselben Weise durch Umklappungen zu beschaffen und durch Verbinden ähnlich liegender Punkte zu verwerten, wie für die Flächen mit unveränderlicher Erzeugenden am Schluss des Art. 72 beschrieben ist.

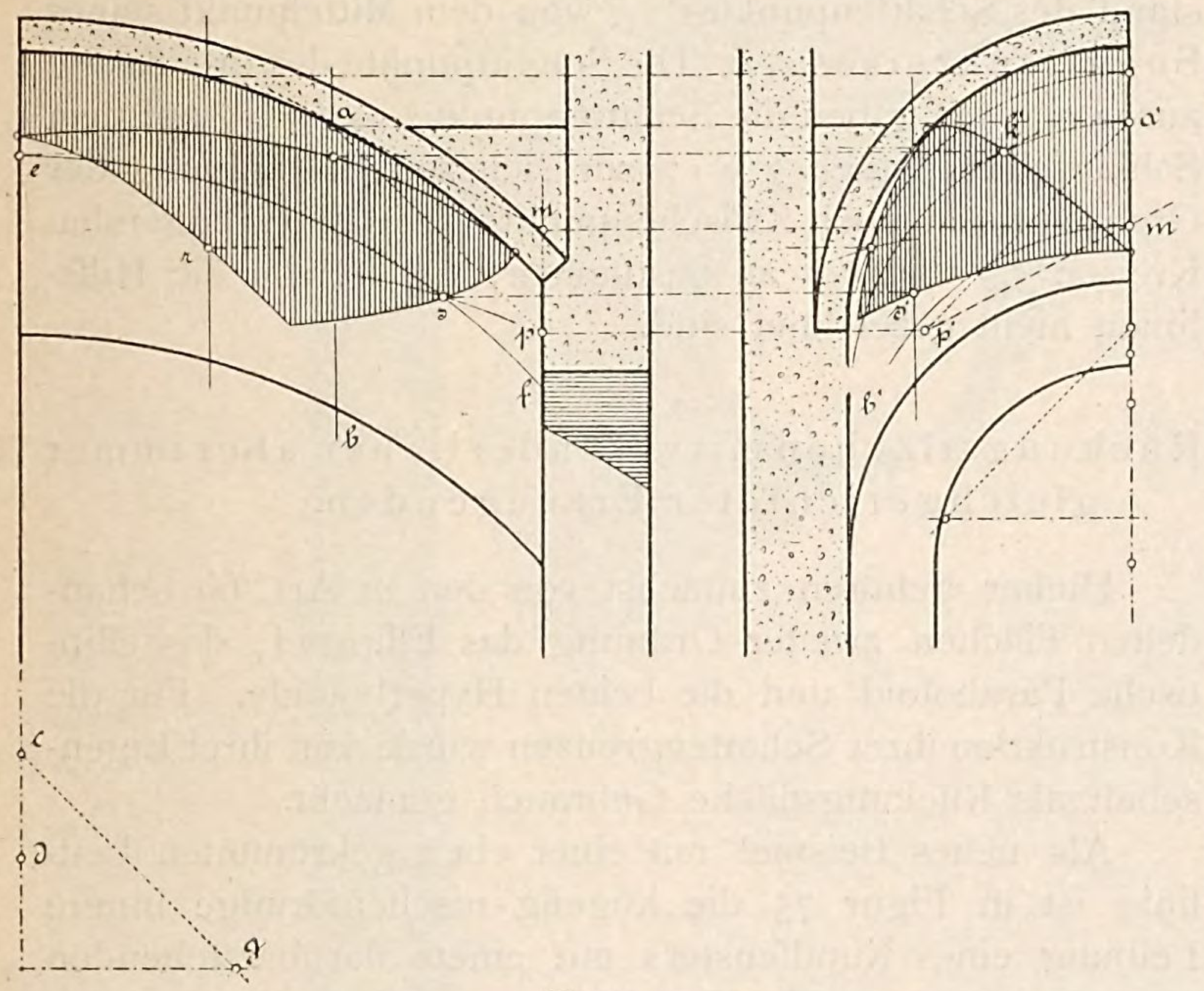
74. Rückungsflächen mit gleichgerichtet fortschreitender, unveränderlicher Erzeugenden. Steigendes Tonnengewölbe mit bogenförmiger Scheitellinie. Gewundene Säule.

Rückungsflächen entstehen, wenn eine beliebige ebene Kurve mit einem bestimmten Punkt ihrer Ebene auf einer beliebigen Leitlinie derart fortschreitet, dass ihre Ebene immer parallel bleibt, ihre Form immer unverändert oder geometrisch ähnlich bleibt und im letzten Fall ihre Grösse sich nach einem bestimmten Gesetz ändert, das gewöhnlich durch eine zweite Kurve, die ein zweiter Punkt der Erzeugenden oder ihrer Ebene beschreibt, dargestellt ist. Gewöhnlich bleibt die rückende Kurve gleichgerichtet; doch sollen hier zu den Rückungsflächen im weitesten Sinn auch solche Flächen gerechnet werden, bei welchen die Erzeugende, indem ihre Ebene parallel fortrückt, in dieser Ebene sich dreht, und zwar nach irgend einem Gesetz, das von demjenigen des Parallelrückens abhängig ist. Hienach scheiden sich die hier im weitesten Sinne gebrauchten Begriffe „Röhrenfläche“ und „Rückungsfläche“ dadurch, dass bei jener die Ebene der Erzeugenden immer normal zur Leitlinie bleibt, während sie bei dieser immer parallel gerichtet ist, ferner bei dieser auch eine Verdrehung stattfinden kann, bei jener nicht.

Der einfachste Fall der Rückungsfläche ist derjenige, in welchem die rückende Kurve immer kongruent und gleichgerichtet bleibt. Hiefür sei zunächst der Fall des Fortschreitens auf ebener Kurve ins Auge gefasst. Aus dem Begriff der Fläche folgt in diesem Fall, dass alle ihre ebenen Schnitte parallel zur Ebene der Leitlinie dieser kongruent sind. Jede Lage der Erzeugenden lässt sich auffassen und schattieren als eine niedrige Zone einer Cylinderfläche, deren Basis die Erzeugende ist und deren Mantellinien parallel sind der Tangente an der Leitlinie im Punkte der Erzeugenden. Die Cylinderflächen lassen sich mit Körperschaften versehen nach Art. 48. Ein Beispiel hiefür bot schon das hyperbolische Paraboloid, Art. 69e, das ja der dort beschriebenen Erzeugungsweise nach ebenfalls zu den Rückungsflächen mit unveränderlichen Erzeugenden gehört. Für die Schlagschatten auf solchen Flächen sucht man zuerst den Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder Randes auf der Ebene einer beliebigen Erzeugenden. Wo diese letzte geschnitten wird von der Schlagschattengrenzlinie, da liegt ein Punkt der Schlagschattengrenze der Rückungsfläche. Für die Ebene jeder weiteren Erzeugenden ist zu beachten, dass auf ihr der Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder Randes kongruent wird dem ersterhaltenen und nur in der Richtung des Lichtstrahls nach Massgabe der Entfernung der Ebenen zu verschieben ist. Am einfachsten gestaltet sich diese Schlagschattenkonstruktion, wenn ein von einer Erzeugenden gebildeter Rand der Fläche den Schlagschatten auf sie wirft; in dieser Form fand die Lösung Anwendung beim hyperbolischen Paraboloid.

In Figur 74a ist als einfaches Beispiel mit kreisförmiger vertikalstehender Erzeugenden und kreisförmiger Leitlinie ein steigendes Tonnengewölbe mit bogenförmiger Scheitellinie gewählt und durch Längenschnitt und Vorderansicht dazu dargestellt. Die Leibungsfläche erzeugt sich entweder durch paralleles Rücken des (halben) Stirnbogens an der Scheitellinie oder durch Rücken des Scheitelbogens am Stirnbogen; beide Erzeugungen liefern dieselbe Fläche. Zur Bestimmung der Körperschattengrenze ist für einen ausgewählten Vertikalschnitt $a\,b\,a'\,b'$, der sich im Längenschnitt als Vertikallinie projiziert, die Tangente $a\,m$ an die Scheitellinie zu ziehen und auf das erhaltene kurze Stück eines geradesteigenden Tonnengewölbs die Konstruktion aus Art. 52 anzuwenden. Es ist also $a\,m$ bis zum Schnitt mit der Bogenwandebene zu verlängern, m nach m' hinüberzutragen und durch aa' der Lichtstrahl $a\,p\,a'\,p'$ bis zum Schnitt mit der Bogenwandebene in pp' zu ziehen. Der Berührungspunkt k' einer an den Schnittkreis $a'\,b'$ parallel zu $m'\,p'$ gezogenen Tangente ist ein Körperschatten-

grenzpunkt. Die Punkte erscheinen zuerst in der Vorderansicht (oder Seitenprojektion) und sind in den Längenschnitt (oder Aufriss) hinüber zu linieren. Für die Bestimmung eines Schlagschattengrenzpunktes ist eine Lage der fortrückenden Scheitelbogenlinie im Längenschnitt gezeichnet; sie bildet einen kongruenten Bogen *ef* mit vertikal fortgeschobenem Mittelpunkt *d*. Wo diese Erzeugende geschnitten wird von dem Schlagschatten, den der Scheitelbogen auf ihre Ebene wirft, da ist ein Schlagschattengrenzpunkt *s*. Der Schlagschattenkreis ist ein kongruenter Kreis aus dem Mittelpunkt *g*. Da auch der Stirnbogen einen Teil der Selbstbeschattungsgrenze der Fläche wirft, so ist für die Stirnbogenlinie in der Seitenprojektion dieselbe Konstruktion durchzuführen wie für den Scheitelbogen im Aufriss. (Die Konstruktion ist dargestellt durch den Schlagschattengrenzpunkt *r* mit seinen Hilfslinien.) Zu-

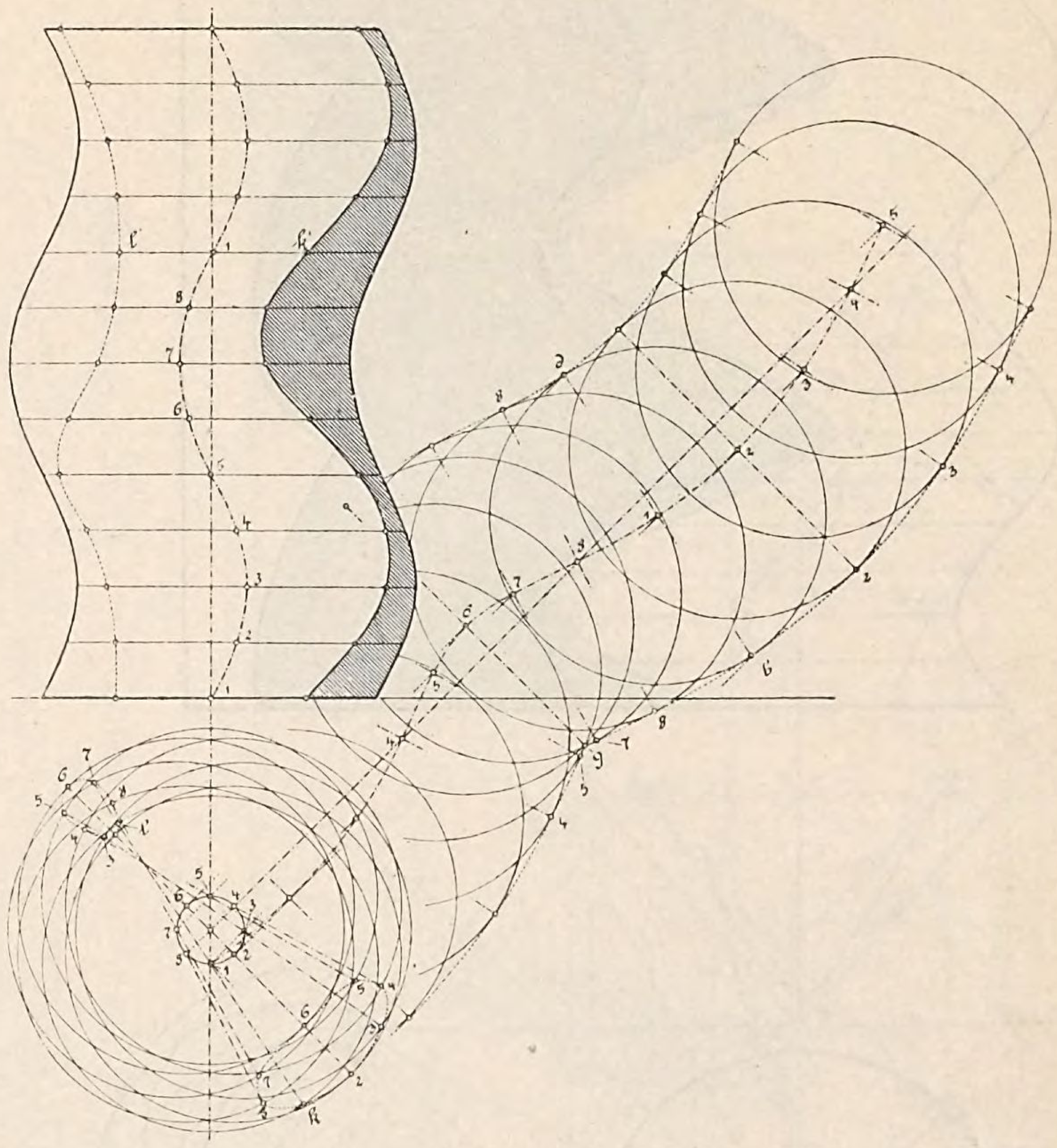


Figur 74a.

letzt sind die im Aufriss erhaltenen Schlagschattenpunkte hinüberzulinieren in die Seitenprojektion, ebenso die in dieser erhaltenen in den Aufriss.

Von den selten verwirklichten Rückungsflächen mit gewundener Leitlinie und unveränderlicher Erzeugenden ist die nächstliegende und interessanteste der Schaft der gewundenen Säule des Barockstils. Dieses Gebilde ist nicht etwa als steile schraubenförmige Wulstfläche nach Art. 71 zu gestalten, da der Horizontalschnitt einer solchen keinen Kreis liefert, also Basis und Kapitäl der Säule im Grundriss nicht kreisförmig sein könnten. Vielmehr ist die gewundene Säulenschaftfläche dadurch zu erzeugen, dass der Mittelpunkt eines horizontalen unveränderlichen Kreises auf einer steilen Schraubenlinie mit vertikaler Achse ansteigt (Figuren 74b und 74c). Die Umrisslinien im Aufriss werden der Projektion dieser Schraubenlinie kongruent, da alle Kreispunkte, also auch die beiden äussersten, im Aufsteigen kongruente Schraubenlinien beschreiben.

In Figur 74b ist die Körperschattengrenze ähnlich bestimmt wie für die Drehungsflächen nach Art. 59. Auf der Horizontalebene sind die Schlagschatten einiger Lagen *123* u. s. w. des erzeugenden Kreises gezeichnet; die Umhüllungslinien dieser Kreise sind die Schlagschattengrenzen des Schaftes, also von den Körperschattengrenzen geworfen. Bestimmt man möglichst genau die Berührungspunkte *b* und *d* dieser Umhüllungslinien und eines Schattenkreises *1*, so erhält man in ihnen die Schlagschatten des Körperschattengrenzpunkte, die auf dem erzeugenden Kreis *1* liegen. Wenn daher durch die Punkte *b* und *d* ein Lichtstrahl rückwärts gezogen oder im Grundriss durch den Mittelpunkt *1* des erzeugenden Kreises eine Parallele zu dem Durchmesser *b d* des Schattenkreises *1* gezogen wird, so schneidet der Lichtstrahl oder diese Parallele den Grundrisskreis *1* in den Körperschattenpunkten *k* und *l*, die in den Aufriss nach *k'* und *l'* hinaufzuloten sind.



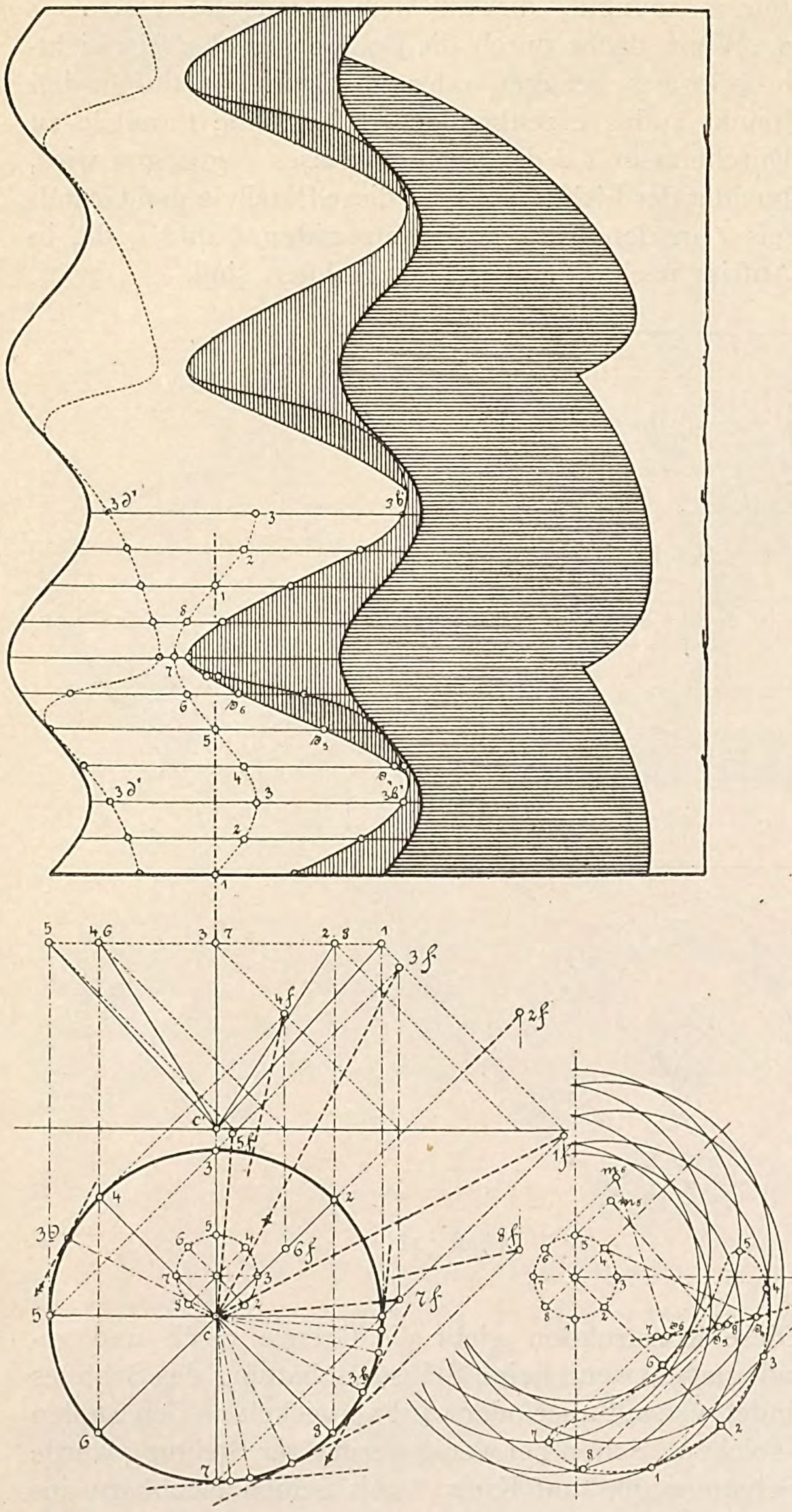
Figur 74b.

Diese Konstruktion giebt die Grenze rasch und genügend genau, wenn keine Selbstbeschattung des Schaftes stattfindet, versagt aber oder wird verwickelt an den Stellen einer solchen. Schon bei wenig geringerer Steigung würde der Schattenpunkt auf Kreis *6* mit seinen Nachbarn ins Innere der Schattenfläche rücken und daraus Selbstbeschattung der Schaftfläche zu erkennen sein.

Figur 74c bietet neben der Bestimmung einer solchen Selbstbeschattung eine andere, kaum minder einfache Konstruktion für die Körperschattengrenze. Jeder Horizontalkreis des Schaftes ist aufgefasst als Zone eines niedrigen schiefen Cylinders, dessen Basis der Horizontalkreis und dessen Achse die Tangente an der leitenden Schraubenlinie im Mittelpunkt des Kreises. Wo die Körperschattenpunkte auf diesem Kreis liegen als auf einem Bestandteil der Cylinderfläche, da müssen sie auch für die Schaftfläche liegen. Die Schattenpunkte auf den Cylindern sind nach Art. 49 bestimmt; der grössere Grundrisskreis

um *c* ist als gemeinschaftlicher Basiskreis für alle Cylinderflächen benützt.

Durch einen beliebigen Punkt *cc'* der Horizontalebene sind Parallelen zu den Tangenten in den Punkten *1* bis *8* an der leitenden Schraubenlinie gezogen, wofür die Steigung dieser durch Verstreckung ihres Grundrisskreises zu



Figur 74 c.

bestimmen war. Diese Parallelen bilden 8 Mantellinien *c' 1 c' 2 c' 3* u. s. w. einer geraden Kreiskegelfläche mit nach unten gerichteter Spitze *cc'*. Durch die Basispunkte *123* u. s. w. dieser Kegelfläche sind Lichtstrahlen bis zum Schnitt mit der Horizontalebene gezogen. Die Verbindungslinie des hiedurch erhaltenen Schnittpunktes *3 f* mit *c* giebt die Richtung *3 f c*, mit welcher an den erzeugenden Kreis *3* die Tangenten zu ziehen sind, deren Berührungspunkte *3 b* und *3 d* die Körperschattenpunkte der Schaftfläche auf Kreis *3* darstellen. Im Aufriss können nun von Punkt *3* der Leitlinie aus die im Grundriss erhaltenen Horizontalmasse für die Schattengrenzpunkte *3 b'* und *3 d'* aufgetragen werden, und in derselben Weise dient der einzige Grundrisskreis für alle Lagen des Horizontalschnittkreises.

Zur Bestimmung der Grenze der Selbstbeschattung ist im Hilfsgrundriss rechts der Schlagschatten des Körperschattengrenzstücks *781* auf der Horizontalebene des erzeugenden Kreises *4* gezeichnet. Wo dieses Schattenstück geschnitten wird von dem Grundrisskreis *4*, da ist der Schlagschattenpunkt auf dem Kreis *4*; wo es geschnitten wird von den leicht erhältlichen Schlagschatten der Kreise *5* und *6* auf derselben horizontalen Ebene, da sind die Schlagschattenpunkte für die Kreise *5* und *6* in dem Sinne, dass im Aufriss die horizontale Entfernung des Schattenpunktes *s 5* von seinem Mittelpunkt *5* dieselbe sein muss, wie im Hilfsgrundriss der horizontale Abstand des Schattenpunktes *s 5* von dem Mittelpunkt seines Schattenkreises *m 5*. Die Schnittpunkte der drei Kreise aus *4 m 5 m 6* gaben die Schattenpunkte *s 4 s 5 s 6* auf dem Schlagschattenstück *7 8 1*; zur sicheren Bestimmung der Grenze waren noch Zwischenpunkte auf den erzeugenden Kreisen *5,5* und *6,5* zu bestimmen, für welche die Hilfslinien nicht gezeichnet sind.

Rückungsflächen mit veränderlicher, aber immer gleichgerichteter Erzeugenden. 75.

Hieher gehören zunächst von den in Art. 69 behandelten Flächen zweiter Ordnung das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und die beiden Hyperboloide. Für die Konstruktion ihrer Schattengrenzen wurde von ihrer Eigenschaft als Rückungsfläche Gebrauch gemacht.

Als neues Beispiel mit einer eben gekrümmten Leitlinie ist in Figur 75 die kugelig-nischenförmige innere Leibung eines Rundfensters mit einem darüberstehenden „Kernbogen" gewählt. Für die Fensterleibung ist zunächst der Höhenschnitt mit dem oberen und unteren Umriss der Fläche festgesetzt, und zwar jener gerade, dieser als konkave Kreislinie. Die Fläche selbst ist dann durch Rücken eines veränderlichen Kreises parallel zur Wandebene erzeugt, wobei die Endpunkte des vertikalen Kreisdurchmessers immer auf jenen beiden Leitlinien bleiben.

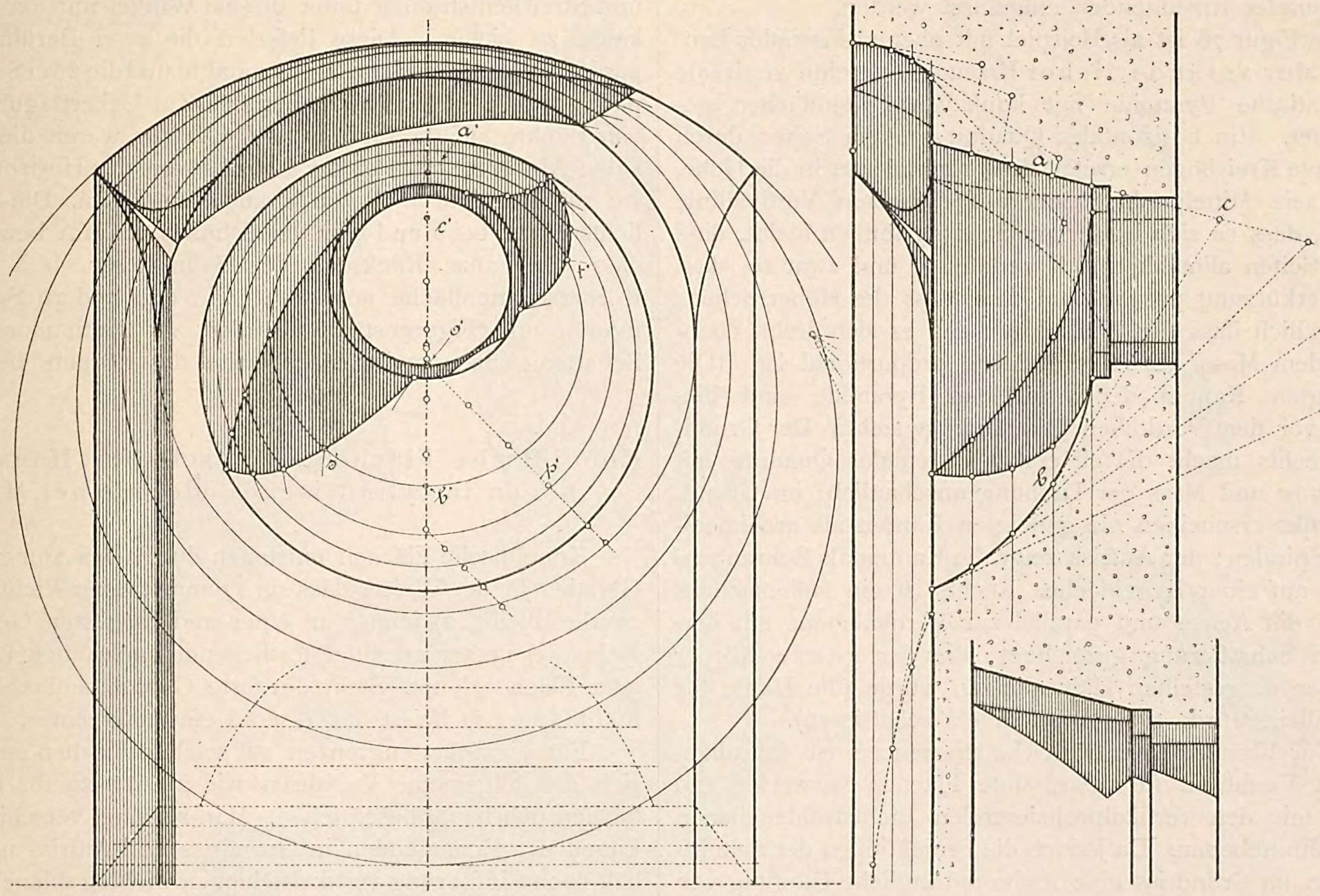
Jede Zone einer solchen Rückungsfläche zwischen zwei einander nahe liegenden verschieden grossen Erzeugenden lässt sich auffassen und schattieren als niedrige Zone einer Kegelfläche, wobei die kurzen Stücke der von geometrisch-ähnlich liegenden Punkten bei der Erzeugung beschriebenen Kurven zu Mantellinien der Kegelfläche geworden sind. Fallen die beiden Erzeugenden in eine zusammen, so gehen die Mantellinien in Tangenten an jenen Kurven über. Die Spitze des gedachten Kegels ist erhältlich als Schnittpunkt zweier solcher Tangenten. Wo die Körperschattenpunkte auf der Erzeugenden liegen als auf der Basis des Kegels, da liegen sie auch für die Rückungsfläche. (Die Betrachtung würde auch für eine gewundene Leitlinie gelten.)

In dem eingeführten Beispiel wird für die Lage *a b* der Erzeugenden die Spitze *c* des Kegels im Höhenschnitt der Leibungsfläche erhalten als Schnitt der verlängerten oberen

Leitlinie mit der Tangente *b c* an der unteren Leitlinie im Fusspunkt *b* der Erzeugenden. Die Bestimmung der Körperschattenpunkte auf der Erzeugenden erfolgt nach Art. 46; Hilfslinien hiefür sind nicht eingezeichnet.

Der Schlagschatten auf einer solchen Rückungsfläche wird auf demselben Weg erhalten wie für die Rückungsflächen mit unveränderlichen Erzeugenden. Bei dem gewählten Beispiel wirft für die Frontansicht des Fensters der kreisförmige Rand den Schlagschatten, so dass die Schattenpunkte in einfacher Weise je als Schnittpunkte zweier in Frontansicht erscheinender Kreise auftreten. So sind z. B. die Punkte *s'* und *t'* erhalten als Schnitte des aus *p'* mit dem Radius des Randkreises *o'* beschriebenen Kreises mit den Höhenschnitt auf die Vertikallinie für die Ebene der Erzeugenden hinüberliniert werden kann. Zu beachten ist, dass hiefür die Lichtstrahlrichtung in der Frontansicht von rechts oben nach links unten geht.

Was den über dem Rundfenster befindlichen „Kernbogen“ betrifft, so ist er erzeugt wie folgt: Als gegeben ist betrachtet die untere halbkreisförmige Stirnbogenlinie, die zwei Bogenlinien in den Vertikalebenen der seitlichen Leibungsflächen, welche diese nach oben begrenzen, und die ebenfalls kreisbogenförmige Scheitellinie des Bogens. Der untere Stirnbogen gleitet nun parallel bleibend und sich allmählich vergrössernd einerseits an den zwei Leibungsbögen, andrerseits am Scheitelbogen. Zur Kon-



Figur 75.

dem Kreis *a' b'*. Punkt *p'* liegt unter *o'* um die horizontale Entfernung der Ebenen des Randkreises und des Schnittkreises *a b*.

Der erste Höhenschnitt zeigt die Ansicht der linken Hälfte des Fensters mit den Schatten wie sie die Frontansicht darbietet; die Schattenlinien der rechten Seite sind einpunktiert; wogegen der zweite Höhenschnitt dieselbe Hälfte so zeigt, als ob die rechte Hälfte nicht da und die Richtung des Lichtstrahls für den Grundriss dieser Figur die gewöhnliche wäre. Um in diesem zweiten Höhenschnitt den Schlagschatten der geraden oberen Schnittkante auf der Leibungsfläche zu suchen, zeichnet man in der Vorderansicht die leicht erhältlichen Schlagschatten dieser Kante auf den Ebenen der Erzeugenden. Wo ein solcher Schlagschatten die erzeugende Kreislinie seiner Ebene schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt, der in

struktion sind verschiedene Lagen des erzeugenden Kreises gezeichnet und zu Vollkreisen ergänzt, um im Höhenschnitt die untere Umrisslinie der erzeugten Fläche zu erhalten, welche (wie die untere Umrisslinie der Fensterleibung) zur Bestimmung der Kegelspitzen notwendig ist. Im übrigen ist die Konstruktion der Schattengrenzen von derjenigen bei der Fensterleibung nur darin verschieden, dass bei Bestimmung der Kegelspitzen anstatt der geraden oberen Umrisslinie die Tangenten der gekrümmten zu benützen sind.

Ein Beispiel einer hieher gehörigen Rückungsfläche mit gewundener Leitlinie wäre der Schaft einer gewundenen Säule mit Verjüngung nach oben, wobei entweder die Durchmesser der erzeugenden Kreise der Figuren 74b und c proportional dem Mass des Höherrückens kleiner würden, oder alle Horizontalschnitte den gleich hochliegen-

den einer nicht gewundenen, aber „geschwellten" Säule kongruent wären.

76. Rückungsflächen mit drehend fortschreitender, veränderlicher oder unveränderlicher Erzeugenden.

Hieher gehören als einfache Beispiele mit unveränderlichen Erzeugenden die Wendelflächen und die verdrehten Stabformen aus Art. 70 und 106; die Leitlinie ist hiebei eine Gerade; der Winkel der Drehung ist proportional dem Masse des Fortrückens. Auch die Konoide (Art. 77) können als solche Rückungsflächen mit drehender gerader Erzeugenden aufgefasst werden.

In Figur 76 ist als Beispiel mit ebenfalls gerader Leitlinie, aber veränderlicher Erzeugenden eine verdrehte quadratische Pyramide mit konkaven Seitenflächen gezeichnet. Ein horizontales Quadrat, dessen Seiten durch konkave Kreisbögen ersetzt sind, rückt derart in die Höhe, dass sein Mittelpunkt immer auf derselben Vertikallinie bleibt, dass es sich immer geometrisch ähnlich bleibt, dass seine Seiten allmählich sich verkürzen, und zwar so, dass die Verkürzung proportional dem Mass des Höherrückens ist, endlich dass der Winkel, um den es sich dreht, ebenfalls dem Mass des Höherrückens proportional ist. (Die geneigten Kanten der verdrehten Pyramide sind hienach vor dem Verdrehen geradlinig gedacht.) Der Grundriss rechts macht die elf ersten Lagen des Quadrats mit Richtung und Mass der Drehung anschaulich; im Grundriss links erscheinen die geneigten Kanten als archimedische Spiralen; der Aufriss zeigt die Kanten als Schraubenlinien auf einer Kegelfläche. Rechts ist ein Höhenschnitt durch die Achse und parallel zur Vertikalebene mit derselben Schattierung gezeichnet, die der ganze Körper auf der dargestellten Hälfte zeigen würde (die Hälfte für sich allein würde sich etwas anders schattieren).

Zur Konstruktion der Schattengrenzen ist das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen verwertet und zwar mit den vertikalprojizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen. Da jedoch die Projektionen der Schnittkurven im Grundriss eine undurchdringliche Häufung von Linien ergeben hätten, so sind sie in wahrer Gestalt getrennt herausgetragen worden, wie in Figur 72a. Für den Schnitt MN z. B. wurde zuerst (Figur rechts oben) auf einer Vertikallinie 1 2 3 . . 8 die Strecke $a'h'$ mit ihrer Einteilung durch die Punkte $b'c'd'e'f'g'$ aufgetragen. Dann wurden aus dem linksseitigen Grundriss die Schnittpunkte der Kanten mit der Schnittebene geholt, das heisst die horizontalen, senkrecht zur Vertikalebene gerichteten Abstände der Kantenpunkte $a'b'e'h'$ von der zur Vertikalebene parallelen Achsenschnittebene des Körpers entnommen und in den Schnitt MN eingetragen. (In diesem ist also $1a$ für Punkt $a' = 1a$ im Grundriss, $2b$ für Punkt $b' = 2b$ im Grundriss, $5e$ für $e' = 5e$ im Grundriss u. s. w., wobei der Grundriss von rechts betrachtet wurde, also Abstände von der Achse aus gegen den Grundschnitt von der Vertikalen im Schnitt MN aus nach rechts aufzutragen waren). In den Punkten $a'c'd'f'g'$ schneidet die Schnittebene die Lagen *VIII VII VI V IV* des erzeugenden Quadrats. Diese Punkte $a\,c\,d\,d_1$ u. s. w. wurden im rechtsseitigen Grundriss aufgesucht; es wurde $1a$ im Schnitt $MN = 1a$ im Grundriss nach rechts getragen (Probe mit dem Kantenpunkt), $3c$ im Schnitt $MN = 3c$ im Grundriss nach rechts getragen, $4d$ im Schnitt $MN = 4d$ im Grundriss nach links getragen, $4d_1$ im Schnitt $MN = 4d_1$ im Grundriss nach rechts getragen u. s. w. Die Verbindung der erhaltenen Kantenpunkte und Kreisflächenpunkte ergab die Schnittfigur MN.

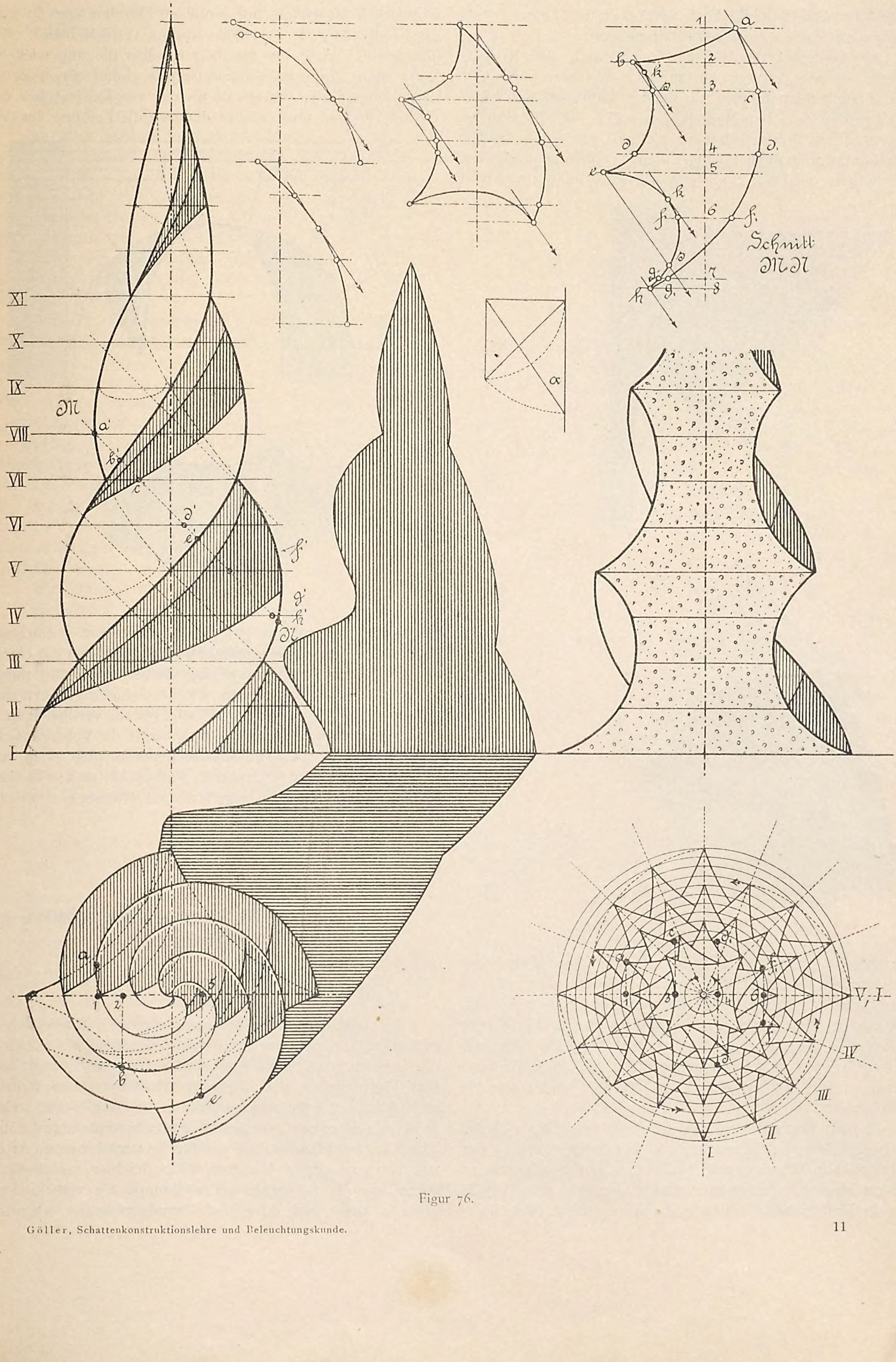
In der Schnittebene MN bildet der Lichtstrahl mit der Gefällslinie 12 . . . 8 oder mit der herausgetragenen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den bekannten Winkel α; an die erhaltene Schnittkurve MN waren also Tangenten und Streiflichtstrahlen unter diesem Winkel mit der Vertikalen zu ziehen. Diese lieferten die zwei Berührungspunkte k als Körperschattengrenzpunkte und die zwei Schnittpunkte s als Schlagschattenpunkte. Zur Uebertragung der vier Punkte auf die Linie MN im Aufriss waren die vertikalen Abstände der Punkte k und s von der Horizontalen $1a$ auf der Linie MN von a' aus abzumessen. Die Streiflichtstrahlen bei a und h an der Schnittfigur MN beweisen, dass die ganze Rückseite der Schnittfigur MN einer Körperschattenfläche angehört. Die drei andern Schnittfiguren und Figurenstücke wurden zur Bestimmung der Schattengrenzen auf der Rückseite des Körpers benützt.

Konoidische Flächen; windschiefer Hausteinbogen in cylindrischer oder ebener Mauer. 77.

Konoidische Flächen entstehen durch Bewegung einer Geraden in der Weise, dass sie 1) immer einer Richtebene parallel bleibt, 2) immer an einer andern, festen Geraden gleitet, 3) immer an einer festliegenden gekrümmten Linie oder Fläche gleitet. Steht die feste Gerade senkrecht zur Richtebene, so heisst das Konoid ein senkrechtes.

Für die Schattengrenzen auf solchen Flächen gestaltet sich das allgemeine Verfahren wie in Art. 29 für Regelflächen überhaupt beschrieben. Man zeichnet verschiedene Lagen der Erzeugenden in Grundriss und Aufriss und erhält nach Einführung vertikalstehender Lichtstrahlenebenen durch Hinaufloten der Grundrissschnittpunkte in den Aufriss die Schnittkurven, die in bekannter Weise zu benützen sind. Ein Beispiel war schon Figur 29b.

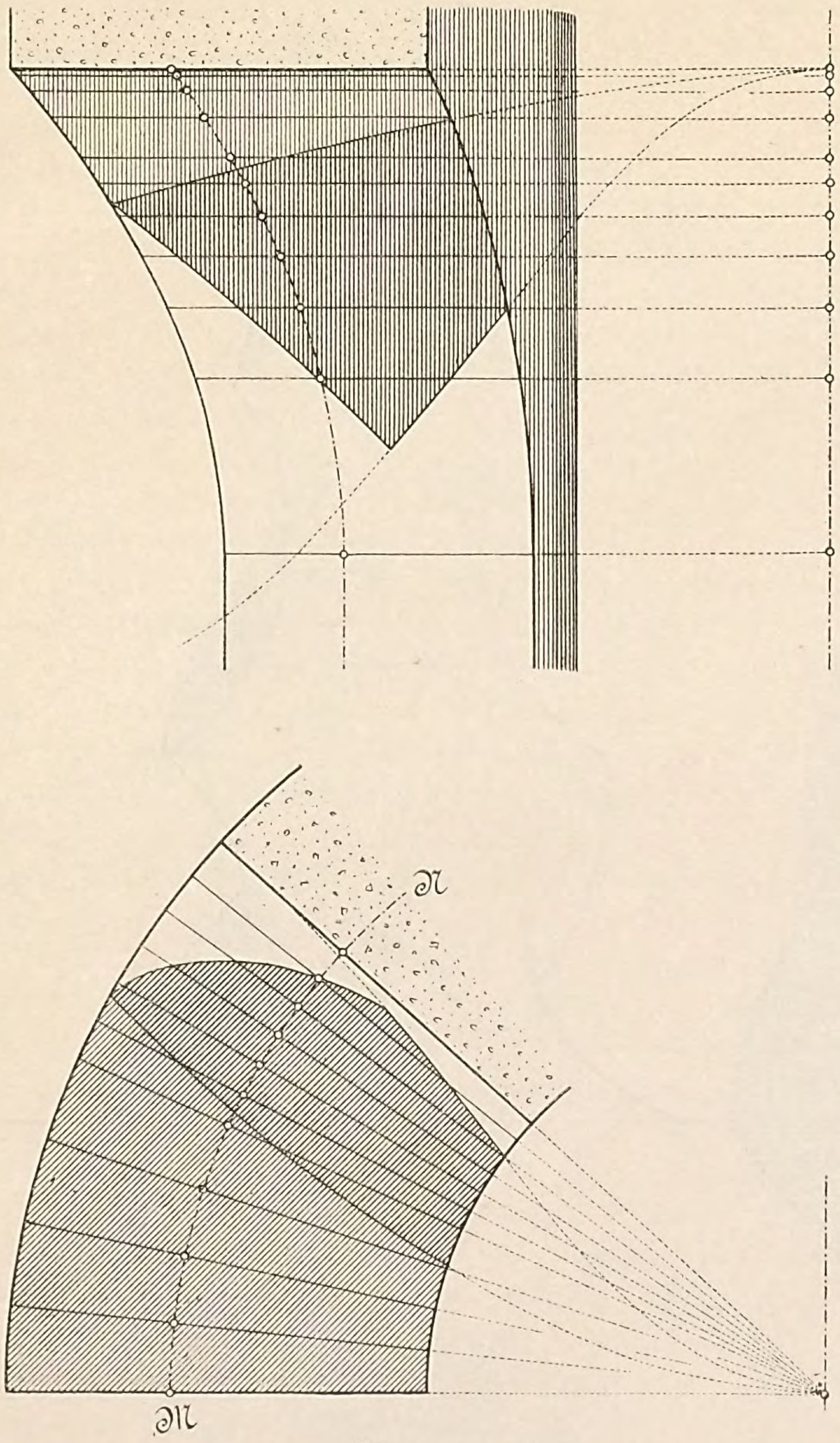
Eine weitere Konstruktion für Schlagschattengrenzen ist die folgende, welche auf der Eigenschaft der Konoidfläche als Rückungsfläche mit gerader Erzeugenden beruht. Man sucht auf einer beliebigen, zur Richtebene parallelen Schnittebene den Schlagschatten derjenigen Linie, welche die Konoidfläche beschattet, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines andern Körpers. Wo die in der gewählten Ebene liegende Erzeugende die Schlagschattenlinie schneidet, da ist ein Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Für weitere Parallelebenen werden die Schlagschattenlinien kongruent der ersterhaltenen und erscheinen nur in der Richtung des Lichtstrahls verschoben. Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn ein schattenwerfender Rand durch



Figur 76.

eine Erzeugende gebildet ist, wie in Figur 77 a am rechts liegenden Stück der Schlagschattengrenze.

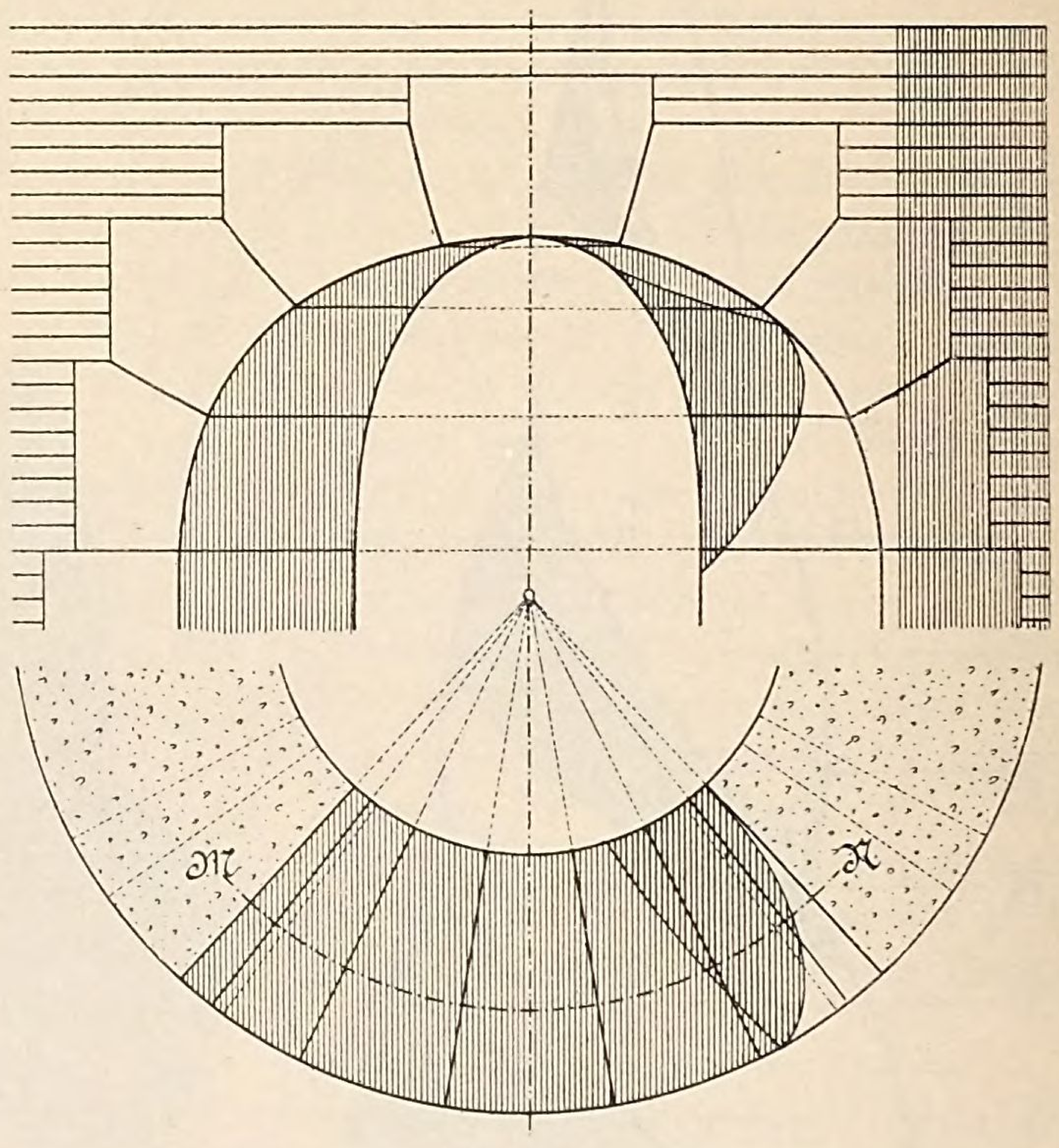
In ähnlicher Weise lässt sich auch die Körperschattengrenze dadurch bestimmen, dass man auf einer zur Richtebene parallelen Ebene die Schlagschatten einer genügenden Zahl von Mantellinien sucht, die Umhüllungskurve dieser Schlagschatten zeichnet, für jede Schlagschattenlinie möglichst scharf den Berührungspunkt mit der Kurve bestimmt und von diesem Punkt auf einem



Figur 77 a.

Lichtstrahl rückwärts geht bis zu der Mantellinie, von welcher die Schlagschattenlinie herrührt. Der auf der Mantellinie erhaltene Punkt ist ein Körperschattengrenzpunkt. In der praktischen Ausführung dieses Verfahrens findet sich jedoch, dass die Berührungspunkte innerhalb weiter Grenzen unsicher einzuschätzen sind, also die Festsetzung der Schattenpunkte ganz unsicher oder sogar unmöglich ist.

In den Figuren 77 a und b ist als einfaches Beispiel einer Konoidfläche ein windschiefes Tonnengewölbe in einer cylindrischen Mauer gezeichnet. Auf einem beliebigen, zu beiden Mauerflächen konzentrischen Vertikalcylinder *MN* ist ein Halbkreisfeld (oder Segmentbogenfeld oder halbelliptisches Feld) mit horizontalem Durchmesser so aufgewickelt, dass der vertikale Radius vertikal bleibt. (Es könnte auch einer der Stirnbögen selber die aufgewickelte Linie sein.) Eine horizontale Gerade gleitet einerseits an dieser Bogenlinie, andrerseits an der vertikalen Achse der Cylinderflächen und erzeugt dadurch die Leibung des Ge-



Figur 77 b.

wölbs. Es ist in Figur 77 a im Längenschnitt gezeichnet, so dass die oberste Mantellinie und Scheitellinie mit einem Teil des Stirnbogens den Schlagschatten wirft. Mit punktierten Linien ist angegeben, wie die Schattengrenzen sich fortsetzen würden, wenn die Fläche bis zur vertikalen Leitlinie fortgesetzt wäre. Figur 77 b bietet die Vorderansicht desselben Gewölbs. Die Schattengrenzen, abgesehen von derjenigen aus der wagrechten Randlinie, sind dieselben wie in Figur 77 a, nur symmetrisch zur Mittelachse verlegt.

X. Rückblick auf die Lehre von den Schattengrenzlinien.

Zwei Grundgedanken in der Schattenkonstruktion. 78.

Alle beschriebenen Lösungen teilen sich in zwei scharf getrennte Gruppen; es ist ebenso interessant als nützlich, die gemeinschaftlichen Züge jeder Gruppe festzustellen. Das Hervorheben der hiedurch erhaltenen zwei Grundgedanken der Schattenkonstruktion liefert gleichsam eine in wenige Sätze zusammengedrängte Schattenkonstruktionslehre; es macht nicht nur die für die verschiedenen Arten von Körpern eingeschlagenen Wege leichter verständlich, indem es die Lösungen jeder Gruppe als verschiedene Formen eines und desselben Grundverfahrens erkennen

lässt, sondern erleichtert auch deren Beherrschung durch das Gedächtnis.

79. Die unmittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle.

Bei aller Schlagschattenkonstruktion hat man immer und immer wieder den Schlagschatten eines Punktes auf einem Körper zu suchen. Alle Konstruktionen der ersten Gruppe haben das Gemeinsame, dass man durch den schattenwerfenden Punkt einen Lichtstrahl zieht, durch den Lichtstrahl eine Ebene legt und die Schnittlinie dieser Ebene mit dem beschatteten Körper aufsucht. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Lichtstrahl, da ist der Schlagschattenpunkt.

Auch für die Bestimmung der Körperschattengrenzen wurden diese Schnittlinien verwertet. Wo die zu einem Lichtstrahl gehörige Schnittlinie (als Schnittpolygon bei eben begrenzten Körpern und als Schnittkurve bei gekrümmten Flächen) gestreift oder berührt wird vom Lichtstrahl, da ist ein Punkt der Körperschattengrenze.

Für die Wahl der durch den Lichtstrahl zu legenden Schnittebene erschienen vier Fälle, die dadurch bedingt sind, dass man immer auf eine möglichst einfache und rasch darstellbare, womöglich also eine gerade oder kreisförmige Schnittlinie ausgeht. Die vier Fälle waren die folgenden:

a) Benützung der vertikalen Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die horizontale Grundebene projiziert.
b) Benützung der unter 45° geneigten Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die vertikale Grundebene projiziert (der sogenannten vertikalprojizierenden Ebene).
c) Benützung der unter 45° geneigten Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die Seitenebene projiziert.
d) Benützung einer Ebene, die durch den Lichtstrahl und die Spitze eines Kegels gelegt ist, bei Schatten auf einer Kegelfläche, oder durch den Lichtstrahl parallel zu den Mantellinien einer Cylinderfläche gelegt ist, bei Schatten auf einer schiefgerichteten Cylinderfläche.

79a. mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung.

Der erste Fall (Benützung der vertikalen Ebene des Lichtstrahls) erschien als „allgemeine Lösung"

1) bei Schlagschatten auf der vertikalen Grundebene, Art. 9—11 (denn das Lot auf dem Grundschnitt im Schnittpunkt der Horizontalprojektion des Lichtstrahls ist ja nichts anderes als die Schnittlinie der vertikalen Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche),

2) bei Schatten auf eben begrenzten Körpern, Art. 15 bis 18, mit Einschluss der Körperschattenbestimmung auf solchen durch Vertikalschnitte, Art. 12 zweiter Teil. Die einfachste Schnittlinie, nämlich die vertikale Gerade, ergab sich bei vertikalstehenden Prismen, zu denen auch die vertikalstehenden Cylinderflächen gerechnet werden konnten, Art. 22,

3) bei Schatten auf gekrümmten Flächen, Art 28, insbesondere auf Regelflächen und Drehungsflächen mit vertikaler Achse. Kugelflächen (Art. 65) erfuhren eine besondere Behandlung insofern, als die Schnittlinie und der Lichtstrahl nicht in der Projektion, sondern in der Umklappung gezeichnet wurden, weil in dieser die Schnittlinie sich als Kreis darstellt, also weit einfacher zu zeichnen ist als die elliptische Linie, die sie in der Projektion werden würde. Auch für andere gekrümmte Flächen war die Umklappung oder das getrennte Heraustragen der Schnittlinie und des Lichtstrahls zuweilen als ein Hilfsmittel zur Erlangung grösserer Klarheit und zur Erprobung des Resultats in verwickelten Raumformverhältnissen zu empfehlen.

mit vertikalprojizierenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung. 79b.

Der zweite Fall (Benützung der vertikalprojizierenden Ebene des Lichtstrahls) umfasst die Lösungen

1) für Schlagschatten auf der horizontalen Grundebene (denn das Lot auf dem Grundschnitt im Schnittpunkt der Vertikalprojektion des Lichtstrahls ist ja nichts anderes als die Schnittlinie der vertikalprojizierenden Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche), Art. 9—11,

2) für Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene, Art. 23,

3) für Schatten auf Drehungs-, Wendel- und Schraubenflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, Art. 36. Auch Kugelflächen, wenn deren Schatten vorwiegend oder ausschliesslich im Aufriss verlangt sind, reihen sich hier mit derselben besonderen Behandlung an, wie im ersten Fall, nämlich mit dem Zeichnen der Schnittlinie in der Umklappung anstatt in der Projektion, Art. 65. Andere eben begrenzte Körper und gekrümmte Flächen als die eben unter 2) 3) genannten können zwar ebenfalls mit den vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen behandelt werden, folgen aber im allgemeinen dem ersten Fall.

mit seitlich projizierenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung. 79c.

Der dritte Fall (Benützung der seitlich projizierenden Ebene des Lichtstrahls) erschien in den Lösungen

1) für Schlagschatten auf der Seitenebene,

2) für Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen mit Kanten und Mantellinien parallel zum Grundschnitt, Art. 25,

3) für Schatten auf Drehungs-, Wendel- und Schraubenflächen mit Achse parallel zum Grundschnitt, Art. 37.

mit Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung gelegt durch die Spitze eines Kegels oder die Mantellinien eines schiefgerichteten Cylinders. 79d.

Der vierte und letzte Fall, in welchem beim Aufsuchen der Schatten auf Kegelflächen (Art. 41) durch die Lichtstrahlen verschieden gerichtete Ebenen gelegt werden, welche die beschattete Fläche nach Mantellinien schneiden, enthielt als Schlüssel den Punkt, in welchem ein aus der Kegelspitze gezogener Lichtstrahl die Basis-

ebene schneidet. Von diesem Punkt aus war eine Sekante in die Basis zu ziehen, und zwar durch den Schatten des gegebenen Punktes auf der Basisebene, ferner eine Tangente an die Basislinie zu ziehen. Die Sekante lieferte die schlagschattenaufnehmende Mantellinie, die Tangente diejenige der Körperschattengrenze.

Die Schattenkonstruktion auf schiefgerichteten Cylinderflächen nach Art. 48 kann als besonderer Fall der vorgenannten Lösung für den als Kegel mit unendlich ferner Spitze aufgefassten Cylinder erklärt werden. Ihr Grundgedanke war das Projizieren der Lichtrichtung und der schattenwerfenden Punkte auf die Basisebene des Cylinders, mit der Richtung der Mantellinien als Projektionsrichtung. Die so erhaltene Projektion des Lichtstrahls war als die in der Basisebene gültige Lichtrichtung zu benützen und ergab in den Berührungspunkten ihrer Tangenten die Endpunkte der körperschattenabgrenzenden Mantellinien, ferner in den Schnittpunkten mit der Basislinie die Endpunkte der schlagschattenaufnehmenden Mantellinien. Die Schnittebenen werden hier zwar wieder parallel, weil die Mantellinien parallel sind; doch ist ihre Lage noch immer eine andere als in den drei ersten Fällen.

Alle in den vier Fällen enthaltenen Lösungen haben das Gemeinsame, dass bei ihnen der Schlagschatten eines zuvor ausgewählten Punktes oder ein Körperschattenpunkt auf der beschatteten Fläche unmittelbar erhalten wird. Diese Lösungen können hienach als diejenigen der unmittelbaren oder direkten Schattenbestimmung zusammengefasst werden. Sie bilden ihres einfachen Grundgedankens wegen gleichsam die „Landstrassen" der Schattenkonstruktion und können immer aushelfen, wo die andern Konstruktionen unbekannt oder unmöglich sind; nur erfordern sie bei bestimmten Flächen weit mehr Arbeit als diese andern. Ja schon von den in den drei ersten Fällen enthaltenen Lösungen lässt sich aussagen, dass mit ihnen allein alle Probleme überwindbar sind, wenn es sich nicht um geringen Arbeitsaufwand und Schönheit der Lösung handelt, da auch die Kegel- und schiefgerichteten Cylinderflächen mit Schnitten parallel zu den drei Grundebenen behandelt werden können.

80. Die mittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle.

Die Konstruktionen der zweiten Hauptgruppe haben das Gemeinsame, dass man bei ihnen den Schatten auf einem andern Gebilde zu Hilfe nimmt, um denjenigen auf dem gegebenen Körper zu erhalten, und es liegt eben hierin ihr entschiedener Gegensatz zu denen der ersten Gruppe. Sie können hienach als die mittelbar bestimmenden oder indirekten Schattenkonstruktionen bezeichnet werden. Ihr Grundgedanke ist selbstverständlich nur da von Wert, wo sich der Schatten auf dem Hilfsgebilde rasch erhalten lässt. Auch diese Gruppe lässt vier Fälle unterscheiden, und zwar die folgenden:

a) Man bestimmt eine Körperschattengrenze aus dem Schlagschatten, den sie auf eine Ebene, meist eine Grundebene, wirft.
b) Man bestimmt eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, Röhren- und Rückungsflächen, indem man Parallelkreisschnitte, beziehungsweise Normalschnitte oder parallele Schnitte nach Lagen der rückenden Figur, als niedrige Zonen von Kegeln, oder Kugeln oder Cylindern auffasst und schattiert.
c) Man erhält auf Drehungs- und Rückungsflächen den Schlagschatten eines Randes oder Körpers durch dessen immer kongruenten Schlagschatten auf verschiedenen Parallelkreis-, beziehungsweise Parallelschnittebenen mit Lagen der rückenden Figur.
d) Man erhält eine Schlagschattengrenze aus den beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Ebene, meist eine Grundebene, werfen.

Eine Körperschattengrenze erhalten aus ihrem Schlagschatten auf einer Grundebene. 80a.

Der erste Fall ist in erster Linie verwirklicht durch die in Art. 12 erklärte Selbstschattenbestimmung auf eben begrenzten Körpern nach dem Satz: „Diejenigen Kanten des Körpers, deren Schatten im Umriss der Schlagschattenfigur erscheinen, sind die Grenzen von Licht und Schatten auf dem Körper". Selbstverständlich kann auch der Schlagschatten auf anderen Gebilden als einer Grundebene über die Selbstschattengrenze des schattenwerfenden Körpers Auskunft geben; aber im allgemeinen wird erst der Schlagschatten mit Hilfe dieser Grenze zu bestimmen sein, nicht umgekehrt. Daher sind bei den gekrümmten Flächen nur drei Beispiele zu nennen, nämlich die in Art. 59 erklärte Ableitung des Körperschattens einer Drehungsfläche aus deren leicht erhältlichem Schlagschatten auf einer Parallelkreisebene, und die sehr unsichere Bestimmung der Körperschattengrenze der Schraubenfläche aus der Umhüllungslinie der Schlagschatten ihrer Mantellinien auf einer Ebene senkrecht oder parallel zur Achse (Art. 70), endlich die Körperschattenbestimmung auf der gewundenen Säule durch die Schatten ihrer Parallelschnitte auf der Horizontalebene. Uebrigens könnte auch die Bestimmung der schattenbegrenzenden Mantellinien des Kegels durch die Tangenten aus dem Schlagschatten der Spitze, die ja nichts anderes sind als die Schlagschatten jener Mantellinien, hieher gerechnet werden (Art. 42).

Eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, Röhren- und Rückungsflächen erhalten durch Hilfskegel oder Hilfskugeln oder Hilfscylinder. 80b.

Dieser Fall schliesst das wichtigste Beispiel für indirekte Körperschattenbestimmung ein, nämlich diejenige auf Drehungsflächen durch Auffassung ihrer Parallelkreise als niedriger Kegelzonen oder Kugelzonen, Art. 56 und 57, ferner diejenige auf Wulstflächen, schraubenförmigen Röhren und anderen kreisförmigen Röhren mit unveränderlichem Normalschnitt durch Auffassung des letzteren als des Grosskreises einer berührenden Kugel oder als der niedrigen Zone eines berührenden Cylinders (Art. 58 u. 71).

Auch die Behandlung von Röhrenflächen mit beliebigen unveränderlichen Normalschnitten durch Hilfscylinder, die längs der Normalschnitte die Flächen berühren (Art. 72), findet nicht selten praktische Verwertung; sogar noch von der Auffassung der kongruenten Parallelschnitte der Rückungsflächen nach Art. 74 als der Zonen schiefgerichteter Cylinderflächen, z. B. bei der gewundenen Säule, ist dies zu sagen (ein besonderer Fall einer solchen Rückungsfläche ist das hyperbolische Paraboloid aus Art. 69 e). Dagegen ist die Behandlung der Rückungsflächen mit veränderlichen Erzeugenden (Art. 75) durch Hilfskegel, welche die Flächen längs Parallelschnitten berühren, und wofür das einmantelige elliptische Hyperboloid in Art. 69 d ein Beispiel war, mehr nur theoretisch interessant.

80c. Eine Schlagschattengrenze auf Drehungs- und Rückungsflächen erhalten durch die Schlagschatten auf Parallelkreisebenen, beziehungsweise auf Ebenen der fortrückenden Figur.

Der dritte Fall der mittelbaren Schattenbestimmung ist derjenige, bei welchem der Schlagschatten eines schattenwerfenden Körpers oder Randes zuerst auf einer Ebene gesucht wird, in welcher eine Schnittlinie des beschatteten Körpers liegt. Wo die Hilfsschlagschattengrenze diese Schnittlinie schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt auf dem beschatteten Körper. Dieser Gedanke ist zwar auch verwertbar, wenn die Schnittlinien aus verschiedenen parallelen Schnitten des Körpers verschiedene Formen haben, wofern sie nur einfach und rasch gezeichnet werden können, so dass im Grunde das Verfahren für vielerlei Flächen zur Anwendung gelangen könnte. Doch wird es zumeist auf Flächen mit geometrisch ähnlichen Parallelschnitten, das heisst auf Drehungs- und Rückungsflächen beschränkt. Die meist verwertete Lösung dieser Art ist die Bestimmung des auf eine Drehungsfläche durch einen Randkreis geworfenen Schlagschattens mit Hilfe von Parallelkreisschnitten, auf deren Ebenen der Randkreis seine kongruenten Schlagschatten wirft (Art. 61). Minder häufige praktische Anwendung findet die im selben Artikel beschriebene Selbstbeschattung von Drehungsflächen mit berührenden Lichtstrahlen und Beschattung durch äussere Körper. Als mehr nur theoretisch interessant gehört endlich hieher die Schlagschattenbestimmung auf Rückungsflächen mit unveränderlicher und veränderlicher Erzeugenden nach Art. 74 und 75 mit Einschluss des hyperbolischen Paraboloids und des elliptischen Hyperboloids (Art. 69 e und d).

Eine Schlagschattengrenze erhalten aus den beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Grundebene werfen. 80d.

Im vierten Fall der mittelbaren Schlagschattenbestimmung wird auf einer Ebene, meist Grundebene, als dem Hilfsgebilde sowohl der Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder Randes als derjenige einer Erzeugenden der beschatteten Fläche gesucht. Wo die beiden Schlagschattenlinien einander schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten eines Punktes der schattenwerfenden Grenzlinie und seines Schlagschattens auf der Erzeugenden, also auf der Fläche. Ein rückwärts durch diesen gemeinschaftlichen Schlagschattenpunkt bis zur Erzeugenden gezogener Lichtstrahl führt also zu einem Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Das wichtigste Beispiel ist die Bestimmung des Schlagschattens auf einer Drehungsfläche nach Art. 62 durch die beiden Schlagschatten, die von der schattenwerfenden Grenzlinie und von einem Parallelkreis auf eine zur Achse senkrechte Ebene geworfen werden; ferner gehören hieher das Aufsuchen der Schlagschattenpunkte einer Linie auf den Kanten eines Vielflachs oder auf einer andern Linie mit Hilfe der Schlagschatten beider auf einer Grundebene (Art. 17), die Bestimmung der Selbstbeschattung (oder äusseren Beschattung) einer Schraubenfläche oder Wendelfläche durch die Schlagschatten des schraubenlinienförmigen Randes (oder der schattenwerfenden Grenzlinie) und einiger Mantellinien auf der Grundebene (Art. 70), endlich die Schlagschattenbestimmung auf der Rückungsfläche (Art. 74, gewundene Säule) und der Konoidfläche (Art. 77).

Mit Hilfe der mittelbaren Schattenbestimmung werden besonders auf Drehungsflächen und anderen gekrümmten Flächen mehr verwickelter Erzeugung die Schatten im allgemeinen rascher und bestimmter erhalten, als mit den direkten Lösungen; ihre Konstruktionen sind auch meist interessanter und schöner als diese. Beispiele für ihre vier Fälle finden sich für bestimmte Formen und Lagen der Körper wohl noch manche ausser den genannten; wenn aber auch die Schattenkonstruktionslehre in dieser Richtung noch beliebig weit ausgesponnen werden könnte, so dürften sich doch sogar bei Hereinziehen von Flächen höherer Ordnungen weitere Fälle neben die vier aufgezählten nicht stellen lassen.

Eine mittelbare Schattenbestimmung ist der Theorie nach immer möglich, aber oft undurchführbar.

B. Beleuchtungskunde oder Lehre von den Lichtstufen.

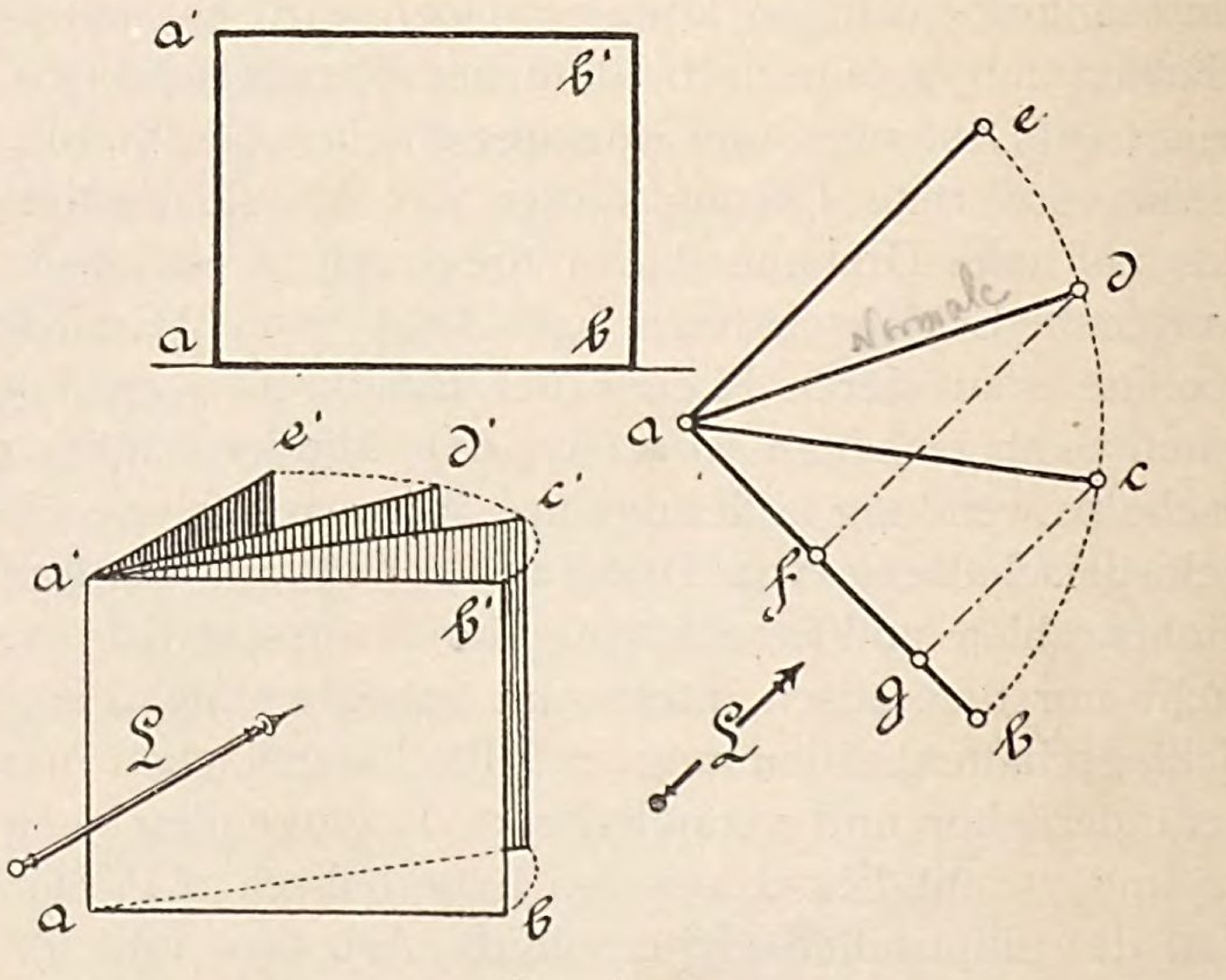
Während in der Schattenkonstruktionslehre nur Lichtflächen, Körperschattenflächen und Schlagschattenflächen an den dargestellten Gebilden auftraten und nur die Grenzlinien dieser drei Flächen zu suchen waren, ist die Beleuchtungskunde, wie früher ausgesprochen, die Lehre von den feineren Unterschieden der Schattierung, von der Abstufung der Lichtstärken auf den beleuchteten oder im Schatten befindlichen Flächen eines Körpers. Sie stellt sich zunächst die Frage: „Wie gross ist unter Voraussetzung der eingeführten Richtung der Lichtstrahlen die Stärke der Beleuchtung an jedem einzelnen Punkt der Oberfläche des darzustellenden Körpers?“ und sucht auf den gekrümmten Flächen ununterbrochene Linien, von welchen jede die Punkte einer bestimmten Lichtstärke zusammenfasst.

XI. Die Normalkugel.

81. Das Gesetz der Lichtstufen.

Eine genügend einfache und deutliche Formenwiedergabe der technischen Gebilde mit Hilfe der Schattierung ist nur möglich unter der Voraussetzung einfarbiger, nicht glänzender, nicht erheblich durchscheinender Oberflächen, für welche eine Aenderung der Stellung des anschauenden Auges eine merkliche Aenderung der wahrgenommenen Beleuchtungsstufen nicht herbeiführt. Gekrümmte Spiegelflächen, die alles auf sie fallende Licht regelmässig zurückwerfen und ihr Aussehen mit jedem Standpunkt ändern, schattieren sich überhaupt nicht, sondern zeigen nur Spiegelbilder äusserer Dinge; für minder stark glänzende Oberflächen müsste immer ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Menge des regelmässig zurückgeworfenen und zerstreut reflektierten Lichtes festgesetzt werden, um ihre Lichtstufen verfolgen zu können; auch wäre immer ausser der Lichtrichtung ein Standpunkt des betrachtenden Auges oder eine Richtung paralleler Sehstrahlen einzuführen, welchen gegenüber das physikalische Gesetz von der Zurückwerfung des Lichtes anzuwenden wäre, wodurch die Bestimmung der Lichtstufen äusserst umständlich und schwierig werden müsste. Eine so erhaltene Schattierung, etwa für ein Ellipsoid, würde das formale Gesetz der Fläche weit weniger deutlich fühlen lassen, als diejenige für eine nicht glänzende Oberfläche, wie am besten die Photographie beweisen kann; die Darstellung würde also trotz des grösseren Aufwandes weniger erklären als sie erklären soll. Wenn es auch der Theorie nach kaum eine Fläche geben mag, die nicht bei Sonnenbeleuchtung einiges Glanzlicht in einer bestimmten Richtung zurückwirft, so lehrt doch die Beobachtung, dass die Schattierung auf solchen Stoffen, die nach der gewöhnlichen Auffassung als glanzlos bezeichnet werden, sich mit der Bewegung des Auges nicht merklich ändert, dass es also gerechtfertigt ist, von einer scheinbaren Beleuchtung, die gleichzeitig von der Lichtrichtung und Sehstrahlenrichtung abhängig wäre, bei der Schattierung technischer Gebilde Umgang zu nehmen. Anders ist es in der künstlerischen Malerei.

Die Annahme einer Beleuchtung nicht glänzender, nicht erheblich durchscheinender Oberflächen durch parallele Lichtstrahlen, welche andere Lichtquellen nicht erzeugen, führt zu der von der Beobachtung bestätigten Folgerung, dass die vom Licht senkrecht getroffenen Stellen einer Körperoberfläche die hellsten sind, und dass die Lichtstärke um so geringer wird, je schiefer die Lichtstrahlen die Fläche treffen. Dabei richten sich die Lichtstärken nach folgendem Gesetz:



Figur 81.

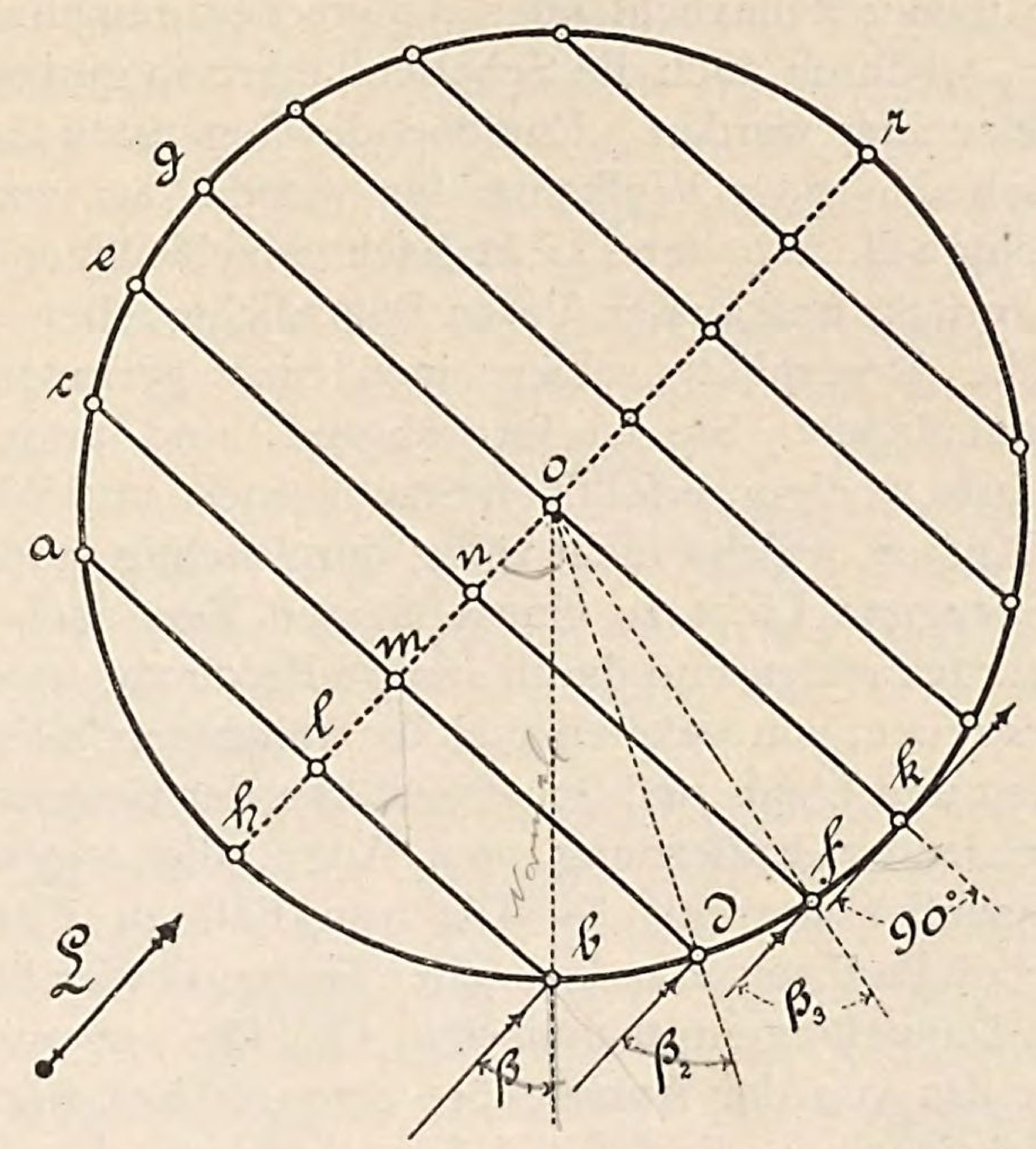
„Die Lichtstärken verschieden gerichteter beleuchteter Ebenen verhalten sich wie die Sinuse der Winkel, unter

denen die Ebenen von den Lichtstrahlen getroffen werden, oder, mit andern Worten, wie die Kosinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit den Senkrechten auf den Ebenen bilden. — Bei gekrümmten Flächen ist jedes Flächenelement ebenso hell wie die zugehörige tangierende Ebene. Die Lichtstärken verschiedener Punkte einer beleuchteten gekrümmten Fläche verhalten sich also wie die Kosinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit den Normalen der Fläche in diesen Punkten bilden.“

Dieses Gesetz wird durch folgende Betrachtung gewonnen. Es sei in Figur 81 die Horizontallinie L die Richtung des Lichtstrahls (das heisst, das Grundebenensystem sei so gewählt, dass die im Raum geneigte Richtung des Lichtstrahls als horizontale Linie auftritt). ab sei ein ebenes Rechteck, senkrecht zum Lichtstrahl gerichtet und von der Höhe h. Dieses Rechteck wird getroffen von einem vierseitig prismatischen Lichtstrahlenbüschel, dessen Querschnittsfläche gleich ist der Fläche des Rechtecks, also ausgedrückt ist durch $ab \, . \, h$. — Denkt man sich nun das Rechteck um seine Kante aa' in die Lage ac gedreht, so wird das Lichtstrahlenbüschel, das in dieser Lage seine Ebene trifft, kleiner sein; es wird einen Querschnitt haben gleich $ag \, . \, h$. — Dreht man das Rechteck weiter in die Lage ad, so wird das Lichtstrahlenbüschel abermals kleiner; es wird einen Querschnitt haben gleich $af \, . \, h$. Daraus folgt, dass die Lichtmengen auf dem Rechteck in den zwei beliebigen Lagen ac und ad sich verhalten wie ag zu af oder wie sin acg zu sin adf; denn sin $acg = \frac{ag}{ab}$ und sin $adf = \frac{af}{ab}$. Also verhalten sich die Lichtstrahlenbüschel, welche zwei beliebige Lagen der rechteckigen Ebene treffen, mit andern Worten die Lichtmengen auf der Ebene, wie die Sinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit dieser Ebene bilden. Dies trifft nicht etwa nur beim Rechteck zu, sondern eine einfache Betrachtung kann lehren, dass für jede beliebige ebene Figur der Querschnitt des Lichtstrahlenbündels gleich ist der Fläche der Figur mal dem Sinus des Winkels der Lichtstrahlen mit der Fläche.

82. Lichtstufen auf der Lichtseite der Kugel.

Als erster Gegenstand der Verwertung des Gesetzes über die Lichtstärken sei die Kugel gewählt. Der gezeichnete Kreis (Figur 82) sei die Horizontalprojektion einer Kugel in einem Grundebenensystem, in welchem die Richtung des Lichtstrahls wieder dargestellt ist durch die Horizontallinie L. Man zieht einen Kugeldurchmesser parallel zum Lichtstrahl und teilt ihn in 8 gleiche Teile; durch die Teilpunkte legt man Ebenen senkrecht zum Lichtstrahl; diese schneiden die Kugel nach 7 Kreisen, die sich in der Figur als gerade Linien projizieren und von welchen der mittlere als Grosskreis die Grenze zwischen Licht und Körperschatten bildet, indem längs dieses Kreises die Lichtstrahlen die Kugel berühren. Der Punkt h, in welchem der Lichtstrahl zusammenfällt mit der Normalen auf der Kugelfläche, wird der hellste Punkt sein. In jedem Punkt des Parallelkreises cd bildet der Lichtstrahl mit dem Kugelradius, das heisst mit der Normalen auf der Kugelfläche, denselben Winkel β_2; denn wie dieser Winkel in der Figur erscheint, so ist er in jeder andern Ebene, die durch den Durchmesser hr gelegt wird. Also wird die Lichtstärke der Kugelfläche längs des ganzen Parallelkreises cd dieselbe sein. Dasselbe gilt für den Parallelkreis ab, weil in allen seinen Punkten der Winkel



Figur 82.

β_1 derselbe sein muss, endlich für den Parallelkreis ef mit dem gleichbleibenden Winkel β_3.

Wendet man das Gesetz an, dass sich die Lichtstärken verschiedener Flächenpunkte verhalten wie die Kosinuse der Winkel des Lichtstrahls mit den Normalen in diesen Punkten, so findet sich, wenn mit h die Lichtstärke im Punkt h und mit ab die Lichtstärke längs des Kreises ab bezeichnet wird, die Proportion:

$$h : ab : cd : ef : gk = \cos 0^0 : \cos \beta_1 : \cos \beta_2 : \cos \beta_3 : \cos 90^0.$$

Nun ist aber

$$\cos 0^0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = 1$$
$$\cos \beta_1 = \cos boh = ol/ob = 3/4$$
$$\cos \beta_2 = \cos doh = om/od = 2/4$$
$$\cos \beta_3 = \cos foh = on/of = 1/4$$
$$\cos 90^0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = 0.$$

Also verhalten sich jene Lichtstärken wie $1 : 3/4 : 2/4 : 1/4 : 0$, oder wie $4 : 3 : 2 : 1 : 0$.

Hätte man etwa den Kugelradius oh in 6 gleiche Teile anstatt in 4 geteilt, so wäre für die Lichtstärken erschienen das Verhältnis $6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 : 0$, und damit ein geringerer Unterschied der Lichtstärke von einem Parallelkreis zum andern.

Reflexlichtwirkung. Lichtstufen auf der Schattenseite der Kugel. 83.

Was die vom Sonnenlicht abgewandte Hälfte der Kugel betrifft, so wäre sie unter der gemachten Voraussetzung, dass die direkten Lichtstrahlen keine weiteren Lichtquellen hervorrufen, durchaus gleich dunkel wie der schattenabgrenzende Grosskreis; sie würde also durchaus

die Lichtstärke Null darbieten. Diese Voraussetzung kann aber nur etwa bei der Mondkugel als erfüllt erklärt werden; sie hat bei dieser zur Folge, dass der im Schatten befindliche Teil der Mondscheibe unsichtbar oder fast unsichtbar ist. Bei allen Beleuchtungen auf der Erde giebt es keine Lichtstärke Null, eben weil die direkten Lichtstrahlen immer Reflexlicht oder Widerschein reichlich hervorrufen, wodurch auch die Schattenflächen in geringerem Grad beleuchtet werden. Umgebende Gegenstände oder der Fussboden oder Wolkenränder werfen das von der Hauptlichtquelle erhaltene Licht nach verschiedenen Richtungen zurück, und ausser diesen Reflexlichtquellen widerstrahlt die Atmosphäre selber einen nicht geringen Teil des Sonnenlichts. Sie ist fortwährend, und zwar bald stärker, bald weniger, erfüllt von Staubkörnern und Wasserdampfbläschen, welche nicht völlig durchsichtig sind, also das empfangene Licht zu einem kleinen Teil nach allen Seiten zurückwerfen und durch innere Brechung ablenken oder zerstreuen, von welchen auch die abnehmende Farbenkräftigkeit und Licht- und Schattenstärke der Gegenstände mit wachsender Entfernung vom Auge, die sogenannte Luftperspektive herrührt. — Die von Fall zu Fall veränderlichen Reflexe von umgebenden Gegenständen bleiben für die Darstellungen technischer Gebilde ausser Spiel und nur das von der Atmosphäre erzeugte Reflexlicht ist zu berücksichtigen. Es lässt sich nachweisen, dass dieses zwar nach allen Richtungen des Raums, am stärksten aber in derjenigen Richtung wirkt, welche dem Sonnenstrahl genau entgegengesetzt ist und in dieser Weise führt man es in die Darstellungen ein. Es wird auf die Schattenseite der Kugel in derselben Weise wirken wie das direkte Licht auf die Lichtseite, nur weit schwächer. Der dem hellsten Punkt gerade entgegengesetzte Punkt der Kugelfläche *(r)* erhält die Reflexlichtstrahlen normal zu seiner Fläche, wird also der hellste Punkt des Körperschattens sein. Die Parallelkreise der Lichtseite werden sich auf der Schattenseite symmetrisch als Linien gleicher Schattenstärke wiederholen, um so dunkler, je näher sie der Körperschattengrenze liegen; nur wird der Unterschied zwischen zwei benachbarten Schattenkreisen ein weit kleinerer sein als zwischen zwei Kreisen im Licht. Somit finden sich die Lichtstärken vom hellsten Punkt *h* an abnehmend bis zur Schattengrenze, dann wieder um ein Geringes stetig zunehmend bis zum hellsten Reflexpunkt *r*.

84. Lichtstufen im Schlagschatten auf der Kugel.

Noch ist zu sprechen über die Abstufung der Schlagschatten. Irgend ein Gegenstand werfe einen Schlagschatten auf die Kugel, oder die ganze Kugel sei im Schlagschatten, so wird zunächst die Kugelhälfte mit Körperschatten vom Reflexlicht getroffen werden nach wie vor, also unverändert bleiben wie bei der beleuchteten Kugel. Die Schlagschattenfläche wird aber von den Reflexlichtstrahlen der oben für die Lichtkugel angegebenen Richtung nicht mehr erhellt werden können, also dunkler sein als der Körperschatten, und dies entspricht der Beobachtung. Doch wirkt immer auch noch auf den Schlagschatten dasjenige Reflexlicht, das die Wasserbläschen und Staubkörner der Atmosphäre seitlich zurückwerfen oder durch Brechung seitlich ablenken. Man kann sich dieses Licht als parallel zur Ebene des schattenabgrenzenden Grosskreises *g k* von allen Seiten gegen die Kugel strahlend vorstellen, natürlich äusserst schwach. Seine Wirkung muss wieder um so geringer sein, je schiefer es die Kugelfläche trifft. Im früheren hellsten Lichtpunkt *h* streift es die Fläche nur, also wird dieser Punkt als Schlagschattenpunkt *s* der dunkelste Punkt sein. Jeder Parallelkreis der früheren beleuchteten Kugelhälfte wird auch für den Schlagschatten eine Linie gleich heller Punkte sein und die Lichtstärke wird vom dunkelsten Schlagschattenpunkt *s* an mit jedem solchen Kreis ein wenig zunehmen, bis sie im Grosskreis *g k* dieselbe Stufe erreicht wie bei der beleuchteten Kugel. Hienach findet sich auf der im Schlagschatten befindlichen Kugel eine stetige Abnahme der Lichtstärke vom hellsten Reflexpunkt *r* bis zum dunkelsten Schlagschattenpunkt *s*; bei der beleuchteten Kugel erschien die Lichtstärke abnehmend und dann wieder wachsend.

Auch der dunkelste Schlagschattenpunkt *s* hat nicht die Lichtstärke Null; er ist noch immer von demjenigen Reflexlicht beleuchtet, das nach allen Seiten strahlt, und erreicht dadurch eine Lichtstufe, die zwar gegenüber den Lichtflächen verhältnismässig dunkel ist, aber als absoluter Wert der Lichtempfindung noch immer recht ansehnlich sein kann.

Es ist also dreierlei Reflexlicht zu Hilfe genommen, um die nun abgeleiteten Lichtstufen auf den Schattenflächen der Kugel zu begründen, erstens ein stärkstes Reflexlicht, dem direkten entgegengesetzt, das die Körperschattenfläche abstuft, zweitens ein mittleres, in der Richtung des schattenabgrenzenden Grosskreises von allen Seiten senkrecht zum direkten Licht wirkend, das Streiflicht erhellend und die Schlagschattenfläche abstufend, drittens ein schwächstes Reflexlicht, nach allen Richtungen gleichmässig wirkend und auch die dunkelste Schlagschattenfläche erhellend. Diese Annahmen über die Reflexwirkungen mögen vielleicht ungenügend begründet und willkürlich erscheinen; aber es ist für den vorliegenden Zweck notwendig, an die Stelle der zahllosen Zufälligkeiten der Wirklichkeit etwas Unveränderliches zu setzen, dessen Ergebnis wenigstens vielen Fällen der Wirklichkeit nahe kommt und eine Schattierung mit guter Anschauung der Formen liefert. Dieses Ergebnis muss die Annahme rechtfertigen.

Die vier Hauptlichtstufen. 85.

Wie gross man die Unterschiede zwischen den vier Hauptlichtstufen *h* (hellster Punkt im Licht), *k* (Körperschattengrenzlicht), *r* (hellster Reflexpunkt) und *s* (dunkelster Schlagschattenpunkt) und im Zusammenhang damit diejenigen zwischen je zwei Parallelkreisen halten soll, kann nicht durch allgemeingültige Verhältniszahlen festgesetzt werden, sondern muss der Beobachtung und dem Gefühl überlassen bleiben.

Die Beobachtung ergiebt, dass diese vier Werte mit sehr weiten Grenzen für ihre Verhältnisse mit gleichem

Recht gewählt werden können. Einerseits hängen sie als absolute Werte und in ihren gegenseitigen Verhältnissen von der jeweiligen Stärke des Sonnenlichtes ab, andererseits von der Körperfarbe und dem Grad der Durchstrahlbarkeit der Stoffe, aus welchen die Körper bestehen.

Bei grellem Licht ist der Gegensatz von Licht und Schatten sehr gross und die Abstufung sowohl innerhalb der beleuchteten als der im Schatten befindlichen Flächen (wenn zufällige Reflexlichtquellen ferngehalten werden) nur wenig fühlbar. Die Lichtstärke der direkt beleuchteten Flächen scheint bis nahe zur Körperschattengrenze fast durchaus dieselbe zu sein, dann mit schmaler Abstufungszone fast sprungweise in das sehr dunkle Streiflicht überzugehen und von diesem aus gegen den hellsten Reflexpunkt nur wenig heller zu werden. Dies ist wohl dadurch zu erklären, dass auch bei der ausschliesslichen Sonnenbeleuchtung noch viele konvergierende sehr kräftige gebrochene Strahlen die parallelen durchkreuzen, dass ferner bei grellem Licht die Stärke der Lichtempfindung nicht proportional der Lichtstärke zunimmt, sondern schwächer, wonach die Unterschiede greller Lichtstufen von einer gewissen Grenze an nicht mehr erkannt werden. Eine von der Sonne beleuchtete Kugel aus hellem Material widerspricht hienach, wenn auch nur scheinbar, allem früher für die Lichtstufen Abgeleiteten; sie macht aber auch, genau nachschattiert oder photographiert, weit weniger den Eindruck einer Kugel und lässt das Gesetz der Kugelgestalt, das unveränderliche Krümmungsmass, weit weniger fühlen als eine mässig beleuchtete. Wenn in einer solchen Darstellung der Umriss verdeckt wird, erkennt man die Kugelfläche nicht mehr als solche. Als ein hieher gehöriger Beleg ist auch die Mondkugel zu nennen, welche aus Mangel an Lichtabstufungen den Eindruck einer ebenen Scheibe giebt. Für das eingehende Schattieren der technischen Gebilde ist also das Streben nach der Nachbildung der bei Sonnenbeleuchtung erscheinenden Lichtstufen nur nachteilig, und es empfiehlt sich weit mehr, eine mässige Lichtstärke der Parallelbeleuchtung vorauszusetzen, welche weniger starke Unterschiede von Licht und Schatten darbietet, dafür aber die Abstufungen zwischen beiden möglichst voll zur Geltung gelangen lässt; aus diesen heraus wird die Krümmung der Fläche am deutlichsten gefühlt.

Die Körperfarbe ist nicht nur von Einfluss auf die absoluten Werte der vier Lichtstärken, die selbstverständlich bei heller Körperfarbe grösser sind als bei dunkler, sondern auch auf ihre Verhältnisse, indem dunkle Körperfarbe die Schattentöne einander stärker nähert, als das Licht dem Schatten und dadurch die Abstufungen der Schattentöne stärker beeinträchtigt als die der Lichtflächen. Hiedurch wird die Schattierung dunkelfarbiger Körper in zwei Richtungen abgeschwächt. Rote, gelbe, grüne, blaue Färbungen der Körperfläche scheinen die Verhältnisse der vier Lichtstärken in verschiedener Weise zu beeinflussen.

In hohem Grad richten sich die vier Lichtstärken mit ihren Verhältnissen und Zwischenstufen nach dem Grad der Durchstrahlbarkeit der Stoffe, aus welchen die Körper bestehen. Es sind zwar oben „nicht erheblich durchscheinende“ Stoffe vorausgesetzt worden, aber in einem bestimmten Grad, bis zu einer bestimmten Dicke, sind alle Stoffe durchstrahlbar für das Licht, selbst die Metalle, und die meisten in solchem Grad, dass ihre Schattierung dadurch beeinflusst wird. Vergleicht man z. B. ein Gebilde kleinerer Dimensionen aus weissem Marmor mit einem gleichgeformten aus trockenem Gips, so findet sich bei jenem wegen des stärkeren Durchscheinens ein geringerer Unterschied von Licht und Schatten als beim Gips; das Licht ist milder, der Schatten weniger kräftig, insbesondere aber das Reflexlicht weniger fühlbar, daher die ganze Schattierung ruhiger, weicher, edler als beim Gipsmodell. Auf Gebilden aus dem noch stärker durchscheinenden Alabaster giebt es kein kräftiges Licht und keinen kräftigen Schatten mehr; nur wenig Licht wird von der Oberfläche zurückgeworfen; weit mehr wird vom Innern verschluckt und erhellt von innen heraus die Schatten, ihnen jede Kraft und Bestimmtheit raubend.

Gegenüber dieser dreifachen Veränderlichkeit der Bedingungen für die in der Wirklichkeit erscheinenden vier Hauptlichtstärken der Schattierungen dürfte innerhalb bestimmter Grenzen jede dem Gefühl nach getroffene Wahl derselben in den Schattierungen technischer Gebilde gerechtfertigt sein, wenn auch nicht alle Annahmen gleich günstig für die Formendeutlichkeit sind. Nach Wahl der vier Lichtstärken wären die Zwischenstufen so einzuschalten, dass überall stetige Zu- und Abnahme besteht und die Lichtstärken der Parallelkreise zwischen je zweien der angenommenen Grenzwerte gleiche Unterschiede aufweisen, somit eine arithmetische Reihe bilden.

Um die praktische Verwertung der abgeleiteten Lichtstufen zu zeigen, müssen nun aber doch, alle Freiheit für den einzelnen Fall vorbehalten, bestimmte Annahmen für die vier Werte getroffen werden, worüber auf Art. 115 zu verweisen ist.

Abweichende Annahme der Reflexrichtung für Gebilde auf ebener Wand. 86.

Was über die einzuführende Richtung des Reflexlichtes gesagt wurde, erleidet eine Aenderung, wenn es sich um die Schattierung nahezu ebener Gebilde, z. B. von Reliefdarstellungen oder ganzen Fassaden handelt. Es würde ja hier das Reflexlicht mit der angegebenen Richtung die Ebene von der Rückseite her, also ihre Vorderseite gar nicht treffen, somit ohne Einfluss auf die Schattierung sein. Daher denkt man sich bei Schattierung derartiger Gebilde den Reflexlichtstrahl zwar auch unter 45^0 in beiden Projektionen und im Aufriss auch entgegengesetzt der Projektion des direkten Lichtstrahls, im Grundriss aber senkrecht zu derselben. Dieses Reflexlicht wirkt also gegen die Vertikalebene von rechts unten nach links oben. Sogar leichte Schlagschatten innerhalb der Fläche des vom direkten Licht erzeugten Schlagschattens, sogenannte „Gegenschatten“, werden als von diesem Reflexlicht hervorgerufen häufig eingeführt und sind für Darstellungen in grösserem Massstab meist von günstiger Wirkung. Die erste Figur auf der dritten

Lichtdrucktafel (Partie vom Palast Strozzi in Florenz) bietet ein Beispiel für die beschriebene Reflexrichtung und solche „Gegenschatten“, ebenso das Gebälk der dorischen Säulenordnung aus der Renaissance auf der vierten Lichtdrucktafel. Die unter dem Gebälk stehende Säule ist als Drehungsfläche mit den zuerst genannten, für die Kugel eingeführten Reflexlichtwirkungen schattiert, so dass in diesem Beispiel vier Reflexlichtwirkungen unterschieden werden können und streng genommen ein unschädlicher Widerspruch zwischen der Schattierung von Gebälk und Säule besteht.

Noch andere Annahmen über die Richtung des Reflexlichtes gegenüber dem direkten Licht sind nicht ausgeschlossen und werden besonders in Deutschland beim Schattieren von architektonischen Aufrissen und Perspektiven häufig getroffen, wogegen sich die französischen Darstellungen strenger an die zuvor beschriebenen zu binden pflegen. Zuweilen wird im Schlag- und Körperschatten weiter schattiert, als ob das Reflexlicht mit dem direkten annähernd gleichgerichtet und nur weit schwächer, zuweilen auch, als ob es gar nicht da wäre, und für kleineren Massstab ist diese letzte Annahme die dankbarste. Die Erfahrung und die Beobachtung der Photographie kann lehren, dass fast alle Annahmen, wenn nur einheitlich durchgeführt, eine gute Modellierung der Gebilde erzielen können. Die Anpassungsfähigkeit des Formenvorstellungsvermögens an die Schattierung geht sehr weit.

87. Zusammenstellung aller Lichtstufen.

Die Kugel mit Licht- und Schlagschattenpartien bietet alle überhaupt vorkommenden Neigungen einer Fläche gegen den Lichtstrahl und damit alle vorkommenden Stufen von Licht und Dunkel. Man benützt sie deshalb als „Lichtmassstab“, als Hilfsmittel zum Ausdruck für bestimmte Lichtstufen, indem man den Durchmesser parallel zum Lichtstrahl in 8 oder 12 gleiche Teile teilt; die Parallelkreise, die diesen Punkten entsprechen, bilden mit dem schattenabgrenzenden Grosskreis und den drei Einzelpunkten h, r und s die Stufen der Flächenbeleuchtung. Bei Teilung in 8 Teile erscheinen 13 Lichtstufen. Doch ist es zweckmässig, bei dieser Teilung nicht stehen zu bleiben, sondern den äussersten Teil vom hellsten Punkt, beziehungsweise Reflexpunkt her noch einmal im Verhältnis 3 : 7 einzuteilen und damit zwei weitere Lichtstufenlinien einzuführen. Die Zahl der Lichtstufen kommt hiedurch auf 16, die mit Unterscheidung durch verschiedene Vorzeichen für Licht und Schlagschatten einerseits und Körperschatten andererseits in folgender Weise bezeichnet werden.

+ 0 im Licht (hellster Punkt)	+ 0 im Schlagschatten (dunkelster Punkt)
+ 0,3 „ „	+ 0,3 „ „
+ 1 „ „	+ 1 „ „
+ 2 „ „	+ 2 „ „
+ 3 „ „	+ 3 „ „

± 4 (Körperschattengrenze)
— 3 im Reflex- oder Körperschatten
— 2 „ „ „ „
— 1 „ „ „ „
— 0,3 „ „ „ „
— 0 (hellster Punkt im Körperschatten oder Reflexpunkt).

Würde man bei der Achtteilung stehen bleiben, so würde die Fläche mit vollem Licht erfahrungsgemäss viel zu gross, der Uebergang von + 0 zu + 1 zu hart und die Gesetzmässigkeit der Krümmung der Fläche nahe dem hellsten Punkt durch eine grosse ebene Platte empfindlich gestört erscheinen. Bisher wurde, um diesem Uebelstand abzuhelfen, zuweilen ein Parallelkreis + $^1/_2$ eingeführt; doch bleibt auch hiebei (ursprüngliche Achtteilung des Durchmessers vorausgesetzt) die Fläche hellsten Lichtes noch zu gross; insbesondere aber hat diese Halbierung des äussersten Teils den Mangel, dass der Abstand von + 1 bis + $^1/_2$ als zu klein und derjenige von + $^1/_2$ bis + 0 als zu gross die Aufeinanderfolge der Abstände der Lichtstufenlinien unstetig und willkürlich erscheinen lassen, wogegen bei der hier gewählten Einführung von + 0,3 die Fläche hellsten Lichtes auf ein günstiges Mass gebracht und die Aufeinanderfolge der Kreise auf der Kugel in deren Darstellung für die eingebürgerte Lichtrichtung gesetzmässig und gefällig wird, wie Figur 88b beweisen kann. Diese schönere Lage der Lichtstufenlinien kommt nicht nur der Kugel selber zu gut, sondern auch der Darstellung aller andern Körper mit gekrümmter Oberfläche, für deren Schattierung die „Normalkugel“ in später zu erklärender Weise verwertet wird.

Wenn je eine Kugel oder ein nach ihr zu schattierender anderer Körper in so grossem Massstab gezeichnet ist, dass die Streifen zwischen den Lichtstufenlinien mit der Achtteilung zu breit und die Uebergänge zu hart würden, so ist es nicht schwer, durch Schätzung oder genaue Konstruktion noch Zwischenlinien von + 0,6 (nicht 0,65), + 1,5 + 2,5 + 3,5 — 3,5 u. s. f. einzuschalten. Vgl. z. B. Figur 103b.

Bei einer Einteilung des Durchmessers in zwölf Teile anstatt in acht würden anstatt der 13 Lichtstufen der unergänzten Achtteilung deren 19, und anstatt der 16 Lichtstufen der durch + 0,3 ergänzten Achtteilung deren 22 erscheinen; bei Einteilung in zwanzig Teile sogar 31. Für die praktische Verwertung des Verfahrens, das im folgenden zu erklären ist, dürfte es sich empfehlen, die Zahl der durch graphische Konstruktion zu bestimmenden Linien möglichst einzuschränken; auch schon bei wenigen solchen ist die Arbeit noch immer gross genug, und bei Bedarf an weiteren im eben berührten Fall reicht deren Einschaltung nach Schätzung auch strengen Anforderungen gegenüber meist vollkommen aus.

Darstellung der Normalkugel mit der eingebürgerten Lichtrichtung. 88.

Die erste Darstellung der Normalkugel (Figur 82), ein Grundriss derselben in einem Grundebenensystem, in welchem der Lichtstrahl als eine horizontale Linie gedacht ist, hat sich so einfach gestaltet, weil die Kugel projiziert wurde auf eine zum Lichtstrahl parallele Ebene. Anders gestaltet sich das Bild der Kugel im ursprünglichen Grundebenensystem, in welchem die beiden Lichtstrahlprojektionen einen Winkel von 45 ° mit dem Grundschnitt bilden; die Projektionen der Parallelkreise werden hier Ellipsen sein, und zwar finden sie sich auf folgendem Weg:

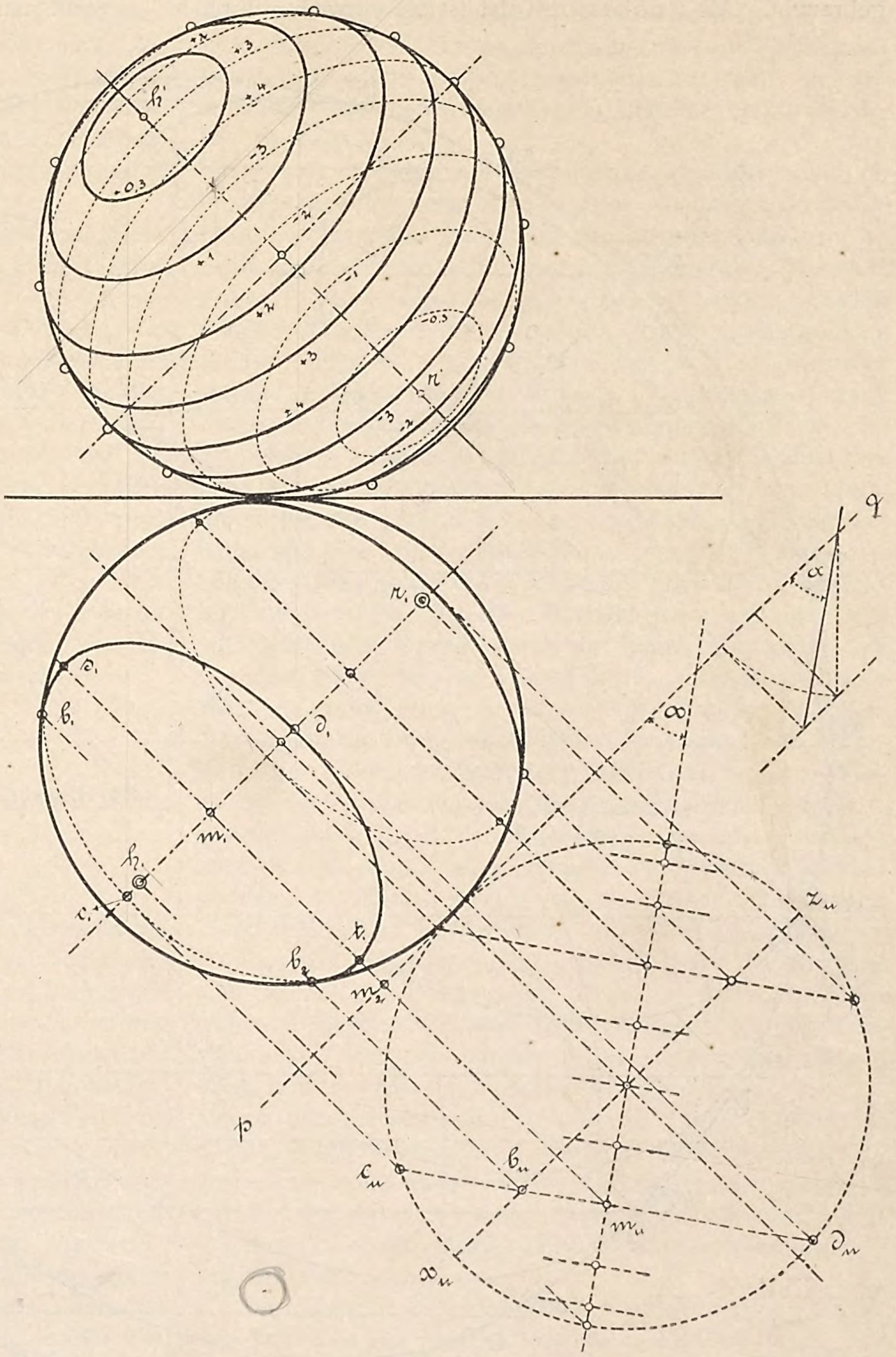
Man denkt sich die Kugel nach den beiden in Fig. 88a gezeichneten Projektionen auf der Horizontalebene liegend und samt ihren Lichtstufenlinien auf die horizontalprojizierende Ebene des Lichtstrahls $p\,q$ projiziert, dann diese Ebene in die Horizontalebene umgeklappt. Der Lichtstrahl durch den Kugelmittelpunkt projiziert sich auf die Vertikalebene $p\,q$ als eine Gerade, die mit ihrer Horizontalprojektion den aus Art. 38 bekannten Winkel $\alpha = 35^0\ 15{,}9'$ einschliesst; in der Umklappung wird also der Durchmesserlichtstrahl diesen Winkel mit der Umklappungsbasis $p\ q$ einschliessen. Die Lichtstufenkreise der Kugel erscheinen in der Projektion auf der Vertikalebene $p\,q$ als gerade Linien senkrecht zum Durchmesserlichtstrahl; so erscheinen sie also auch in der Umklappung.

Denkt man sich nun einen der Lichtstufenkreise der Kugel aus Figur 82, z. B. $c\,d$, auf die horizontale Grundebene projiziert, so wird sich in der umgeklappten Ebene $p\,q$ dessen Mittelpunkt m_u nach m_2 projizieren, also im Raum der Mittelpunkt m selbst nach m_1 projizieren, wobei $m_u\,m_1$ senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist. Der Kreis selbst wird sich als Ellipse projizieren, deren grosse Achse $s_1\,t_1$ durch m_1 geht, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion steht und gleich dem Kreisdurchmesser $c\,d$ oder $c_u\,d_u$ ist; denn der horizontale Durchmesser des Raumkreises $c\,d$ ist senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet und projiziert sich auf die Horizontalebene in wahrer Grösse. Der tiefste Punkt c und der höchste Punkt d des Raumkreises $c\,d$ werden sich nach c_1 und d_1 projizieren, wobei $c_u\,c_1$ und $d_u\,d_1$ senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet sind und $c_1\,d_1$ die kleine Achse der Ellipse darstellt.

In derselben Weise werden alle anderen Lichtstufenkreise der Kugel in deren Grundriss übertragen werden können und als Ellipsen erscheinen.

Für die später zu betrachtende Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer gekrümmter Flächen ist es zweckmässig, sich die Punkte $b_1\,b_2$ u. s. w. zu verschaffen, in welchen die elliptischen Lichtstufenlinien des Kugelbildes dessen Umriss berühren. Der Umrisskreis der Horizontalprojektion der Kugel erscheint in der Umklappung als Linie $x_u\,z_u$ parallel $p\,q$, somit die zwei Schnittpunkte des Lichtstufenkreises $c\,d$ mit dem Umrisskreis in b_u; das Zurückklappen von b_u auf den Umrisskreis im Grundriss liefert dort die Berührungspunkte b_1 und b_2.

Das ganze Verfahren hätte sich auch in der Vertikalprojektion der Kugel mit Umklappen um die Vertikalprojektion des Lichtstrahls durchführen lassen und es wäre dann die Figur samt allen Hilfslinien völlig kongruent der nun erhaltenen geworden, nur mit symmetrischer Lage zur Horizontalrichtung. Die Vertikalprojektion der Normalkugel bietet also in Beziehung zur Vertikalprojektion des Lichtstrahls genau dasselbe Bild, das im Grundriss der Kugel gegenüber dem Grundriss des Lichtstrahls erschien. Es folgt daraus, dass man nur eine Projektion der Normalkugel zu zeichnen nötig hat und diese bald als Grundriss, bald als Aufriss betrachten kann.

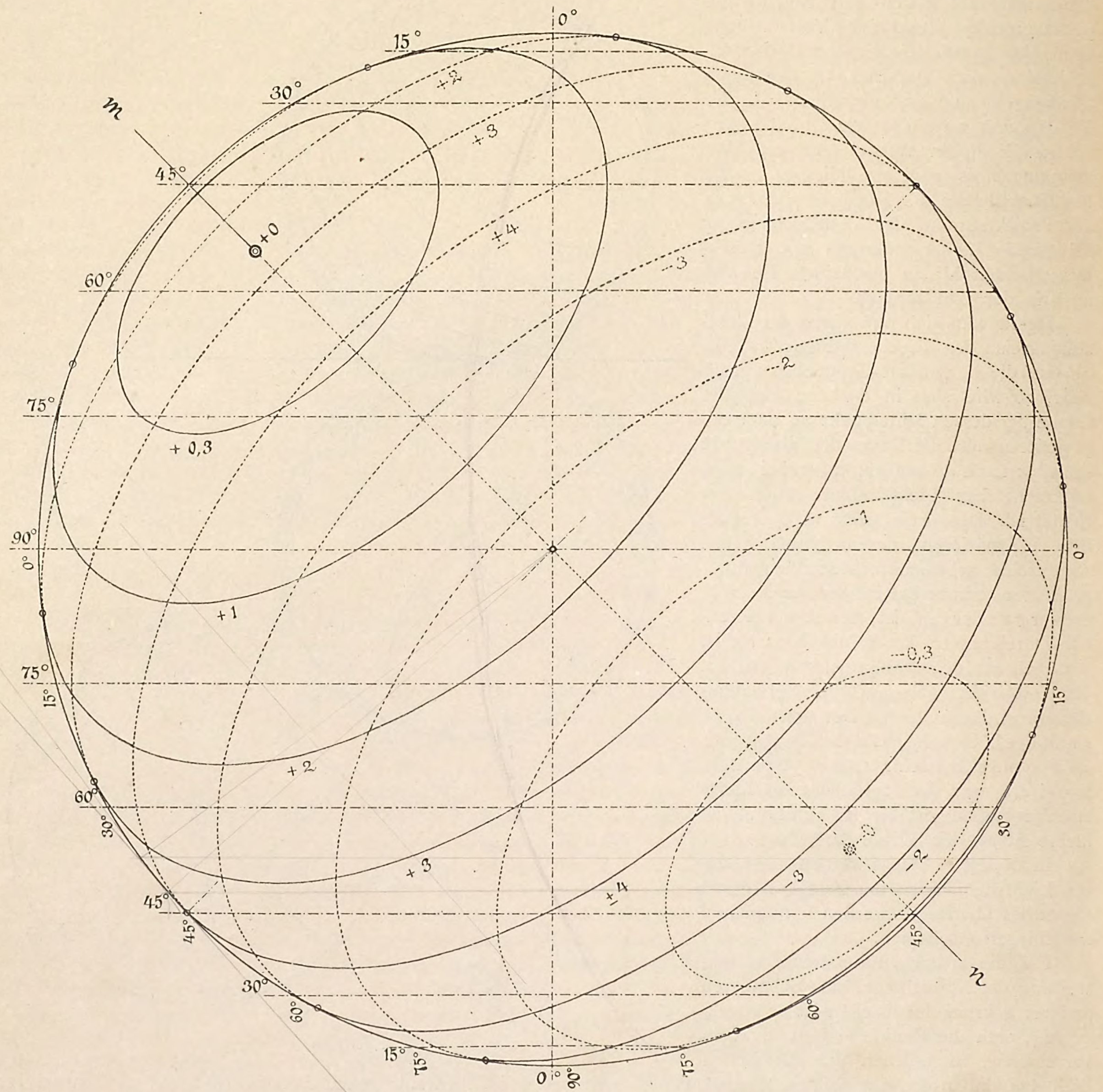


Figur 88 a.

Figur 88a bietet die Normalkugelprojektion im Aufriss in kleinerem, Figur 88b in möglichst grossem Massstab. Für beide Auffassungen ist die Richtung $m\,n$ oder die Richtung der kleinen Ellipsenachsen als Lichtstrahlprojektion festzuhalten. Soll also die Figur als Grundriss

aufgefasst werden, so ist sie so zu legen, dass der hellste Punkt + 0 links unten zu liegen kommt; bei Auffassung als Aufriss muss dieser Punkt links oben stehen.

Eine Seitenprojektion der Normalkugel wird selten gebraucht. Als Rechtsansicht ist sie entweder durch Vertauschen der ausgezogenen und punktierten Linien des Aufrissbildes oder durch dessen Drehen um 180° erhältlich, so dass der frühere hellste Lichtpunkt rechts unten erscheint; im letzten Fall sind die Vorzeichen der Lichtstufenlinien zu vertauschen. Der neue hellste Punkt + 0 und die Linie + 0,3 werden unsichtbar und dafür der hellste Reflexpunkt — 0 und die Linie — 0,3 sichtbar.



Figur 88 b.

Als Linksansicht erhält man die Seitenprojektion der Normalkugel durch Drehung ihres Aufrissbildes um 90° in der Weise, dass der hellste Punkt + 0 nach rechts oben rückt; die Vorzeichen bleiben dabei unverändert.

Stellt man sich die Frage, wie sich die hohle Halbkugel schattiert, die in die Vertikal- oder Horizontalebene vertieft ist, so ergiebt sich die Antwort aus folgender Betrachtung. Jedes überhaupt beleuchtete Element der Hohlkugelfläche ist ebenso beleuchtet wie das ihm diametral entgegengesetzte im Aeussern der Vollkugel, weil die Richtung der tangierenden Ebene für beide Elemente dieselbe ist. Daraus folgt, dass auf der hohlen Halbkugel

der frühere Reflexpunkt *r* der hellste Punkt sein wird und dass die Parallelkreise gleicher Lichtstärke von diesem aus genau mit derselben Grösse und Entfernung und Lichtstärke auftreten wie früher auf der vollen Kugel vom hellsten Punkt *h* aus. Weil nun die Licht- und Schattenkreise symmetrisch liegen, so heisst das einfach: „Die Linien gleicher Lichtstärke für die Darstellung der halben Hohlkugel sind die auf der Darstellung der konvexen Normalkugel punktiert gezeichneten Ellipsen und Ellipsenteile unter Umkehrung der Vorzeichen plus und minus in ihrer Benennung."

Die erste Lichtdrucktafel bietet in der mittleren Figur der oberen Reihe die konvexe Normalkugel mit ihren Lichtstufen als Aufrissbild, und zwar unter der Voraussetzung, dass ein Schlagschatten auf die Kugel falle, der ebenfalls alle sichtbaren Lichtstufenkreise umfasst. Es sind somit in dieser Darstellung alle Lichtstufen vereinigt mit Ausnahme von — 0, dessen Fläche in Vorder- und Oberansichten nie sichtbar wird, indem immer nur ein sehr schmaler Streifen von — 0,7 das Endglied der Lichtstufenreihe im Reflex bilden kann. Nur Seitenprojektionen als Rechtsansichten und Grundrisse als Unteransichten können diese Lichtstufe mit sich bringen.

Die hohle Halbkugel ist schattiert auf der zweiten Lichtdrucktafel, und zwar erscheint sie unter dem geschweiften Gesims als Ausfüllung der Friesfläche.

XII. Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

89. Die Normalkugel als Lichtstufenmassstab.

Wenn im früheren gesagt wurde, die Normalkugel sei ein „Lichtstufenmassstab", so soll das nicht nur ausdrücken, dass alle Lichtstufen auf ihr verwirklicht sind, sondern auch, dass mit ihrer Hilfe die Lichtstufen anderer Körper gemessen werden können Wie beim Anhalten des Längenmassstabes an eine Strecke ein Längenmass, so kann beim Anhalten der Normalkugel an einen Flächenpunkt die Lichtstufe dieses Punktes abgelesen werden. Wenn etwa an eine Seitenfläche eines regelmässigen Dodekaeders oder an das Innere einer ellipsoidischen Schale eine als Raumform ausgeführte Kugel mit Lichtstufenkreisen angelegt wird, so giebt der Berührungspunkt beider Körper die Lichtstufe der Seitenfläche oder des Punktes für eine Lichtrichtung, welche durch den Durchmesser der Kugel von + 0 nach — 0 ausgedrückt ist. Es ist nur das Vorzeichen der Lichtstufe umzukehren, weil eigentlich die Hohlkugel angehalten wird.

Die Verwertung dieser Thatsache für das Schattieren gezeichneter Körper mit Hilfe der gezeichneten Normalkugel geht von ihrer Begründung aus. Raumkugelpunkt und Raumflächenpunkt sind gleich hell, weil die Berührungsebenen der Kugel und der andern Fläche in diesem Punkt parallel sind. Ein durch die Zeichnung gegebener Flächenpunkt wird mit einem durch die Zeichnung gegebenen Normalkugelpunkt gleich hell sein, wenn die Berührungsebenen in beiden Punkten gleich gerichtet sind. Dies ist der Grundgedanke der Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

Wenn die Frage gestellt ist: „Welche Lichtstufe hat ein gegebener Punkt einer Fläche?" so ist in diesem Punkt eine Berührungsebene an die Fläche und an die Normalkugel eine parallele Berührungsebene zu legen; der Berührungspunkt dieser letzten hat dieselbe Lichtstufe wie der gegebene Punkt.

Damit ist nun das Beleuchtungsproblem wohl für einen ebenbegrenzten Körper, bei welchem ein Punkt für die Beleuchtung seiner ganzen Ebene massgebend ist, noch nicht aber für gekrümmte Flächen gelöst. Was wäre erreicht, wenn auf einer solchen Fläche noch so viele Punkte mit allerlei durch unganze Zahlen ausgedrückten Lichtstufen, z. B. + 3,25 + 0,62 — 2,85 u. s. w., gefunden wären? Offenbar könnte damit die Fläche noch nicht mit zusammenhängenden und sich abstufenden Maltönen oder Strichlagen schattiert werden. Es bedarf vielmehr auf allen andern gekrümmten Flächen ähnlicher Lichtstufenlinien für die Punkte mit ganzen Zahlen, wie sie auf der Kugel durch die 9 Parallelkreise dargestellt sind; erst mit der Bestimmung dieser Lichtstufenlinien ist das Beleuchtungsproblem für eine Fläche gelöst, und mit Hilfe jener zufälligen Punkte wären die Linien nur durch eine unsichere Schätzung zu erhalten. Es wird also für jede Flächengattung eines bestimmten Verfahrens bedürfen, auf geeigneten Linien der Fläche die Punkte mit ganzzahligen Beleuchtungsstufen aufzufinden. Wenn hienach eine Gruppe zusammengehöriger ganzzahliger Lichtstufenpunkte, z. B. + 3, auf der Fläche vorhanden ist und diese Punkte durch eine stetige Kurve zusammengefasst werden, so bildet diese eine „Linie gleicher Helle" oder „Lichtstufenlinie" + 3, wie sie auf der Kugel durch den Parallelkreis + 3 dargeboten ist, und nach Beschaffung aller solcher Kurven wird die Fläche in ähnlicher Weise durch sie gegliedert wie die Normalkugel durch die 9 Parallelkreise. Bei den andern Flächen erscheinen jedoch diese Linien meist nicht mehr so einfach, sondern zuweilen mit barocken Windungen und sogar plötzlichen Richtungsänderungen auch bei stetigen Umrissen der Körper. Man nennt diese Linien anderwärts auch „Hellenlinien" oder mit gelehrterem Ausdruck „Isophoten"; hier soll der Ausdruck „Lichtstufenlinien" ausschliesslich gebraucht werden.

Im folgenden ist zunächst die Verwertung der Normalkugel für eben begrenzte Körper, dann die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf allen der praktischen Verwendung näherliegenden gekrümmten Flächen gezeigt und zum Schluss das Beleuchtungsproblem allgemein, für alle Arten von Flächen behandelt. Doch bedarf es zuvor noch einer nicht unwichtigen Betrachtung.

Lichtstufen am Aeussern und im Innern hohlgedachter Körper. 90.

Zu der Berührungsebene in einem bestimmten Punkt einer gekrümmten Fläche lassen sich immer zwei parallele Berührungsebenen an die Normalkugel legen. Man

erhält also eigentlich zwei Lichtstufen für den Punkt, die auf demselben Durchmesser der Normalkugel liegen, also durch gleiche Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt sind. In der That hat jeder Flächenpunkt zwei Lichtstufen, wenn die Fläche als papierdünne Schale gedacht wird, eine für die dem Licht zugewandte Seite und eine für die Rückseite. So ist im Innern eines regelmässigen Dodekaeders eine Fläche -3, wenn sie aussen $+3$ ist, und umgekehrt; nur ist sie als $+3$ im Innern Schlagschatten, nicht Licht. Nimmt man als Beispiel einer gekrümmten Fläche etwa den Mantel eines elliptischen einmanteligen Hyperboloids, wie es in Figur 103b dargestellt ist, so muss zuvor ausgesprochen werden, ob die Lichtstufen für das Aeussere des Mantels oder für das Innere anzugeben sind. Die Lichtstufenlinien sind zwar durchaus dieselben für innen und aussen, aber im Innern ist -3, was im Aeussern $+3$, und umgekehrt; auch kann im Innern ein Schlagschatten neben dem Licht vorhanden sein, wo am Aeussern eine Körperschattenfläche ununterbrochen sich ausdehnt, also die Schlagschattengrenze keine Bedeutung hat, und umgekehrt. In manchen Fällen bedarf es wohl der Aufmerksamkeit und Ueberlegung, ob die Berührungsebene an der Lichtseite der Kugel oder diejenige an der Schattenseite für die Lichtstufe eines Flächenpunktes massgebend ist; aber im allgemeinen ist die Entscheidung nicht schwer und unmittelbar mit Hilfe der Anschauung zu treffen. Ein Hilfsmittel in zweifelhaften Fällen ist das Schneiden der Ebene oder gekrümmten Fläche oder des Körpers durch die vertikale Ebene eines beliebigen Lichtstrahls; die entstehende Schnittlinie zeigt sofort, welche Seite der Ebene oder welche Flächenteile dem Lichte zugewendet sind und welche nicht.

91. Körper mit ebenen Grenzflächen.

Die dem Schattieren ebenbegrenzter Körper zu Grunde liegende Aufgabe ist die Bestimmung der Lichtstufe einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur.

Das in Figur 91a durch seine beiden Projektionen dargestellte Fünfeck $ABCDE$ sei eine Seitenfläche irgend eines Polyeders. Es ist die Lichtstufe seiner Ebene zu bestimmen, das heisst, es ist derjenige Punkt der Normalkugel zu suchen, der dieselbe Lichtstufe darbietet, indem eine in diesem Punkt an die Normalkugel gelegte Berührungsebene mit der Ebene der gegebenen Figur gleichgerichtet ist.

Die Neigung einer solchen Berührungsebene ist dieselbe wie die der Tangente am vertikalstehenden Meridian durch den Berührungspunkt, und denkt man sich die Ebene mit gleichbleibender Neigung auf der Normalkugel gedreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen horizontalen Kreis, dessen Höhenlage sich bestimmt aus dem Berührungspunkt einer Tangente am Umriss des Kugelaufrissbildes, welche dieselbe Neigung hat wie die Ebene der gegebenen Figur. Die Gefällslinien aller Lagen der gedrehten Ebene bilden eine Kegelfläche, welche die Kugel längs des Kreises berührt und deren Spitze in der vertikalen Kugelachse liegt. Diejenige Mantellinie dieser Kegelfläche, welche der Gefällslinie der gegebenen Ebene parallel ist, geht durch den gesuchten Kugelpunkt. Es ist also diese Gefällslinie nach Neigung und Richtung aufzusuchen.

Man zieht in der Vertikalprojektion der gegebenen Figur eine beliebige Horizontale $x'y'$, lotet die Punkte $x'y'$ in den Grundriss nach x und y, fällt aus d eine Senkrechte auf xy und lotet deren Fusspunkt z wieder hinauf in den Aufriss; DZ ist eine Gefällslinie oder Linie der grössten Neigung in der Ebene der gegebenen Figur. Von d' fällt man noch das Lot $d'v'$ auf $x'y'$. Im Dreieck spq, das die Umklappung des Dreiecks DVZ darstellt, ist pq horizontal und $= dz$, sp vertikal und $= d'v'$; sq ist also die Umklappung der Gefällslinie in die Vertikalebene. Man zieht an den Aufriss der Normalkugel (Figur 91b rechts) eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq, zeichnet den Horizontalkreis $k'g'$ durch den Berührungspunkt g' und zieht aus f' eine Parallele $f'l'$ zu $d'z'$. Wo diese Parallele den Horizontalkreis $k'g'$ schneidet, liegt der gesuchte Kugelpunkt l', der mit der Ebene der gegebenen Figur gleiche Lichtstufe hat.

Im Grundplan der Normalkugel (Figur 91b links) würde der Lichtstufenpunkt unabhängig von jener Kegelfläche durch folgende Betrachtung gefunden. Man zeichnet als ersten geometrischen Ort des Punktes den Parallelkreis $k'g'$ im Grundriss als konzentrischen Kreis mit dem Radius $kg = k'g'$. Eine Horizontallinie durch den Berührungspunkt von Kugel und Ebene auf dieser letzten gezogen gedacht, ist Tangente an diesem Kreis. Für weitere Berührungsebenen mit gleicher Horizontalrichtung, aber anderen Neigungen, würden andere Parallelkreise erscheinen; doch wären die Richtungen der Tangenten an diesen Kreisen dieselben; die Berührungspunkte würden im Grundriss alle auf demselben Radius kn und im Raum auf einem vertikalen Grosskreis liegen, der sich in diesen Radius projiziert. Hienach ist für alle Ebenen gleicher Horizontalrichtung der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ein vertikaler Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Horizontalrichtung der Ebenen und der sich im Grundriss der Normalkugel als ein Radius senkrecht zu dieser Horizontalrichtung projiziert.

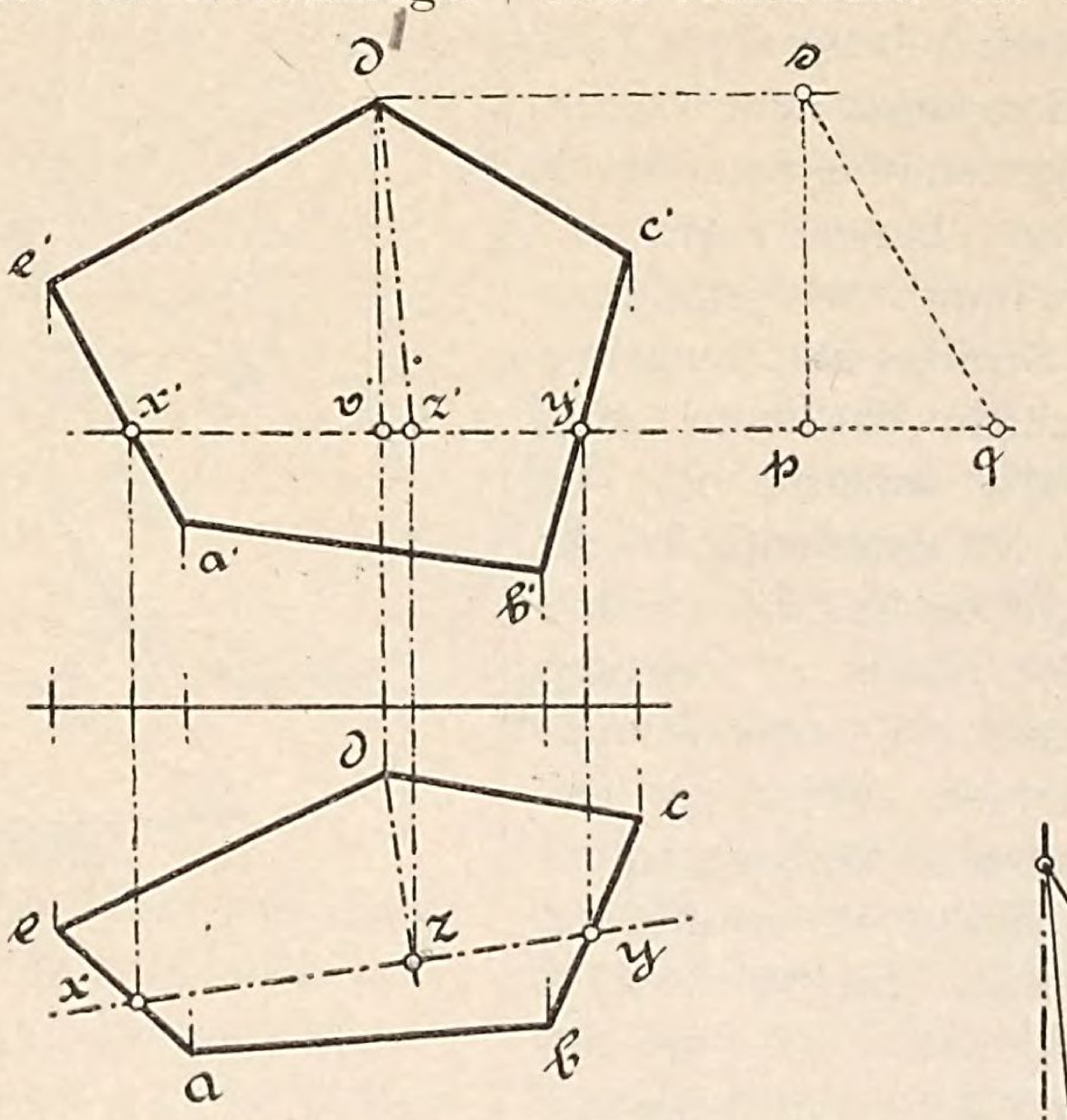
Die Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ist in der Linie xy schon vorhanden. Man hat also, um den Lichtstufenpunkt im Grundriss der Normalkugel zu erhalten, nur den Radius kn senkrecht zu xy oder parallel zu dz zu ziehen und auf diesem Radius $kl = k'g'$ aufzutragen; l ist der Lichtstufenpunkt im Grundriss. Um keinen Aufriss der Normalkugel beiziehen zu müssen, kann man sich den Radius $k'g'$ verschaffen, indem man für das Ziehen der Tangente $f'g'$ den Grundriss zeitweilig als Aufriss auffasst.

Fällt im Aufriss der Schnittpunkt f' von Tangente und Kugelachse über das Blatt hinaus, so benützt man die im Grundriss gezeigte Konstruktion, indem man den Horizontalkreis $k'g'$ in die Vertikalebene umklappt und in der Umklappung $k'i'$ parallel zu dz oder senkrecht zu xy zieht. Das Zurückklappen des Punktes i' durch $i'l'$ senkrecht zu $k'g'$ liefert dann den Punkt l' unabhängig von f'.

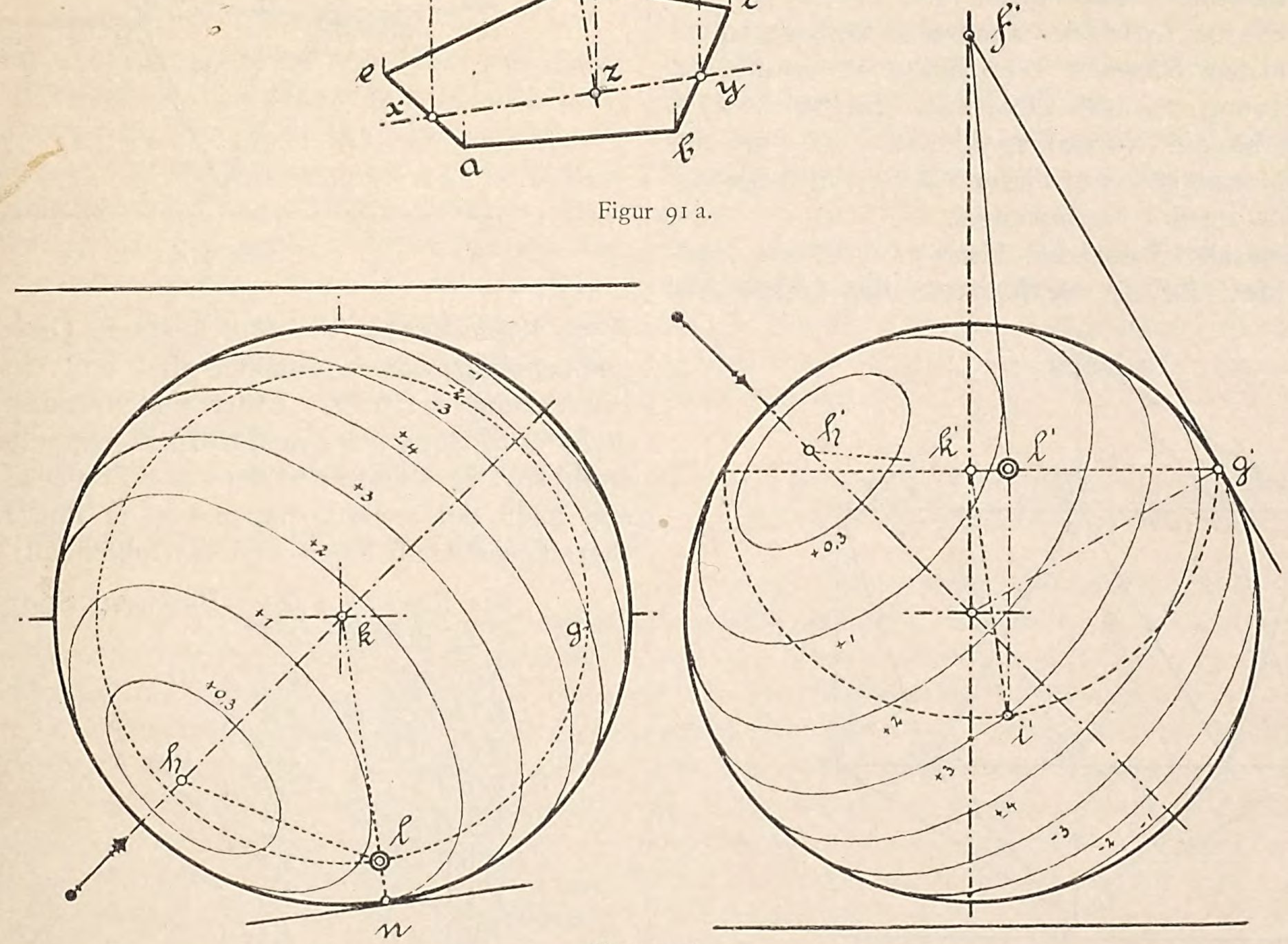
Die Thatsachen, durch deren Betrachtung der Punkt L sich gefunden hat, sind als wichtig für spätere Probleme

hervorzuheben und zusammenzufassen. Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, hat eine Horizontalrichtung, die als Richtung der Schnittlinie mit einer beliebigen horizontalen Ebene erhalten wird, und eine dazu senkrechte Richtung der Gefällslinie oder grössten Neigung, die im Grundriss senkrecht zu jener Richtungslinie erscheint (Art. 8e). Die Horizontalrichtung bestimmt als ersten geometrischen Ort des Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel einen Grosskreis, dessen vertikale Ebene senkrecht zu ihr gerichtet ist; sie bestimmt — um die Ortsbezeichnung auf der Erdkugel zu gebrauchen — die geographische Länge des Lichtstufenpunktes der Ebene. Die Gefällslinie bestimmt durch ihre Neigung als zweiten geometrischen Ort einen horizontalen Parallelkreis, an welchem jeder vertikale Grosskreis oder Meridian dieselbe Neigung hat wie die Gefällslinie; sie bestimmt hienach die geographische Breite oder den Polabstand des Lichtstufenpunktes.

Ist eine Ebene durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade gegeben, so bestimmt man die Horizontalrichtung ebenfalls als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden mit einer beliebigen horizontalen Schnittebene, und die Gefällslinie durch ihre im Grundriss zur Richtungslinie senkrechte Horizontalprojektion. Die Horizontalneigung der Gefällslinie findet sich wieder durch Umklappen oder getrenntes Heraustragen ihrer horizontalprojizierenden Ebene.



Figur 91 a.



Figur 91 b.

Ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, so giebt die Horizontalspur die Horizontalrichtung unmittelbar; die Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur.

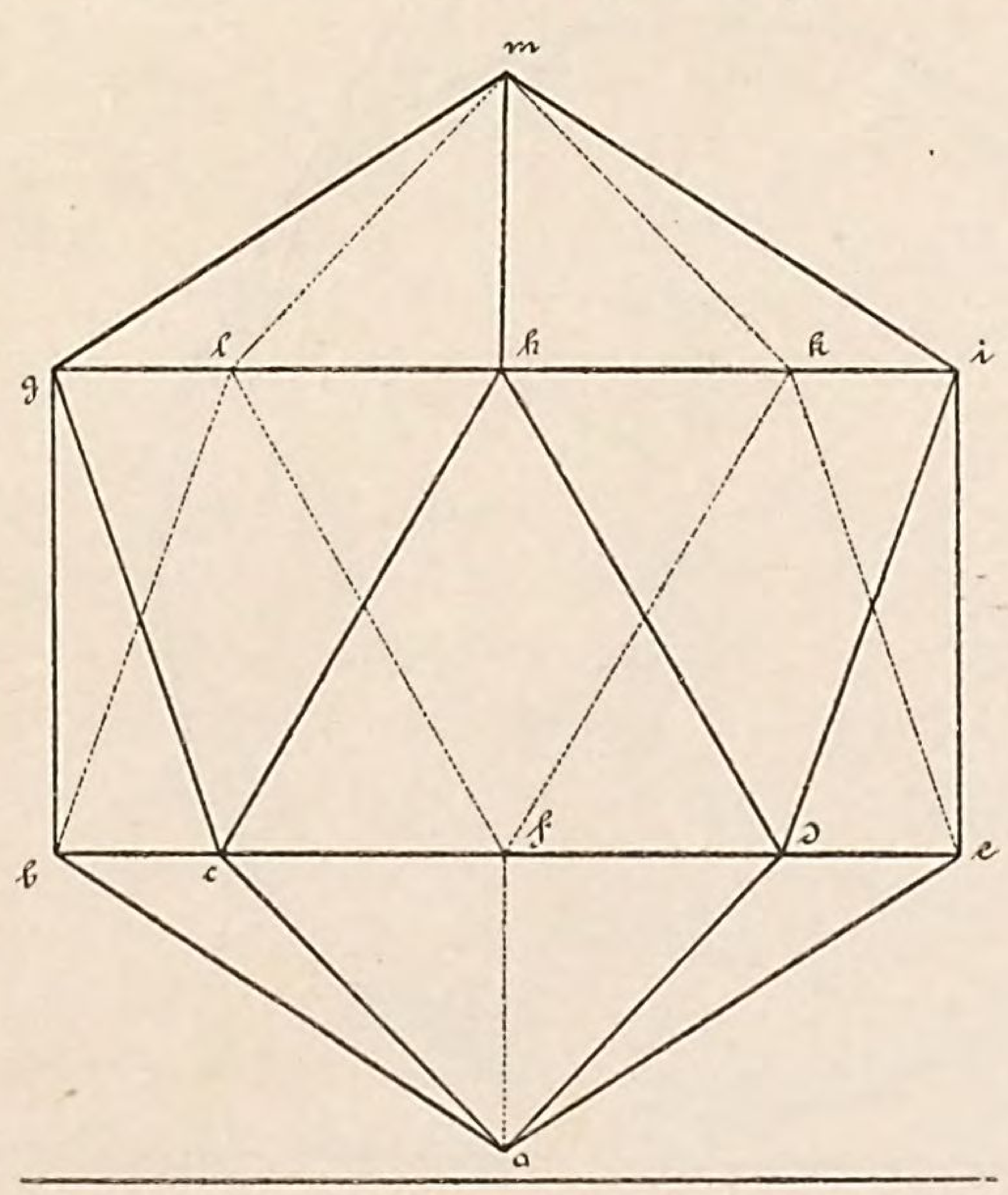
Ist eine Ebene durch ihre Horizontalrichtung H und eine beliebige ihr zugehörige unter dem Winkel β geneigte Gerade N gegeben, so kann der Lichtstufenpunkt auch ohne Aufsuchen der Gefällslinie gefunden werden. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, welche parallel zu der geneigten Geraden N an die Normalkugel gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene normal zu N steht; er projiziert sich im Grundriss der Normalkugel als eine Ellipse, deren grosse Achse senkrecht zur Horizontalprojektion von N gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal $\sin \beta$. Der Schnittpunkt dieser Ellipse mit dem aus der Horizontalrichtung H erhaltenen Radius ist der Lichtstufenpunkt für die gegebene Ebene.

Die Zahlenbenennung des für eine Ebene gefundenen Berührungspunktes L auf der Normalkugel findet sich meist schon durch Schätzung für das praktische Schattieren genügend, indem man sich die Lichtstufenellipse durch den Punkt gezogen denkt und ihre Abstände von den Nachbarellipsen abwägt. Zu einer genauen Benennung führt jedoch diese Schätzung nicht; sie kann um so stärker irre leiten, je näher der Berührungspunkt den Punkten $+ o$

und — *o* gelegen ist. Schärfere Bestimmung ist dadurch erreichbar, dass man die Verbindungslinie des Lichtstufenpunktes mit dem hellsten Punkt in beiden Projektionen zeichnet und durch Umklappung einer projizierenden Ebene dieser Linie deren wahre Grösse bestimmt. Diese wahre Grösse in ein nach Figur 82 gezeichnetes Normalkugelbild vom hellsten Punkt aus als Sehne eingetragen und auf den Lichtstrahldurchmesser projiziert, liefert in ihrem inneren Endpunkt die genaue Lichtstufenzahl. Denn diese Zahl verhält sich zu vier, wie die Projektionslänge zum Radius.

Die Anwendung der Lichtstufenbestimmung einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur auf ganze Körper ist nur die Wiederholung des Verfahrens für jede einzelne Grenzebene. Die Schlagschattenumrisse auf denjenigen Grenzebenen, die solche darbieten, sind unabhängig hievon in bekannter Weise aufzusuchen. Die Körperschattengrenze zu bestimmen, ist meist entbehrlich; für die meisten Grenzebenen ist nicht zweifelhaft, ob ihre Lichtstufe das Vorzeichen plus oder minus zu erhalten hat; wo Zweifel bestehen können, muss ein Vertikalschnitt mit einer Lichtstrahlenebene entscheiden. Wenn ein Teil einer Grenzebene im Licht, der andere im Schlagschatten ist, so ist nach dem früheren die Schlagschattenstufe von gleicher Benennung wie die Lichtstufe. Entspricht z. B. einer Grenzfläche ein Normalkugelpunkt + 2,2, so entspricht der Schlagschatten auf dieser Fläche einem Schlagschattenpunkt + 2,2 der Normalkugel.

Das regelmässige Ikosaeder, Figur 91 c, ist ein naheliegendes Problem für die Bestimmung der Lichtstufen.



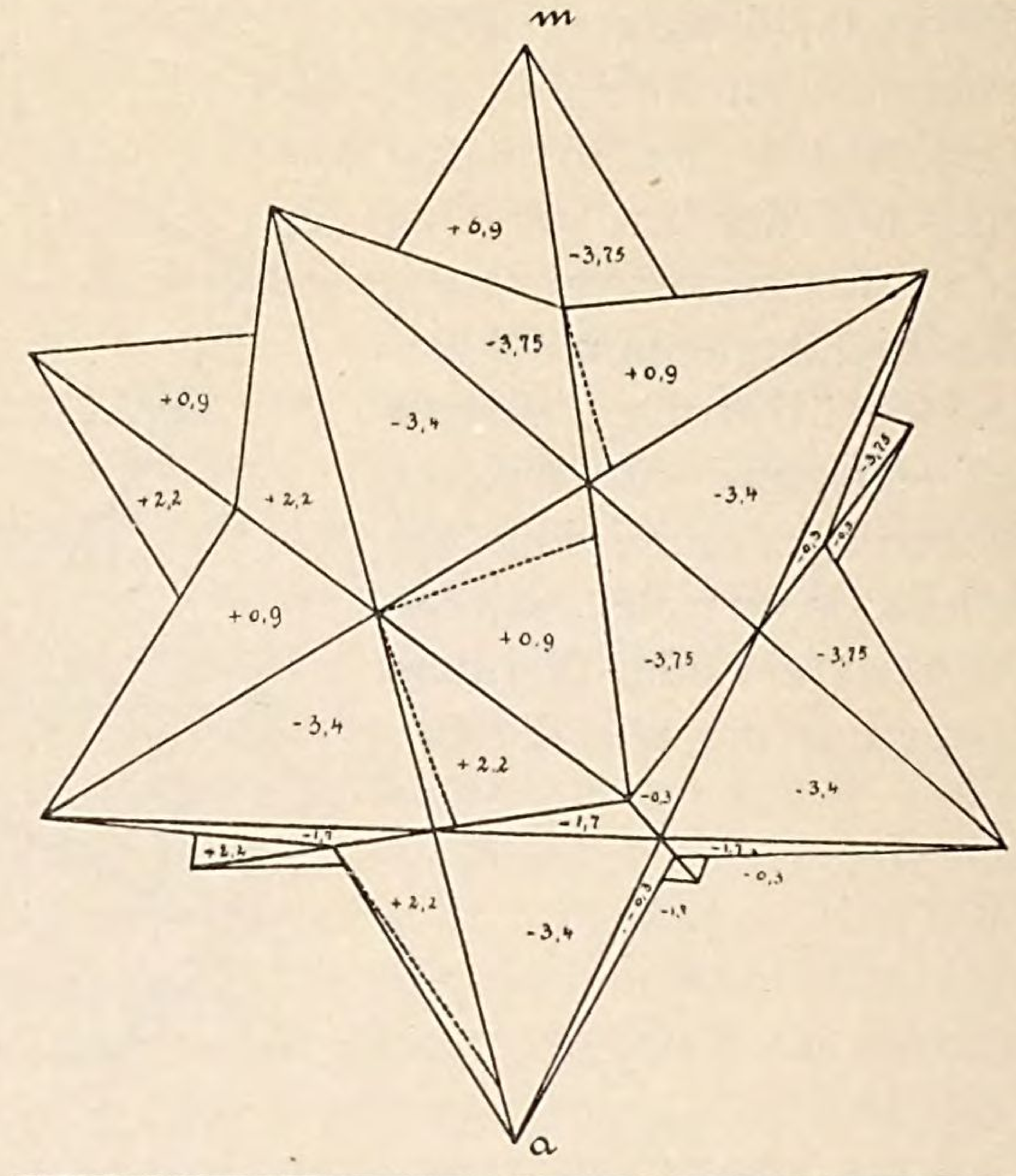
Figur 91 c.

Vier horizontale Parallelkreise der Normalkugel entsprechen den hier auftretenden Neigungswinkeln der Grenzebenen, und zehn Tangenten oder Radien im Grundriss der Normalkugel deren Horizontalrichtungen. Die Lichtstufen wurden für die angegebene Stellung etwa bestimmt wie folgt:

a c d = — 3,5	c d h = + 2,2	k f l = — 2,2	g h m = + 2,5
a d e = — 1,2	d h i = + 3,1	f l b = — 3,1	h i m = + 1,85
a e f = — 0,25	d i e = — 2,1	l b g = + 2,1	i k m = ± 4
a f b = — 1,85	e i k = — 1,65	b g c = + 1,65	k l m = + 3,5
a b c = ± 4	e k f = — 0,5	g c h = + 0,5	l g m = + 1,2

Die Parallelrichtung der Flächenpaare ist aus der Gleichheit je zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu erkennen.

Je fünf der dreiseitigen Grenzflächen des Ikosaeders bilden eine Pyramide. Betrachtet man die Diagonalen der zwölf fünfseitigen Grundflächen dieser Pyramiden als Kanten eines neuen Körpers, so entsteht das in Figur 91 d perspektivisch dargestellte Sternikosaeder, in welchem von



Figur 91 d.

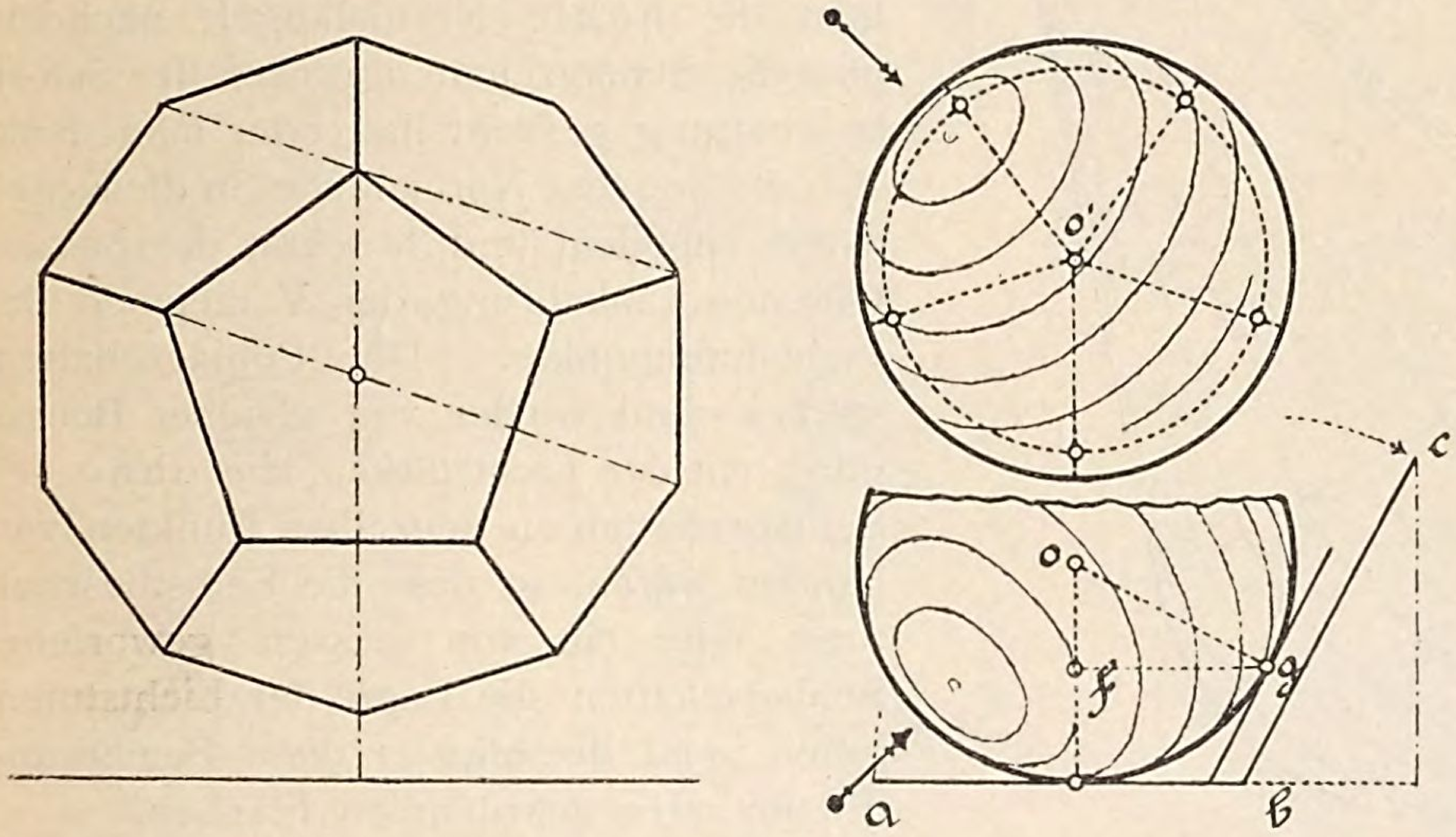
jenen Fünfecken je die fünf äusseren Dreiecke des Diagonalenpentagramms erhalten sind und das eine Selbstbeschattung darbietet. Unter der Voraussetzung unveränderter Stellung des neuen Körpers gegenüber dem Lichtstrahl sind die Lichtstufen der zwölf Fünfecke in Figur 91 c, also auch der zwölf Gruppen von je fünf Dreiecken am Sternikosaeder in Figur 91 d die folgenden:

b c h m l =	+ 0,3	(Basis zur Spitze g)
f e i m l =	— 2,2	(„ „ „ k)
c d i m g =	+ 0,9	(„ „ „ h)
b f k m g =	+ 3,4	(„ „ „ l)
d e k m h =	— 3,75	(„ „ „ i)
g h i k l =	+ 1,7	(„ „ „ m)
k i d a f =	— 0,3	(„ „ „ e)
g h d a b =	+ 2,2	(„ „ „ c)
k l b a e =	— 0,9	(„ „ „ f)
i h c a e =	— 3,4	(„ „ „ d)
g l f a c =	+ 3,75	(„ „ „ b)
b c d e f =	— 1,7	(„ „ „ a)

Auf der ersten Lichtdrucktafel ist das Sternikosaeder mit durchgeführten Lichtstufen dargestellt, ebenso ein Gussstück (Fuss einer quadratischen Eisensäule mit Vertikalrippen), das vertikale und geneigte Flächen verschiedener Richtungen darbietet.

In bestimmten Fällen liegt es näher, anstatt der Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ihre zur Vertikalebene parallele Richtungslinie zu benützen, ebenso anstatt der Horizontalneigung den mit der Vertikalebene gebildeten Winkel. In Figur 91 e ist ein regelmässiges Zwölf-

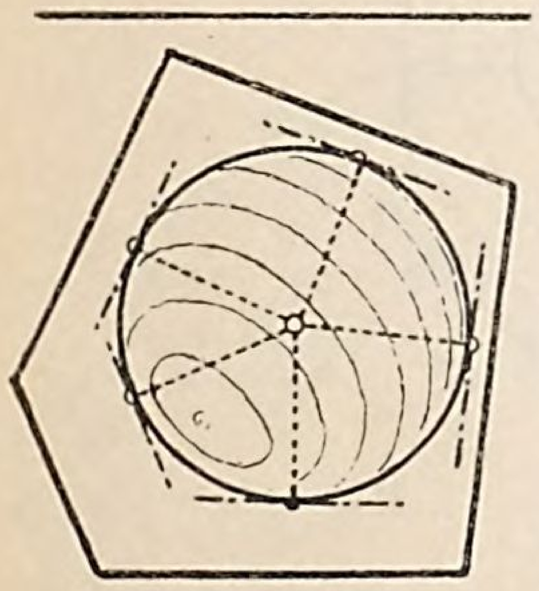
flach, das mit der Vorderfläche parallel zur Vertikalebene gerichtet ist, in dieser Weise behandelt, und es führt diese Lösung schneller zum Ziel, weil die fünf Nebenseiten gleiche Winkel mit der Vorderfläche, also auch mit der Vertikalebene bilden, so dass sie ihre Lichtstufenpunkte auf demselben mit



Figur 91 e.

der Vertikalebene gleichgerichteten Parallelkreis der Kugel finden. Aus der Verkürzung der Höhenlote der Nebenseiten ist der Winkel zwischen Vorderseite und Nebenseite *abc* abgeleitet, aus diesem der Berührungspunkt *g* einer vertikal gedachten Nebenseite mit der Normalkugel in deren Grundriss. Im Aufriss der Normalkugel ist mit einem Radius gleich *fg* ein konzentrischer Kreis beschrieben; die Schnittpunkte dieses Kreises mit Radien, die senkrecht zu den Seiten der Vorderfläche des Körpers gezogen wurden, sind die Lichtstufenpunkte der fünf Nebenseiten. Die Vorderfläche entspricht dem Mittelpunkt im Aufriss der Normalkugel, also der Lichtstufe + 1,7; die fünf Nebenseiten haben etwa die Lichtstufen + 0,15 + 2,4 — 2,4 — 3 + 1,6. Auf dem ersten Lichtdruckblatt ist der Körper schattiert.

Die Konstruktion des Lichtstufenpunktes einer Ebene in dieser oder der ursprünglichen Gestalt vereinfacht sich wesentlich bei Ebenen, die senkrecht zu einer Grundebene stehen und im Zusammenhang damit die Lichtstufenbestimmung bei prismatisch gestalteten Körpern dieser Richtung. Figur 91 f deutet an, wie z. B. für ein vertikalstehendes Prisma die Lichtstufenpunkte für die Seitenflächen aus dem Grundriss der Normalkugel als Berührungspunkte von Tangenten parallel den Seiten der Grundfläche erhalten werden. In gleicher Weise wäre der Aufriss der Normalkugel für ein zur Vertikalebene senkrechtes Prisma zu benützen.



Figur 91 f.

Die Grundebenen selbst und alle gleichgerichteten Ebenen haben ihre Lichtstufenpunkte in den Endpunkten von drei Durchmessern der Normalkugel, die senkrecht zu den drei Grundebenen stehen. Die Zahlenbenennung dieser Punkte ist fast genau + 1,7. Die genaue Zahl ist $4\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1{,}6908$.

Schiefgerichtete, aber einer Grundebene parallele Prismen verwerten die Thatsache, dass in Beziehung auf diese Grundebene die Richtungslinien ihrer Seitenflächen dieselben sind, also die Lichtstufenpunkte dieser Seitenflächen denselben Grosskreis als ersten geometrischen Ort haben. Für ein zur Vertikalebene paralleles Prisma liegen die Lichtstufenpunkte auf einem Grosskreis, der im Aufriss der Normalkugel als Durchmesser senkrecht zu den Kanten des Prismas erscheint. Die Ebene dieses Kreises ist samt seinen Lichtstufenpunkten und dem Normalschnitt des Prismas in die Vertikalebene umzuklappen. In der Umklappung wird wieder eine Tangente parallel zu jeder Seite des Normalschnittpolygons an den Kreis gezogen; der Berührungspunkt dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt für die zu der Polygonseite gehörige Grenzfläche des Prismas.

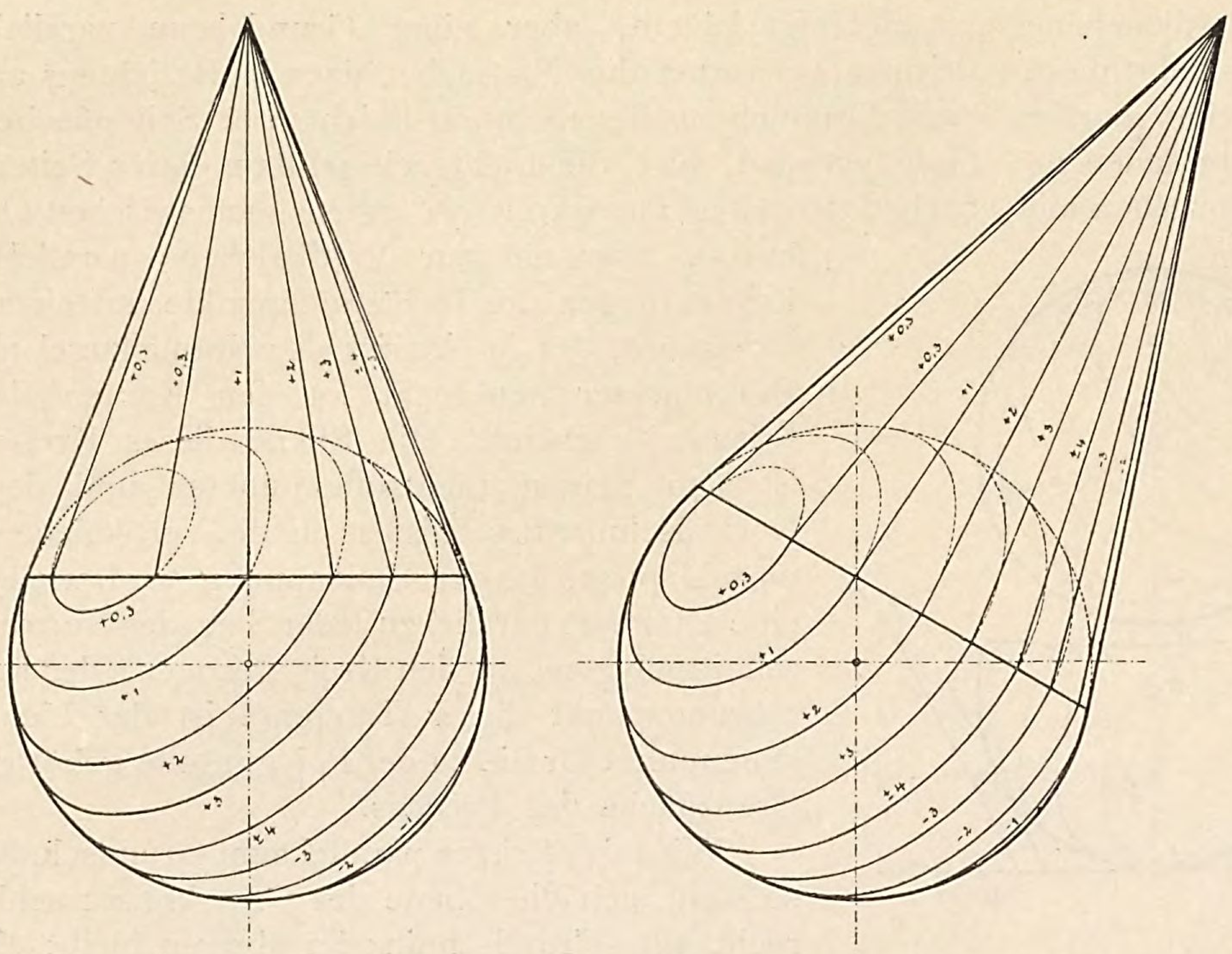
Wird das Prisma parallel zum Grundschnitt, so stellt sich die Ebene des Grosskreises senkrecht zum Grundschnitt; im übrigen bleibt die Konstruktion unverändert.

Die Anwendung der Konstruktion auf horizontale Prismen bedarf keiner Erklärung.

Auch für beliebig schief gerichtete Prismen von vielen Seiten ergiebt sich oft noch eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem für beliebige eben begrenzte Körper gezeigten Verfahren, wenn der Grosskreis der Normalkugel aufgesucht wird, dessen Ebene senkrecht zu den Prismenkanten gerichtet ist. Die Bestimmung dieses Grosskreises geschieht wie bei den beliebig schief gerichteten Cylinderflächen in Art. 100.

Gerade Kreiskegel und Kreiscylinder mit Achse parallel zu einer Grundebene. 92.

Längs einer jeden Mantellinie eines Kegels oder Cylinders ist der Winkel des Lichtstrahls mit der Normalen auf der Fläche derselbe; also ist jede Mantellinie eine Linie gleichbleibender Lichtstärke. Für einen geraden Kreiskegel finden sich die Lichtstufen dadurch, dass man sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergestülpt denkt (Figur 92 a). Er hat dann einen Kreis als unendlich niedrige Zone mit ihr gemein, und wie die Lichtstärken auf dieser Zone als auf einem Bestandteil der Kugel erscheinen, so gelten sie auch für die Zone des Kegels; man hat also nur die Mantellinien durch die Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis zu ziehen, um die Lichtstufenlinien auf dem Kegel zu erhalten. Am einfachsten gestaltet sich die Uebertragung der Lichtstufen bei demjenigen geraden Kegel, dessen Achse parallel zur Vertikalebene steht, sei sie nun lotrecht oder wagrecht oder schief gerichtet. Man zieht eine Tangente an den Aufriss der Normalkugel parallel zur umrissbildenden Mantellinie des Kegels und durch den Berührungspunkt eine Sehne senkrecht zur Achse des Kegels; diese Sehne stellt den Parallelkreis der Berührung von Kegel und Kugel dar. Wo die Sehne die Lichtstufenlinien der Kugel schneidet, da liegen die Lichtstufenpunkte

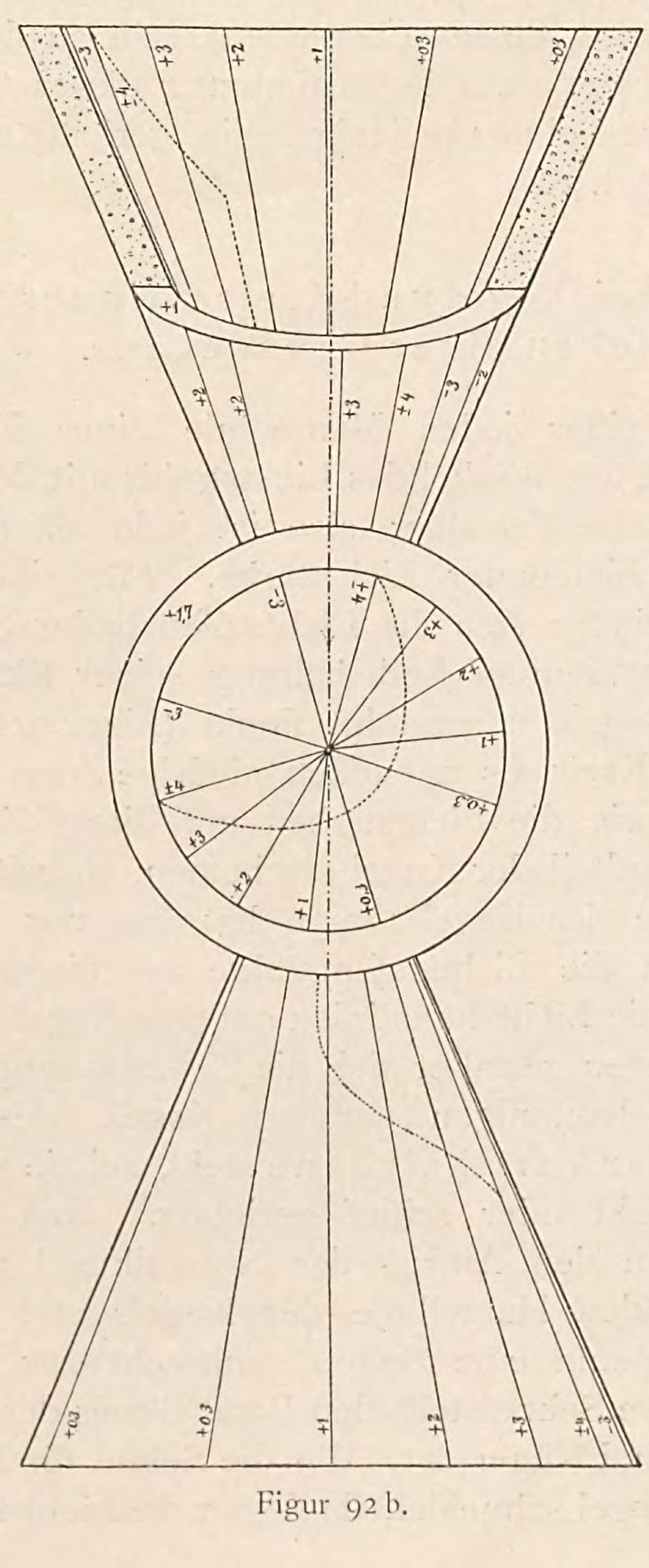


Figur 92 a.

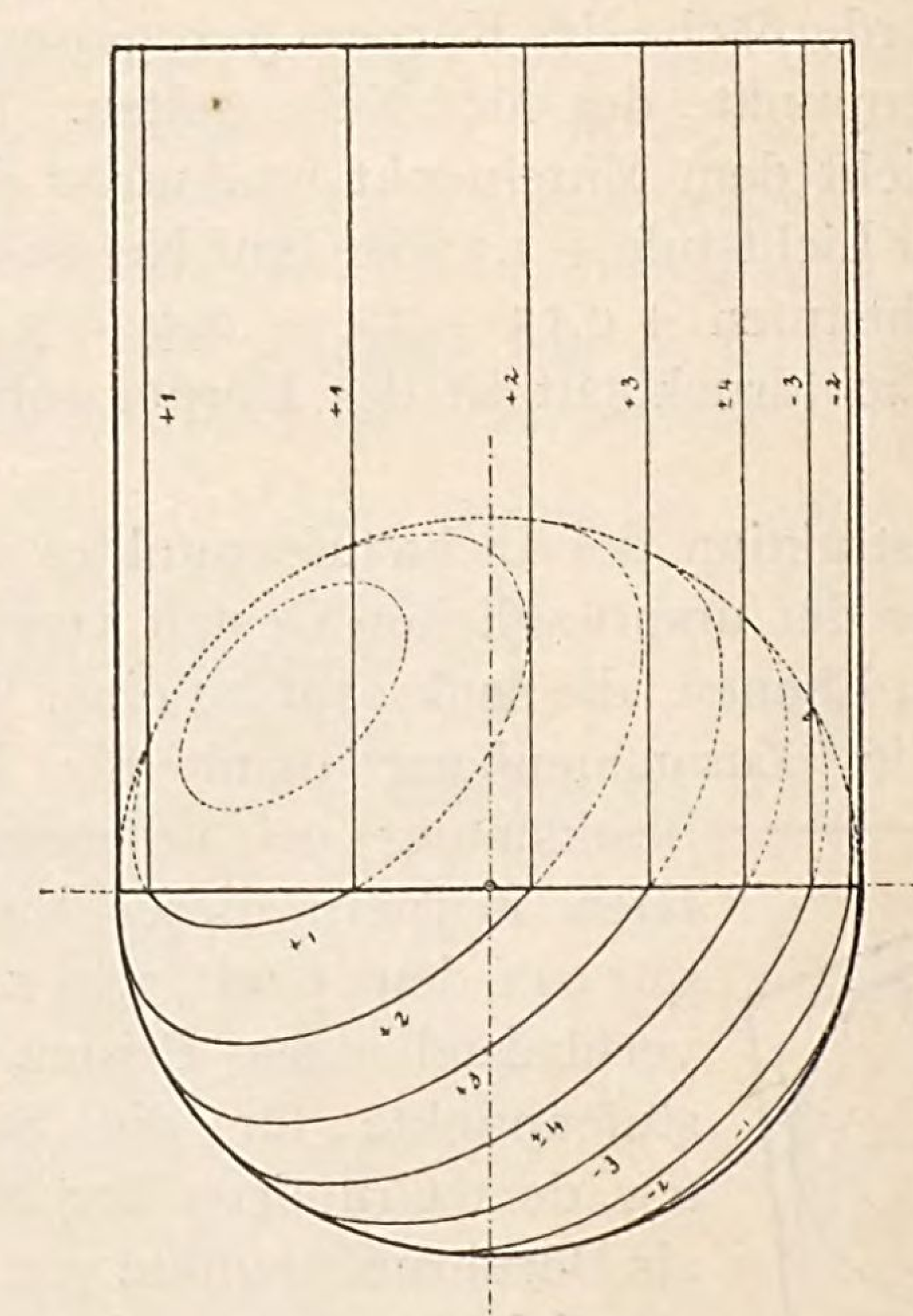
für den gleich grossen Parallelkreis des Kegels und dürfen auf diesem nur noch mit der Spitze verbunden werden. Das Verfahren liefert in den Mantellinien + 4 gleichzeitig die Körperschattengrenzen auf dem Kegel, so dass diese nicht vorher besonders konstruiert werden müssen. Am häufigsten wird der gerade Kreiskegel mit lotrechter Achse auftreten; es wird dann jener Parallelkreis von Kegel und Kugel horizontal.

Für die hohle Kegelfläche benützt man die hohle Normalkugel, nachdem man die Schlagschattengrenzen der Selbstbeschattung gesucht hat, oder man denkt sich die konvexe Normalkugel in die Kegelfläche eingelegt und beachtet die hieraus folgende Umkehrung der Vorzeichen der Lichtstufenpunkte. Die Schlagschattenstärken sind wieder von gleicher Benennung mit den Lichtstärken, die ohne den Schlagschatten an denselben Punkten vorhanden wären, so dass die Selbstbeschattung oder ein von aussen geworfener Schlagschatten die Lage der Lichtstufenlinien nicht beeinflusst; diese Bemerkung gilt für alle gekrümmten Flächen.

Wie der Aufriss der Normalkugel für die geraden Kreiskegelflächen mit Achse parallel zur Vertikalebene, so dient der Grundriss der Normalkugel für dieselbe Art von Kegelflächen parallel zur Horizontalebene, wenn sie als Grundrisse auftreten. In Figur 92 b erscheint in Verbindung mit vertikalen konvexen und hohlen Kreiskegeln ein horizontaler Kreiskegel mit Achse senkrecht zur Vertikalebene als Aufriss gezeichnet. Für diesen Fall bestimmen sich die Lichtstufenlinien zwar wieder dadurch, dass man



Figur 92 b.

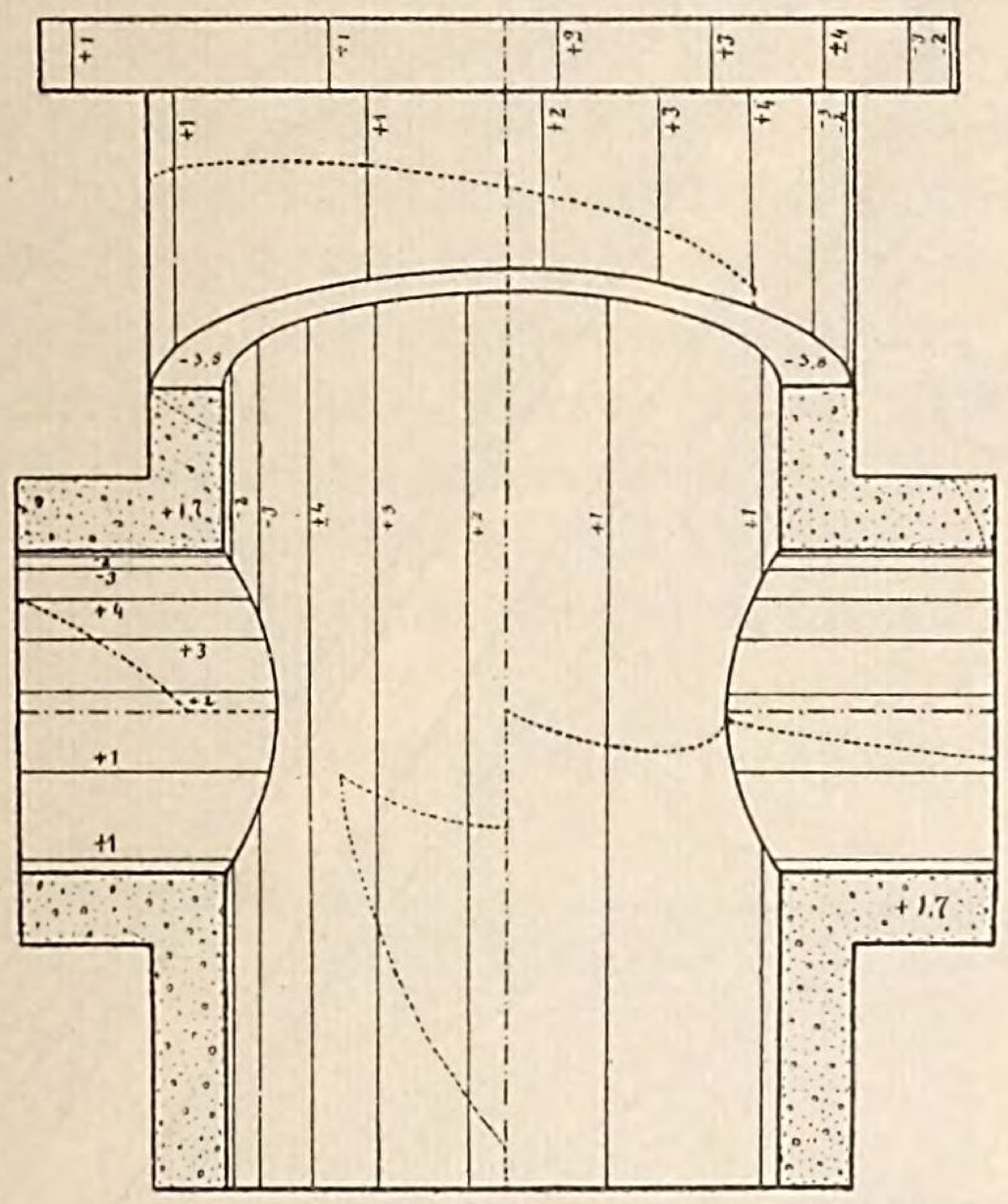


Figur 92 c.

sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergeschoben denkt; doch ist der Berührungskreis, nachdem sein Radius aus dem Grundriss von Kegel und Kugel bestimmt ist, im Aufriss der Normalkugel als ein mit dem Umriss konzentrischer Kreis zu zeichnen, und die Lichtstufenlinien des Kegelbildes sind die Radien dieses Kreises nach seinen Schnittpunkten mit den punktierten Lichtstufenlinien des Kugelbildes. Die

erste Lichtdrucktafel enthält die in Figur 92b dargestellten Kegelflächen mit Durchführung der Lichtstufen.

Für Cylinderflächen, voll oder hohl, von kreisförmigem Querschnitt und mit Achse parallel zu einer



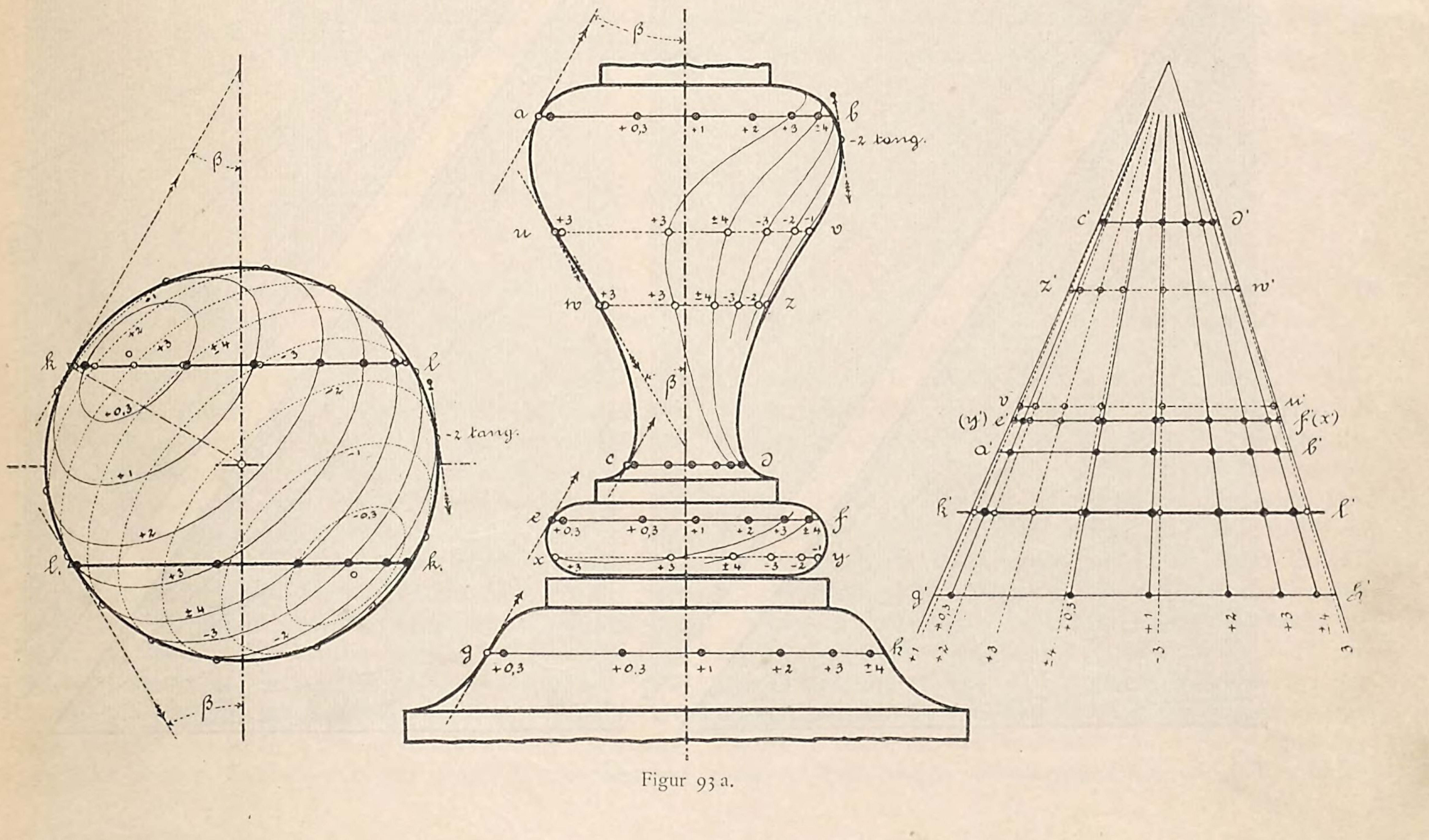
Figur 92 d.

Grundebene bedarf es keiner weiteren Vorschrift; der Cylinder wird als Kegel mit unendlich ferner Spitze behandelt; der Kreis der Berührung von Cylinder und Kugel wird ein Grosskreis, der sich im Aufriss, beziehungsweise Grundriss der Kugel geradlinig und senkrecht zur Cylinderachse projiziert (Figur 92c). Freilich setzt dies zunächst voraus, dass eine Normalkugel gezeichnet sei, deren Durchmesser gleich dem des Cylinders ist. Aber es lässt sich jede andere Normalkugel ebenfalls verwerten, indem man die auf dem Grosskreis der Kugel erscheinende Lichtstufeneinteilung proportional vergrössert oder verkleinert. Figur 92d bietet horizontale und vertikale volle und hohle Cylinderflächen mit ihren Lichtstufenlinien und ihrer Selbstbeschattung; auf der ersten Lichtdrucktafel ist die Schattierung durchgeführt.

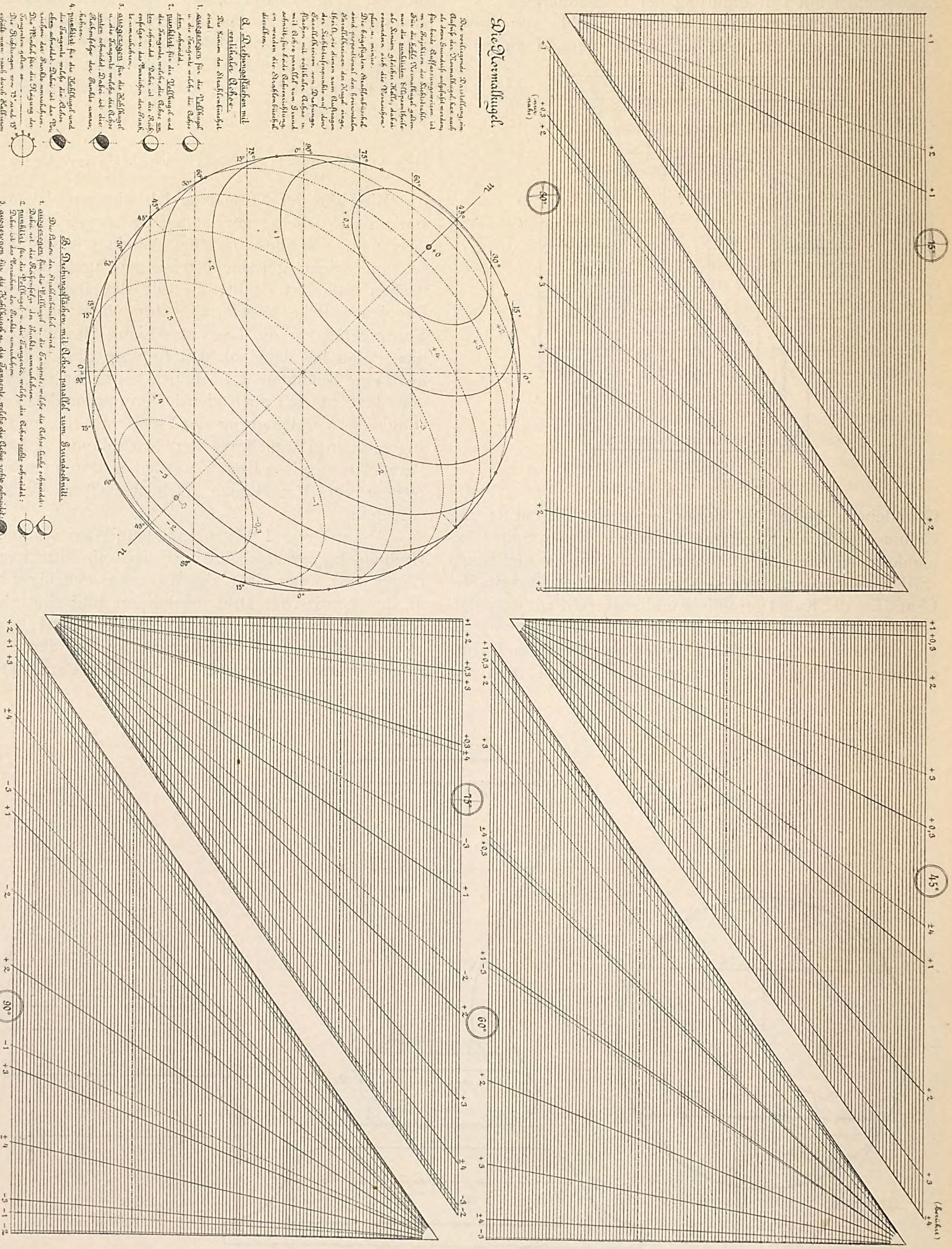
Die Drehungsfläche mit vertikaler Achse. 93.

Mit Hilfe der Normalkugel bestimmen sich die Lichtstärken auf beliebig gerichteten Drehungsflächen dadurch, dass man sich diese in eine Aufeinanderstellung vieler sehr niedriger gerader Kreiskegel- und Kreiscylinderflächen aufgelöst denkt, die alle dieselbe Achse haben. Für jede solche kreisförmige Zone lässt sich nach dem Vorhergehenden die Lage der Lichtstufenpunkte bestimmen. Man hat dabei nicht nötig, den Kegel, dessen Element eine bestimmte Zone bildet, ganz zu zeichnen, sondern bedient sich auch hier der proportionalen Vergrösserung oder Verkleinerung der Einteilung, die man auf dem zugehörigen Parallelkreis der Normalkugel erhält. Alle Parallelkreise eines Kegels werden ja durch ein beliebiges System von Mantellinien nach denselben Verhältnissen eingeteilt.

Als erster und weitaus am häufigsten vorkommender Drehungskörper erscheint derjenige mit lotrechter Achse (Figur 93a). Man zieht eine Tangente beliebiger Neigung an den Umriss des Drehungskörpers und eine gleich gerichtete Tangente an den Umriss der Kugel, ferner die Horizontallinien $a\,b$ beziehungsweise $k\,l$ durch die Berührungspunkte, welche die horizontalen Parallelkreise des



Figur 93 a.

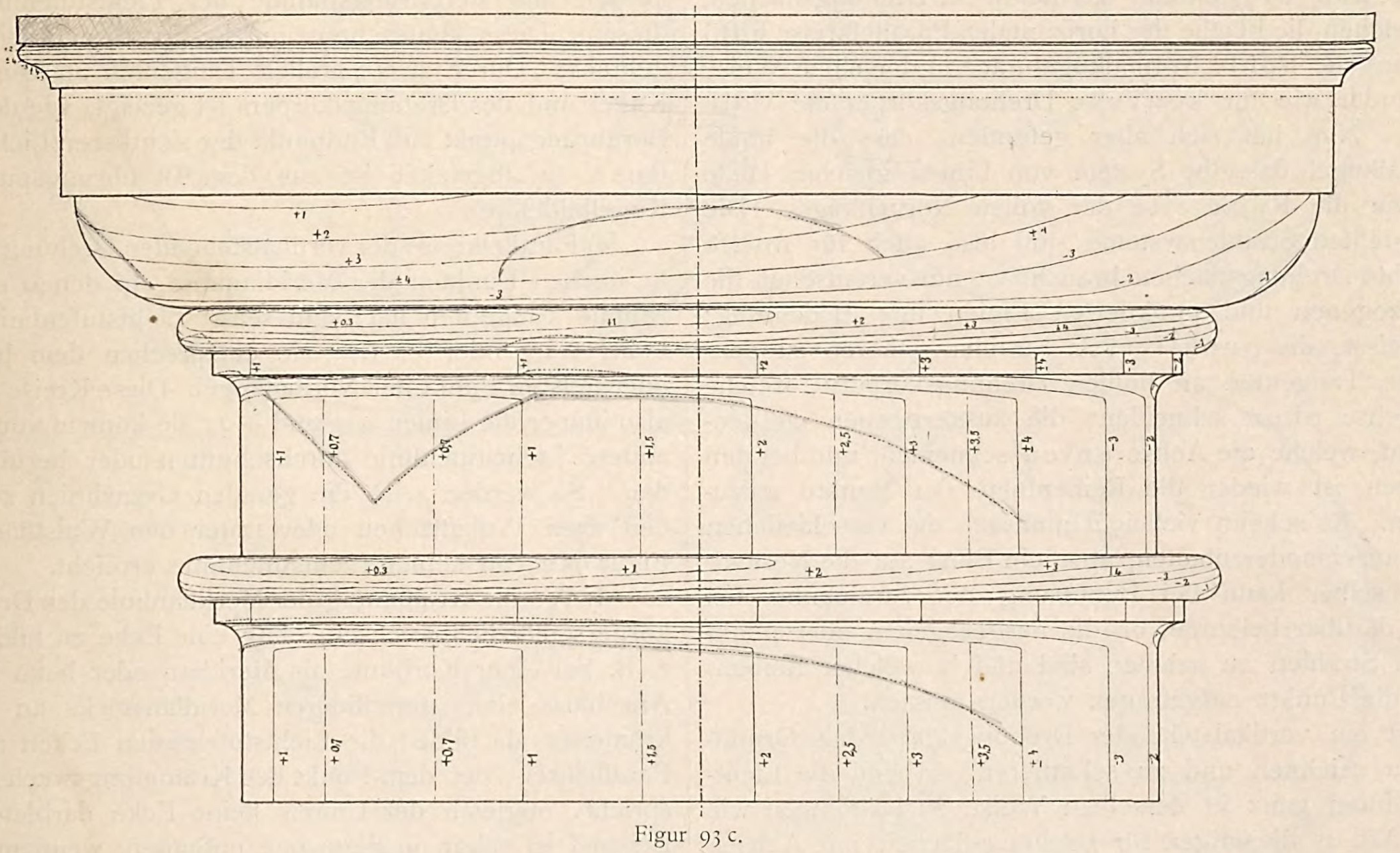


Figur 93 b.

Drehungskörpers und der Kugel darstellen. Auf der Horizontallinie der Kugel entsteht eine Teilung durch die Lichtstufenlinien; diese Teilung überträgt man proportional vergrössert oder verkleinert auf die Horizontallinie des Drehungskörpers und benennt jeden Teilpunkt mit derselben Zahl wie auf der Kugel. Führt man dieses Verfahren für eine genügende Zahl von verschieden gerichteten Tangenten durch, so erscheint auf der Drehungsfläche eine Gruppe von Punkten, von denen die gleichbenannten sich leicht zusammenfinden und durch eine stetige Kurve verbinden lassen. Damit sind die Lichtstufenlinien der Drehungsfläche bestimmt; in allen Punkten einer solchen Linie hat die Fläche dieselbe Lichtstärke oder Helle, wie der gleichbenannte Lichtstufenkreis auf der Normalkugel.

Für alle Tangenten gleicher Neigung, die man am welcher an irgend einem vertikalstehenden Drehungskörper derselben Neigung der Tangente angehört, die Teilung mit einem Papierstreifen abnehmen können. Auf dem Normalkugelblatt (Figur 93b) ist dieses Verfahren durchgeführt für die Neigungen von 90°, 75°, 60°, 45°, 30° und 15°, wovon man die meisten an den Schiebdreiecken hat und diejenigen von 15° und 75° durch Halbieren des Winkels von 30° rasch erhalten kann. Für 0° oder die horizontale Tangente erscheint natürlich kein Strahlenbüschel; hiefür ist die Lichtstärke immer dieselbe, nämlich nahezu + 1,7.

Zieht man (Figur 93a links) an den Normalkugelumriss eine Tangente, welche die vertikale Achse unter demselben Winkel β unten schneidet, den die früher gezogene Tangente nach oben bildet, so findet sich, dass der untere horizontale Parallelkreis *l*, *k*, durch die sicht-



Figur 93 c.

Umriss vertikalstehender Drehungskörper ziehen kann, wie z. B. in den Punkten *a c e g* der Figur 93a, ist derselbe Horizontalkreis der Normalkugel massgebend, wonach die Strecken *a b c d e f g h* in gleichem Verhältnis einzuteilen sind wie die Strecke *k l*. Hiefür dient in bekannter Weise ein Strahlenbüschel, das von einem beliebigen Pol aus nach den Teilpunkten der getrennt herausgetragenen Linie $k' l' = k l$ gezogen wird (Figur 93a rechts). Die parallel zu $k' l'$ eingepassten Strecken $a' b' = a b$, $c' d' = c d$, $e' f' = e f$, $g' h' = g h$ werden durch die Strahlen in denselben Verhältnissen eingeteilt wie die Strecke *k l*. Wenn man also ein- für allemal zu einer bestimmten Neigung der Tangente die Teilung der horizontalen Sehne des Kugelbildes herausträgt, ein Strahlenbüschel nach den Teilpunkten zieht und die Strahlen durch eine grosse Zahl von weiteren parallelen Linien durchschneidet, so wird man an diesem Liniensystem für jeden Horizontalkreis, baren ausgezogenen Lichtstufenlinien ganz ebenso eingeteilt wird, wie der gleich grosse obere Parallelkreis *k l* durch die punktierten, für die Kugelrückseite gültigen Ellipsenteile, nur mit Umkehrung der Reihenfolge und der Vorzeichen der Punkte. Wenn man also in die Strahlenbüschel der oberen Parallelkreise als punktierte Strahlen auch diejenigen aufnimmt, welche für die Lichtstufenpunkte der Kugelrückseite gelten würden, so können diese Strahlenbüschel zugleich für diejenigen Parallelkreise auf der Vorderseite des Drehungskörpers dienen, deren Tangenten die Achsen unter denselben Winkeln unten schneiden.

In den Punkten *u w* und *x* sind solche Tangenten gezogen; die Strecken *u v w z* und *x y* sind mit $u' v'$ $w' z'$ und $x' z'$ in das für den Winkel β gültige Strahlenbüschel parallel eingepasst; die Abstände der dort auf den punktierten Strahlen erhaltenen Punkte waren von *w* nach *z* mit derjenigen Reihenfolge einzutragen, wie sie im Strahlen-

büschel von w' nach z' auftreten, ebenso für $u\,v = u'\,v'$ und für $x\,y = x'\,y'$; ausserdem waren die Vorzeichen der Lichtstufenpunkte umzukehren, z. B. anstatt + 3 zu setzen — 3.

Die in Figur 93b gezeichneten sechs Strahlenbüschel enthalten ebenfalls die punktierten Strahlen; sie gelten auch für diejenigen Tangenten ihrer Winkel, welche die Achsen der Drehungskörper unten schneiden. Andernfalls wären zwölf Strahlenbüschel notwendig geworden.

Ein durchgeführtes Beispiel für die Lichtstufenlinien auf einem vertikalstehenden Drehungskörper ist Fig. 93c; das dargestellte Kapitäl ist schattiert auf der vierten Lichtdrucktafel, die auch die Hälfte der Säulenbasis als zweiten solchen Körper darbietet. Stärker bewegte Umrisslinien erscheinen an den Balustern der zweiten Lichtdrucktafel.

Für die hohlen Drehungsflächen mit lotrechter Achse und konkaver Drehung, das heisst für Drehungsflächen, bei welchen die Fläche der horizontalen Parallelkreise hohl ist, wird die hohle Normalkugel ganz in derselben Weise verwendet wie für konvexe Drehungskörper die Vollkugel. Nun hat sich aber gefunden, dass die hohle Normalkugel dasselbe System von Linien gleicher Helle hat wie die Rückseite der vollen Normalkugel. Die aufgestellten Strahlensysteme sind also auch für hohle lotrechte Drehungsflächen brauchbar; nur vertauschen die ausgezogenen und punktierten Linien ihre Bedeutung; das heisst, die punktierten Strahlen gehören zu denjenigen Tangenten an hohlen Drehungskörpern, welche die Achse oben schneiden, die ausgezogenen zu denjenigen, welche die Achse unten schneiden, und bei den letzteren ist wieder die Reihenfolge der Punkte umzukehren. Es scheint vielleicht mühsam, die verschiedenen Fälle auseinanderzuhalten, aber ein Blick auf die Normalkugel selber kann bei Benützung der Strahlenbüschel rasch darüber belehren, ob die ausgezogenen oder punktierten Strahlen zu nehmen sind und in welcher Reihenfolge die Punkte aufgetragen werden müssen.

Ist ein vertikalstehender Drehungskörper als Grundriss zu zeichnen und zu schattieren, so sind die Lichtstufenlinien ganz in derselben Weise zu bestimmen wie nach Art. 95 diejenigen für Drehungsflächen mit Achsen senkrecht zur Vertikalebene, wenn sie als Aufrissbilder auftreten.

94. Sätze über den Verlauf der Lichtstufenlinien auf solchen Flächen.

Die Lichtstufenlinien auf vertikalstehenden, als Aufrisse gezeichneten Drehungskörpern lassen folgende Thatsachen erkennen:

a) Dem höchsten Punkt einer Lichtstufenlinie auf der Drehungsfläche und dem höchsten Punkt der gleichnamigen Ellipse auf der Normalkugel entsprechen zwei Parallelkreise, an welchen die Umrisse des Drehungskörpers und der Kugel gleichgerichtete Tangenten haben. Da auch beide Parallelkreise durch die Lichtstufenpunkte proportional geteilt sind, so lässt sich mit diesem Satz der höchste Punkt jeder Lichtstufenlinie auf dem Drehungskörper, in welchem die Kurve eine horizontale Tangente hat, scharf bestimmen. Dasselbe gilt für die tiefsten Punkte aller Lichtstufenlinien. Höchste Punkte können in Vorderansichten nur haben die Kurven + 0,3 und + 1, tiefste Punkte die Kurven + 0,3 + 1 + 2 + 3 ± 4 — 3 — 2.

b) Die Lichtstufenlinien kommen berührend am Umriss der Drehungsfläche an; wenn auch die Berührung eine solche mit sehr starker Krümmung sein kann, die sich von einem Schnitt kaum unterscheidet. In einem jeden Berührungspunkt hat der Umriss der Drehungsfläche dieselbe Richtung der Tangente, wie der Normalkugelumriss am Berührungspunkt der gleichnamigen Lichtstufenellipse. Wenn man also auf dem Normalkugelblatt die Berührungspunkte bezeichnet (wie in Art. 88 gezeigt und in Figur 88a und b geschehen), so liefern die Tangenten am Umriss der Normalkugel in diesen Punkten und gleichgerichtete Tangenten am Umriss des Drehungskörpers die Berührungspunkte der Lichtstufenlinien an diesem. Diese Thatsache ist in Figur 93a zur Anschauung gebracht. Durch zwei parallele Tangenten am Umriss der Kugel und des Drehungskörpers ist gezeigt, wie der obere Berührungspunkt und Endpunkt der sichtbaren Lichtstufenlinie — 2 abgeleitet ist aus dem Berührungspunkt der Kugelbildellipse — 2.

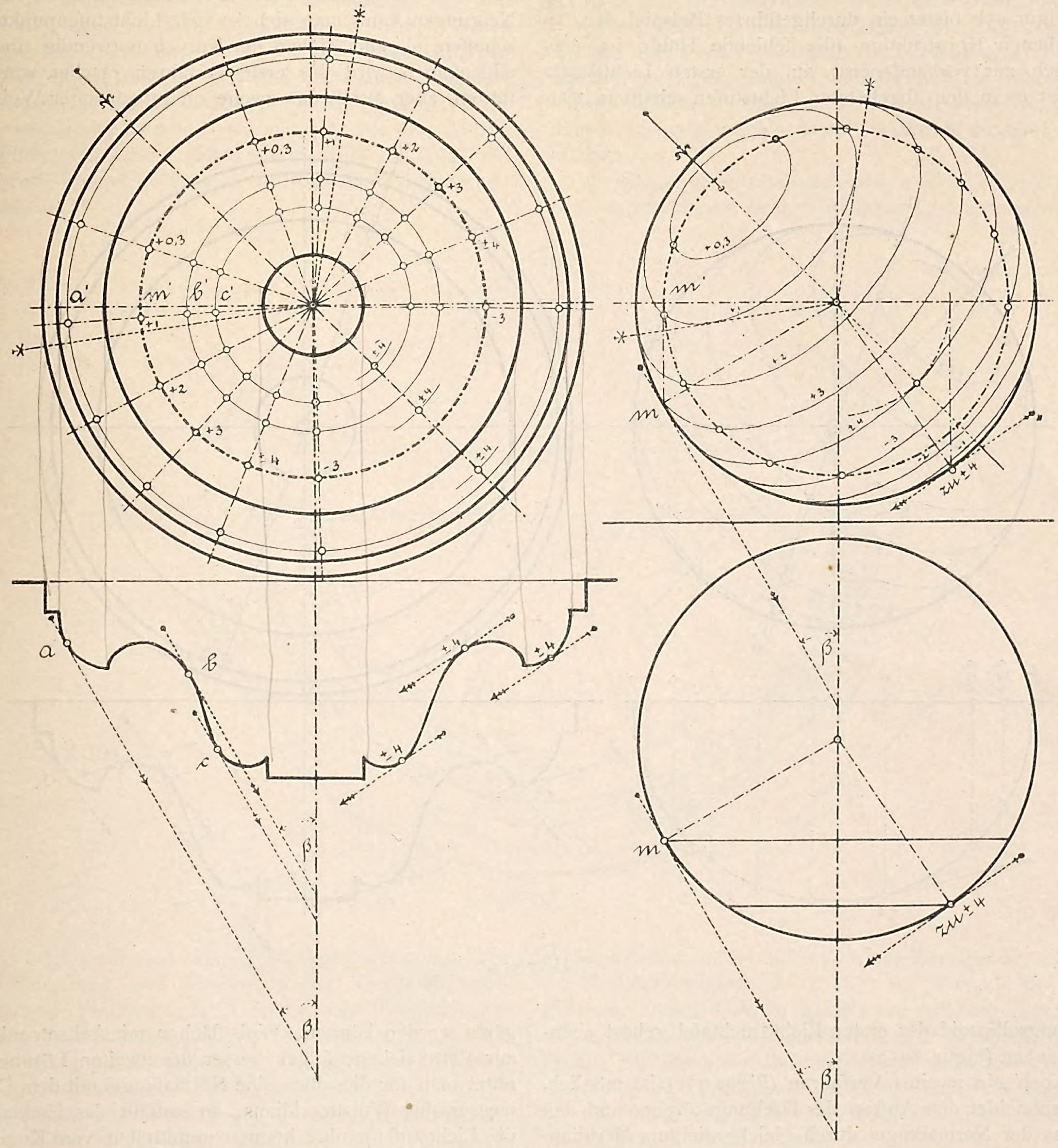
c) Parallelkreise der vertikalstehenden Drehungsflächen in solchen Punkten der Meridianlinie, in denen sie horizontale Tangenten hat, sind selbst Lichtstufenlinien, und zwar + 1,7 oder — 1,7; sie entsprechen dem höchsten oder tiefsten Punkt der Normalkugel. Diese Kreise trennen also immer die Linien + 1 und + 2; sie können von keiner andern Lichtstufenlinie durchschnitten oder berührt werden. So werden z. B. die geraden Grenzlinien zwischen den zwei Wulstflächen oder unter den Wulstflächen in Figur 93c von keiner Lichtstufenlinie erreicht.

d) Wo die Krümmung der Meridianlinie des Drehungskörpers plötzlich wechselt, ohne eine Ecke zu bilden, wie z. B. bei einer Korblinie als Meridian oder beim stetigen Anschluss eines geradlinigen Meridianstücks an ein gekrümmtes, da bilden die Lichtstufenlinien Ecken auf dem Parallelkreis, der dem Punkt des Krümmungswechsels entspricht, obgleich der Umriss keine Ecke darbietet. Ein Beispiel ist schon in Figur 92c enthalten, wenn man sich das verdeckte Normalkugelstück weggenommen denkt.

Die Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene. 95.

Wenn für eine solche Fläche die Lichtstufenlinien in der Horizontalprojektion gesucht werden sollen, so ist die Lösung ganz entsprechend derjenigen bei vertikalstehenden Drehungskörpern; nur wird der Grundriss der Normalkugel anstatt des Aufrisses benützt, und es sind dann die sechs Strahlenbüschel zur Normalkugel abermals verwertbar. Anders jedoch, wenn die Schattierung nur in der Vertikalprojektion verlangt wird. Als Beispiel hiefür mag eine gedrehte Rosette auf vertikaler Wandfläche dienen. Ein passendes Beispiel für hohle Drehungsflächen dieser Art wäre das mit einer grossen Hohlkehle und Wulsten zurücktretende Rahmengesims eines gotischen Rosenfensters oder Hochfensters.

An den Horizontaldurchschnitt der Rosette (Fig. 95 a) zieht man in den Punkten *a b c* parallele Tangenten unter einem beliebigen Winkel *β*. Ihnen entsprechen die der Vertikalebene parallelen Kreise *a' b' c'* im Aufriss. Bestimmt man auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel den Berührungspunkt *m* einer Tangente, die den rung oder Verkleinerung, sind auch die drei Parallelkreise im Aufriss der Rosette einzuteilen, um auf ihnen die Lichtstufenpunkte zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Kugelkreis mit seiner Einteilung auch in den Aufriss der Rosette zeichnet und Radien durch seine Teilpunkte zieht; bei reicheren Formen dienen besser eigene Hilfsfiguren

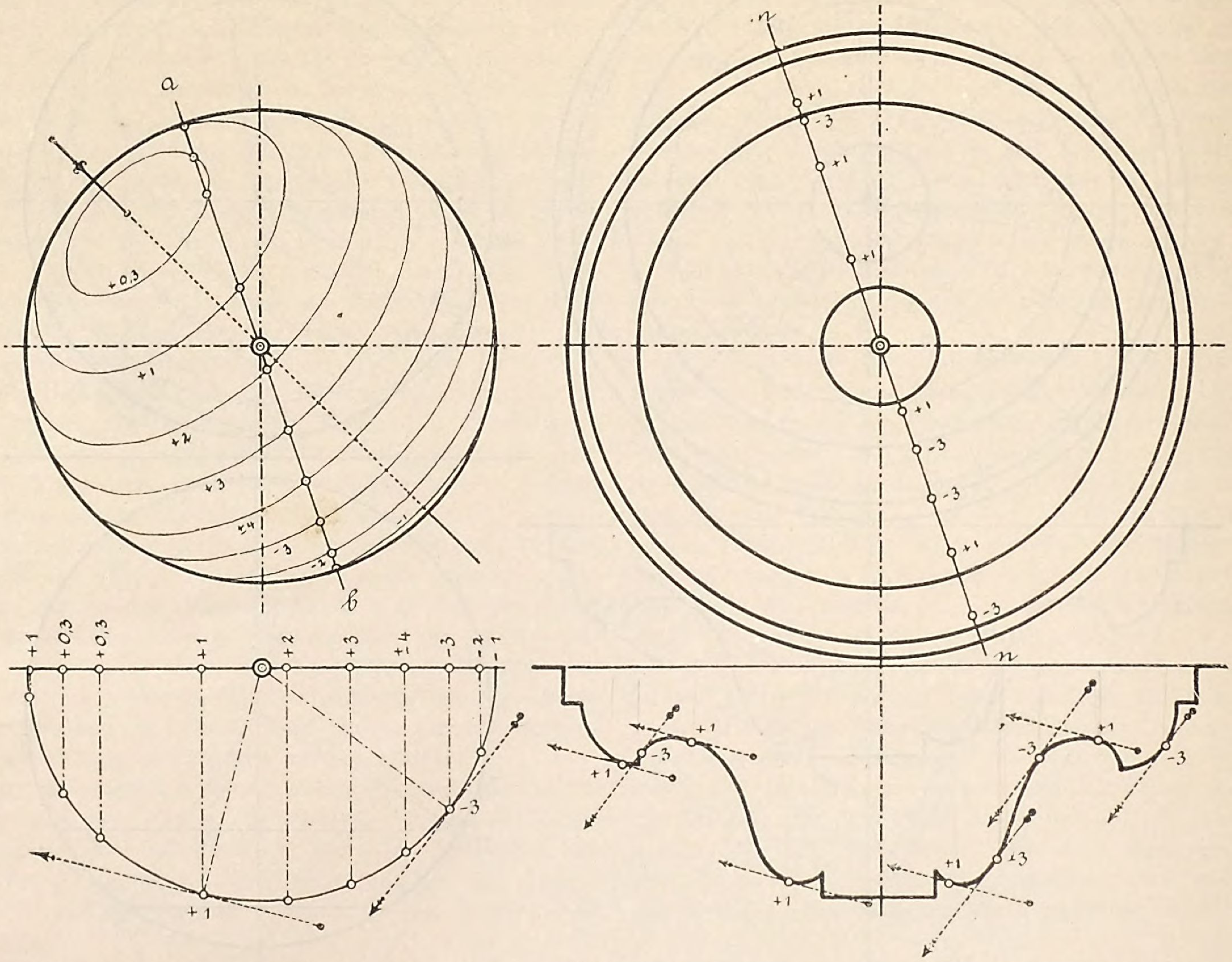


Figur 95 a.

in *a b* und *c* gezogenen parallel ist, und legt durch den Berührungspunkt einen Kugelkreis *m'* parallel zur Vertikalebene, der sich im Aufriss der Normalkugel als konzentrischer Kreis projiziert, so wird dieser Kreis durch die Lichtstufenlinien in einer bestimmten Weise eingeteilt, und in derselben Weise, nur mit proportionaler Vergrösse- für jeden Kugelkreis. Führt man das beschriebene Verfahren für eine genügende Zahl von Richtungen der Tangenten durch, so lassen sich die Lichtstufenlinien durch die im Aufriss gefundenen Punkte ziehen, ohne dass sie auch im Grundriss gezeichnet werden müssten. Zu Fig. 95 a ist noch zu bemerken, dass der Grundriss der Normal-

kugel nur beigefügt ist, um den Gedanken der Lösung deutlicher zu zeigen, dass aber für die praktische Ausführung der Konstruktion alle zur Bestimmung der Radien nötigen Hilfslinien auch an der Aufrissfigur gezogen werden können, deren Umriss hiebei eben zeitweilig als Grundriss aufgefasst wird. Die Hilfslinien sind deshalb auch im Aufriss eingetragen.

Figur 95b bietet ein durchgeführtes Beispiel der beschriebenen Konstruktion (die fehlende Hälfte ist symmetrisch zur vorhandenen); auf der ersten Lichtdrucktafel ist es in den abgeleiteten Lichtstufen schattiert. Das Punkt + 1 eine Tangente, dann an den umgeklappten Rosettenmeridian parallele Tangenten, so werden die Berührungspunkte der letzteren ebenfalls die Lichtstärke + 1 haben, und sie sind dann nur noch in den Aufriss zurückzuklappen. Durch weitere Tangenten bekommt man auch die Punkte + 2 + 3 ± 4 — 3 u. s. w. auf demselben Meridianschnitt, und durch weitere Meridianschnitte mit anderen Neigungen kann man sich so viele Lichtstufenpunkte verschaffen, als zum Ziehen der Kurven notwendig sind. Im allgemeinen wird das erste Verfahren rascher zum Ziel führen, aber durch das zweite oft in günstiger Weise er-



Figur 95 c.

Drehungsellipsoid der ersten Lichtdrucktafel gehört ebenfalls hieher (Figur 103a).

Noch ein zweites Verfahren (Figur 95c) ist möglich. Man schneidet den Aufriss des Drehungskörpers und den Aufriss der Normalkugel durch gleichgerichtete Meridianebenen *m n* und *a b*. Zieht man an den Grosskreis, der den Schnitt der Kugel bildet, eine Tangente, und dann eine gleichgerichtete Tangente an den Meridianschnitt des Drehungskörpers, so werden die beiden Berührungspunkte gleiche Lichtstärke haben. Daher klappt man sowohl den Grosskreis als den Meridian in die Vertikalebene um. Auf der Umklappung des Grosskreises *a b* erscheinen Teilungspunkte + 1 — 3 u. s. w. Zieht man z. B. in dem gänzt werden können. Wulstflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene folgen besser der zweiten Lösung; benützt man für dieselben eine Normalkugel mit dem Durchmesser des Wulstmeridians, so entfällt das Umklappen; die Lichtstufenpunkte können unmittelbar vom Kugelbilddurchmesser auf den Radius des Wulstbildes übertragen werden und die Aufgabe löst sich in einfachster Weise. Es erscheint hier der Gedanke der Schattenkonstruktion nach Figur 58 auf die Lichtstufenbestimmung ausgedehnt.

Für die Lichtstufenlinien auf Drehungsflächen mit Achsen senkrecht zur Vertikalebene, die als Aufrisse dargestellt sind, ergeben sich folgende Sätze und Bemerkungen.

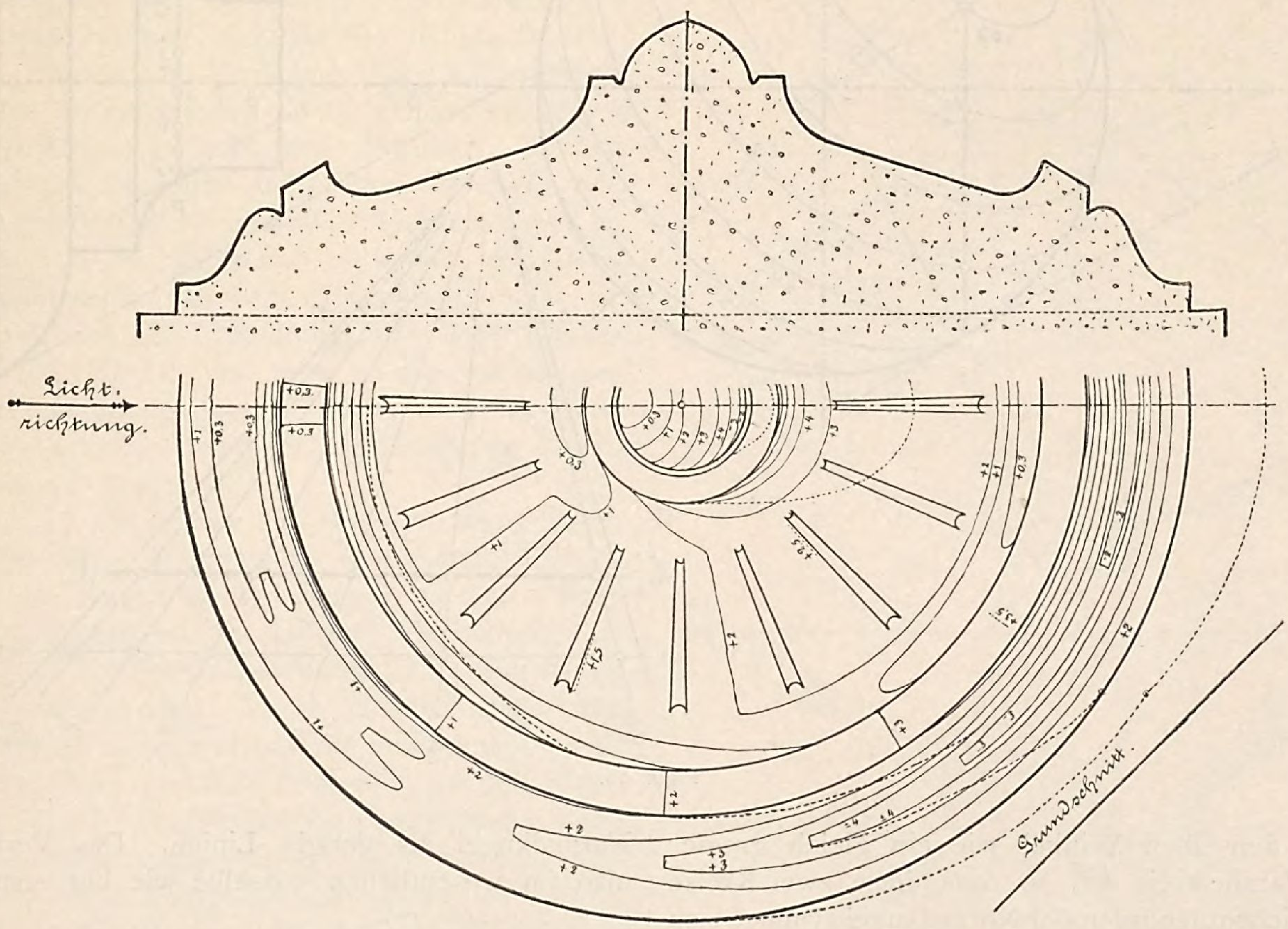
a) Die ganze Lichtstufenliniengruppe hat eine Symmetralachse im Lichtstrahldurchmesser.

b) Wenn an eine Lichtstufenlinie + 1 des Normalkugelaufrissbildes (Figur 95 a) eine Tangente vom Mittelpunkt aus und im Aufriss der Drehungsfläche ein Radius parallel zu dieser Tangente gezogen wird, so berührt dieser Radius die Lichtstufenlinie + 1 der Drehungsfläche, und diese Linie kehrt an diesem Radius in derselben Weise um, wie die Lichtstufenellipse + 1 des Kugelbildes an ihrer Tangente. In Figur 95 a sind die Radien punktiert eingetragen und mit Kreuzen bezeichnet. Figur 95 b zeigt das Umkehren der Kurven + 0,3 und + 1; bei den andern Lichtstufenlinien ist es nicht möglich, da im Kugelbild tangierende Radien an die andern Lichtstufenellipsen nicht möglich sind.

Lösung mit der sonst in Figur 95 a durchgeführten ersten.

d) Werden die in Figur 95 a an den Flächenschnitt gezogenen Tangenten parallel zum Grundschnitt, so erscheinen in den Berührungspunkten diejenigen Parallelkreise, nach welchen Ebenen, die der Vertikalebene parallel sind, die Drehungsfläche berühren. Diese Parallelkreise sind also zugleich Lichtstufenlinien + 1,7; sie entsprechen dem vordersten Punkt der Normalkugel; als nur gedachte, nicht gezeichnete Linien trennen sie überall die Lichtstufenlinien + 1 und + 2 der Fläche; keine der ganzzahligen Lichtstufenlinien kann sie durchschneiden oder berühren.

e) Wenn viele Drehungsflächen der angegebenen Lage zu schattieren sind, so zeichnet man geschlossene



Figur 95 b.

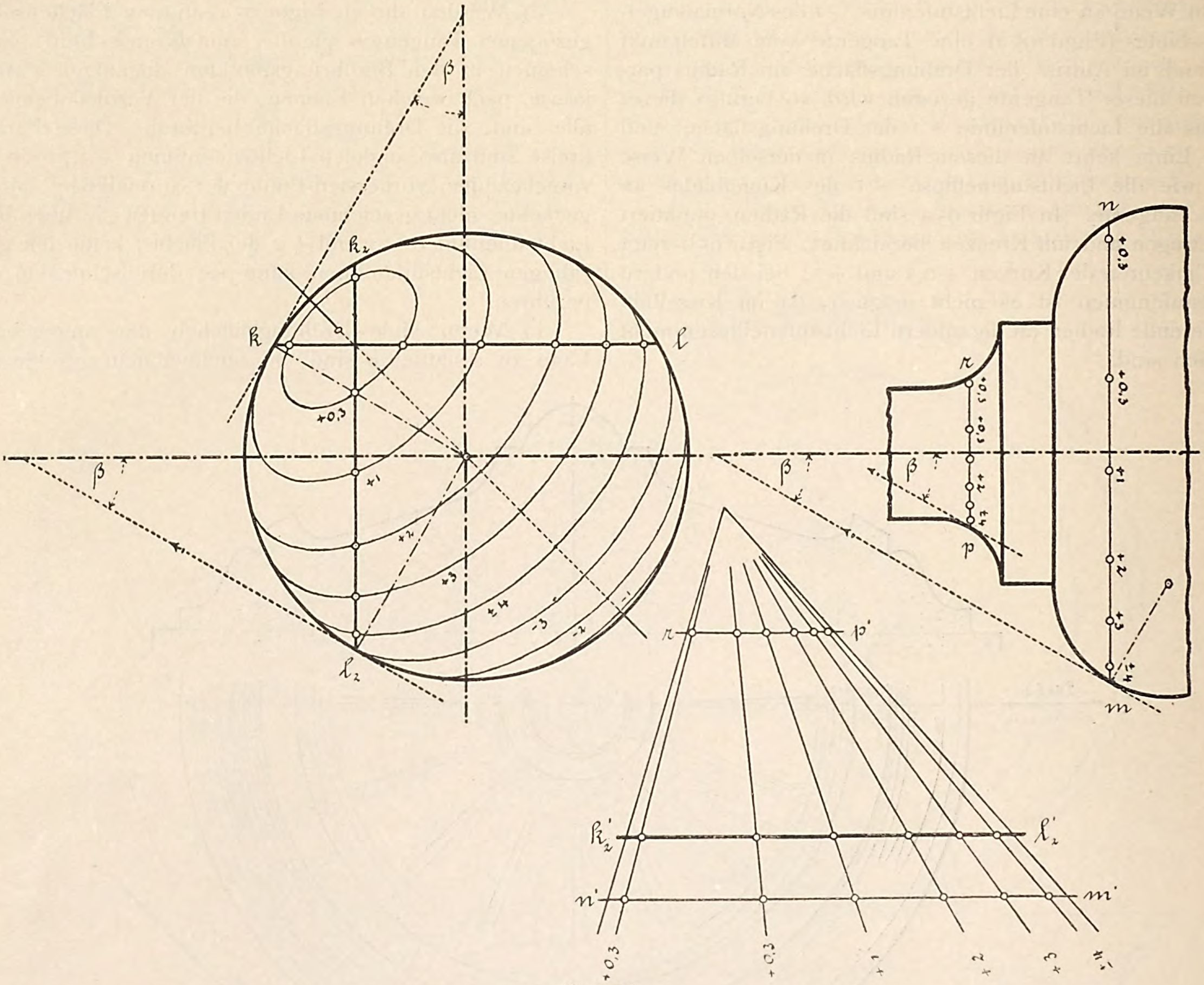
c) Legt man auf die Lichtstrahldurchmesser des Kugelbildes und der Drehungsfläche Meridianschnittebenen und bestimmt die Richtung der Tangente am Meridianschnitt der Kugel etwa im Punkt + 3, so sind die Berührungspunkte paralleler Tangenten am Flächenmeridian Lichtstufenpunkte + 3 der Fläche. Damit erhält man die äussersten Punkte der Kurve + 3, in welchen diese wie die Ellipse des Kugelbildes den Lichtstrahldurchmesser rechtwinklig schneidet und symmetrisch umkehrt. In Figur 95 a sind die Punkte ± 4 auf dem Lichtstrahl in dieser Weise bestimmt. Die parallelen Tangenten sind an Kugel- und Flächenschnitt je mit zwei Punkten hinter dem Pfeil bezeichnet. Als Umklappung des Kugelmeridians ist der Umriss der Kugel selbst benützt. In dieser Bestimmung äusserster Kurvenpunkte erscheint ein Verbinden der zweiten oben beschriebenen

Strahlenbüschel oder Scheiben für die Kugelkreise, welche den Tangentenwinkeln $\beta = 0^0\ 15^0\ 30^0\ 45^0\ 60^0\ 75^0$ entsprechen. Diese Scheiben können zur proportionalen Einteilung der Parallelkreise aller Flächen in derselben Weise dienen, wie die sechs Strahlenbüschel der Figur 93 b zur Einteilung der horizontalen Strecken; nur wird man anstatt des Papierstreifens zum raschen Uebertragen der Punkte Pauspapier benützen.

Die Drehungsfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt. 96.

Für solche Drehungsflächen (Figur 96) hat man, entsprechend der Richtung ihrer Parallelkreise, diejenigen Parallelkreise der Normalkugel zu benützen, die senkrecht zum Grundschnitt stehen, und im übrigen zu verfahren

wie im vorigen Fall. Ein solcher vertikaler, zum Grundschnitt senkrechter Parallelkreis $k_2\, l_2$ bildet mit dem Licht-

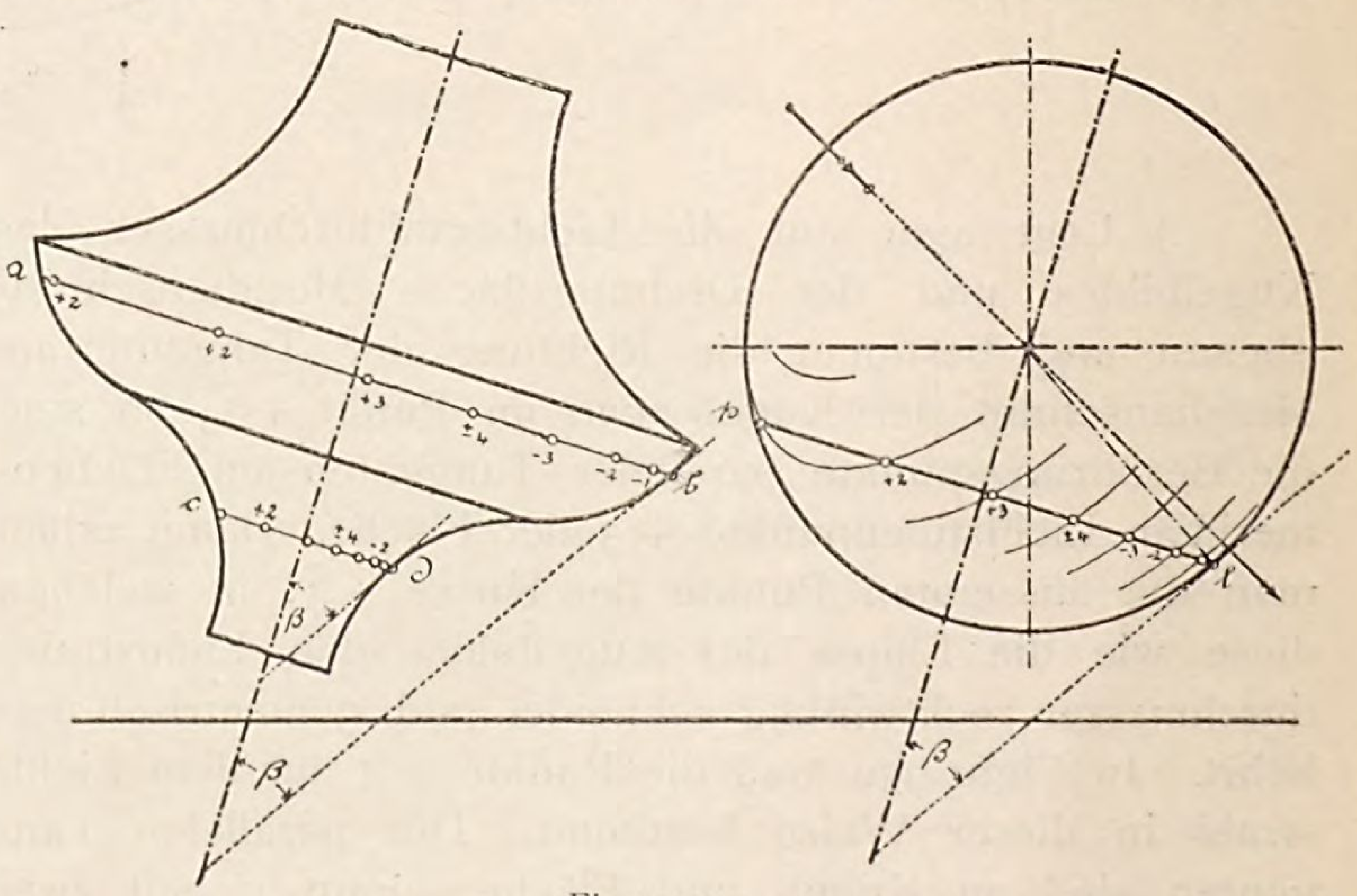


Figur 96.

strahl genau denselben Winkel wie ein gleich grosser horizontaler Parallelkreis $k\, l$, so dass diese zwei Kreise auch zu den Lichtstufenlinien der Normalkugel symmetrisch liegen. Daher werden die Lichtstufenpunkte auf dem vertikalen Kreis mit denselben Abständen auftreten wie auf dem horizontalen, nur mit symmetrischer Umkehrung der Reihenfolge. Hienach sind die sechs Strahlenbüschel der Figur 93b auch brauchbar für das Auftragen der Lichtstufenlinien von horizontalen Drehungsflächen parallel zum Grundschnitt, und zwar sowohl für die konkavgedrehten als die konvexen Flächen dieser Art. Die nötigen Angaben zu ihrer Benützung in dieser neuen Richtung sind der Figur schriftlich beigefügt.

97. Drehungsflächen mit schiefgerichteten Achsen.

Solche Flächen treten in den technischen Gebilden meist nur so auf, dass die Achse einer Grundebene, gewöhnlich der Vertikalebene, parallel ist. Dieser Fall löst sich ohne neue Hilfsmittel. Die Parallelkreise der Kugel (Figur 97), welche parallel zu denjenigen der Drehungsfläche durch die Berührungspunkte der gleichgerichteten Tangenten zu legen sind, projizieren sich im Aufriss der Normalkugel als gerade Linien. Das Verfahren bleibt also im wesentlichen dasselbe wie bei vertikalstehenden



Figur 97.

Drehungsflächen. Ist z. B. die Tangente, die man in b an den Drehungskörper ziehen kann, parallel zur Tangente in l am Umriss der Normalkugel, so ist Parallel-

kreis $a\,b$ nach denselben Verhältnissen zu teilen, in denen der ihm parallele Kugelkreis $p\,l$ durch die Lichtstufenlinien der Kugel geteilt ist, ebenso jeder andere zu derselben Tangentenrichtung gehörige Parallelkreis $c\,d$. Die Normalkugel ist hienach zugleich Hilfsmittel zur raschen Bestimmung der Körperschattengrenzen auf schiefgerichteten, aber der Vertikalebene parallelen Drehungsflächen; denn in der Lichtstufenlinie $+\,4$ erhält man eben die Körperschattengrenze. Nach dem Früheren (Art. 64) ist diese Schattengrenze nur durch Umsetzung der Grundebenen mit Neubestimmung des Lichtstrahls, also auf weit längerem Weg anderweitig erhältlich.

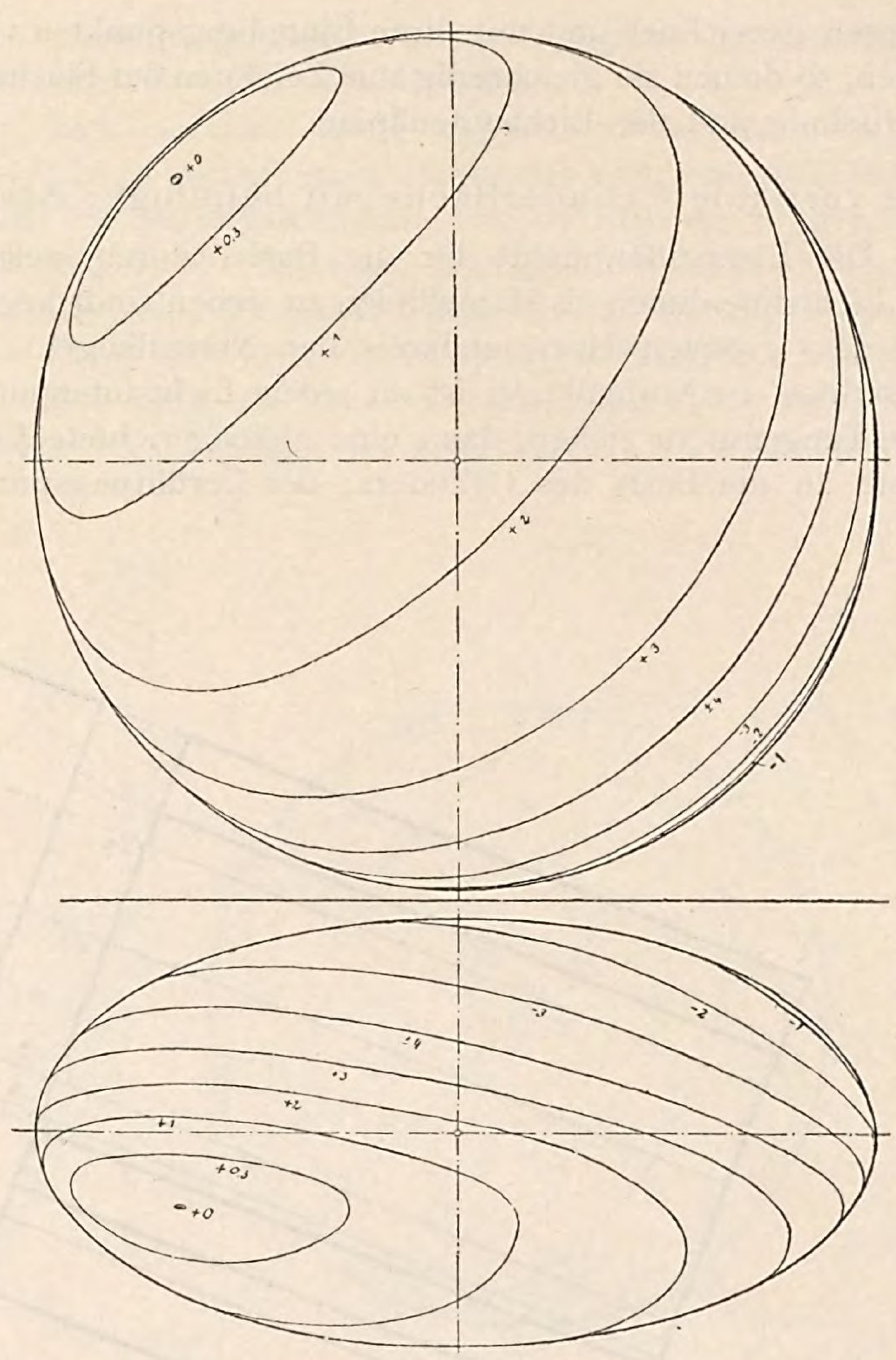
Die Anwendung der vorgeführten Lösung auf horizontale Drehungsflächen mit schiefgerichteter Achse bedarf keiner Erklärung.

Drehungsflächen mit beliebig schiefgerichteter, das heisst keiner Grundebene paralleler Achse bilden zeitraubende Probleme. Eine solche Fläche ist als gegeben zu betrachten durch die beiden Projektionen ihrer Achse und durch ihren Meridian. Ihr Umriss in jeder Projektion, nicht mehr durch Meridiane oder Parallelkreise gebildet, wird erhalten, indem man eine genügende Zahl von Parallelkreisen auswählt und deren elliptische, geometrisch ähnliche Projektionen auf der Grundebene zeichnet; die Umhüllungslinie dieser Ellipsen ist der Umriss der Fläche. Auf jeder solchen Ellipse sind zugleich die Lichtstufenpunkte in unten zu beschreibender Weise zu bestimmen und die gleichzahligen Punkte in Kurven zusammenzufassen.

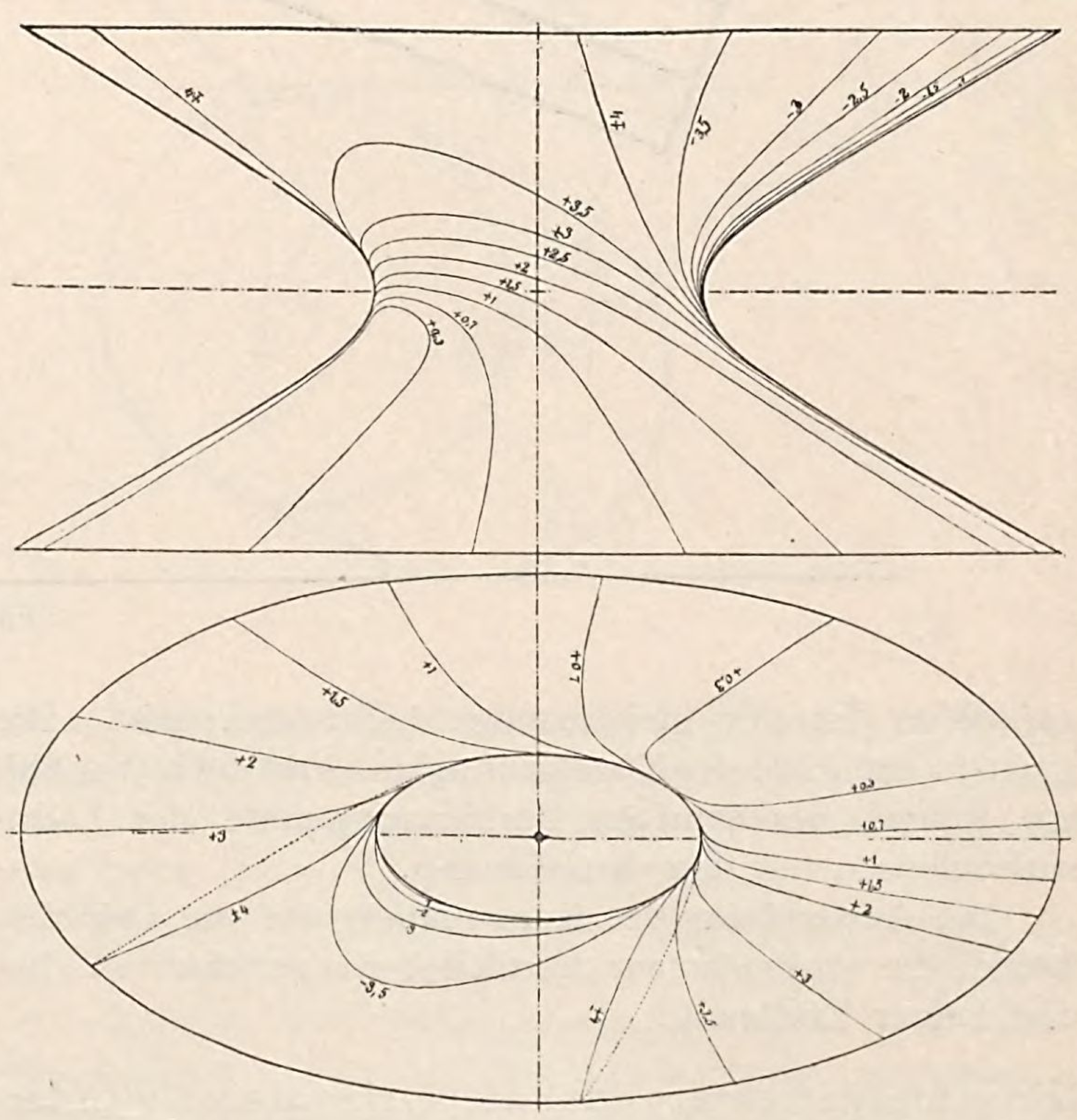
Man zeichnet die beiden Projektionen eines Durchmessers der Normalkugel parallel zur Achse der Drehungsfläche, fasst die Kugel als Drehungsfläche mit diesem Durchmesser als Achse auf und stellt den Flächenmeridianschnitt und den Kugelmeridianschnitt mit vertikalstehenden Achsen nebeneinander. In den für die Parallelkreise der Drehungsfläche ausgewählten Meridianpunkten zieht man Tangenten, dann parallele Tangenten an den Kugelmeridian und durch die Berührungspunkte beider Arten von Tangenten horizontale Sehnen. Diese Sehnen teilen die vertikalen Achsen beider Meridianschnitte nach zwei bestimmten Proportionen ein. In den gleichen Proportionen sind auch die zugehörigen Projektionen beider Achsen einzuteilen.

Für jeden Teilpunkt auf den Projektionen beider Achsen ist nun die elliptische Projektion des zugehörigen Parallelkreises zu zeichnen. Alle diese elliptischen Projektionen sind geometrisch ähnlich und gleich gerichtet; die genaue Bestimmung einer ersten nach Richtung und Achsenverhältnis gilt für alle andern. Die Lösung der Aufgabe, durch einen Punkt einer gegebenen Geraden als Mittelpunkt einen Kreis gegebener Grösse zu legen, dessen Ebene normal zur Geraden steht, ist in Art. 71 beschrieben und mit Figur 71e dargestellt.

Die elliptische Projektion eines Kugelkreises schneidet nun die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Wie die Kugelbildellipse durch diese Punkte eingeteilt ist, so ist auch die geometrisch ähnliche Flächenbildellipse, die derselben Tangentenrichtung entspricht wie die Kugelbildellipse, einzuteilen, das heisst, die Einteilungspunkte beider Ellipsen müssen ebenfalls geometrisch ähnlich liegen. Sind in dieser Weise alle Flächenbild-



Figur 103 a.



Figur 103 b.

ellipsen gezeichnet und mit ihren Einteilungspunkten versehen, so dienen sie gleichzeitig zum Zeichnen der Flächenumrisslinie und der Lichtstufenlinien.

98. Die vertikale Cylinderfläche mit beliebiger Basis.

Die Lichtstufenpunkte für die Basis, durch welche die Lichtstufenlinien als Mantellinien zu ziehen sind, liegen auf dem grössten Horizontalkreis der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel ist an jedem Lichtstufenpunkt eine Tangente zu ziehen, dann eine gleichgerichtete Tangente an die Basis des Cylinders; der Berührungspunkt auf dieser ist der gleichnamige Lichtstufenpunkt. Die Lichtstufenpunkte des Kugelgrundplans sind die in Fig. 88b mit Ringen bezeichneten Berührungspunkte der Lichtstufenellipsen mit dem Kugelumriss.

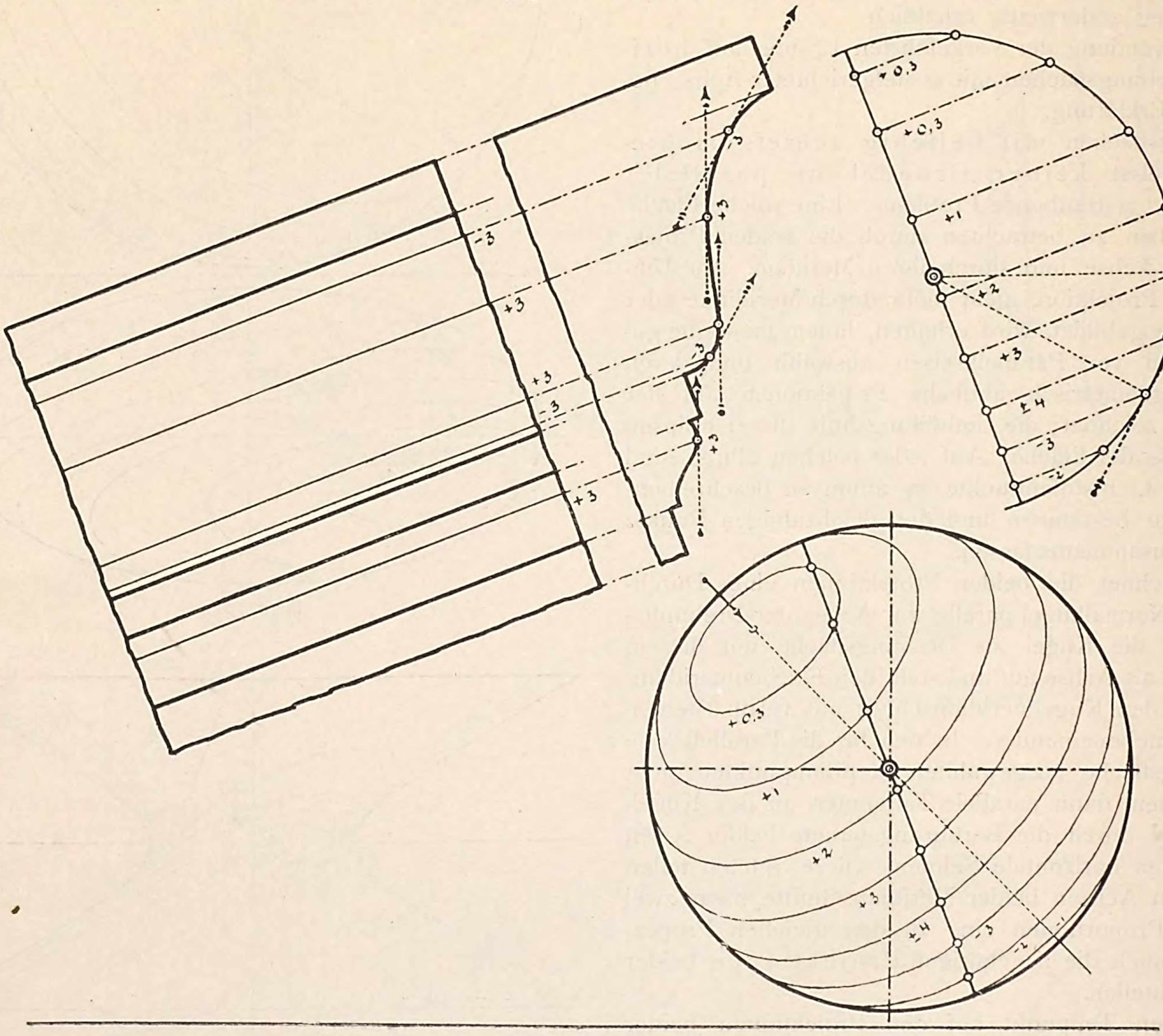
Die Anwendung der Konstruktion auf die Cylinderfläche, die senkrecht zur Vertikalebene gerichtet ist, bedarf keiner Erklärung.

99. Die schiefgerichtete oder die horizontale Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene mit beliebigem Normalschnitt.

Für diese Fläche kann entweder die Normalschnittlinie oder die Basis in der Horizontalebene gegeben sein; hier sei als häufig vorkommender Fall das erste vorausgesetzt (Fig. 99).

Der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ist ein Grosskreis, dessen Ebene parallel ist der Normalschnittebene der Cylinderfläche. Im Aufriss der Normalkugel erscheint er als Durchmesser parallel zur Normalschnittlinie der Cylinderfläche in deren Aufriss. Man klappt den Grosskreis samt seinen Lichtstufenpunkten um den Durchmesser, ebenso die Normalschnittebene samt der Profillinie darin um ihre Fusslinie in die Vertikalebene um. Wenn auf der Profillinie der Lichtstufenpunkt + 3 zu bestimmen ist, so zieht man im Punkt + 3 des umgeklappten Grosskreises eine Tangente und an die umgeklappte Profillinie eine parallele Tangente. Der Berührungspunkt dieser letzteren ist der Lichtstufenpunkt + 3 in der Umklappung; er ist noch zurückzuklappen in den Aufriss des Normalschnitts. In Figur 99 ist die Konstruktion für die Lichtstufenlinien + 3 und — 3 zur Anschauung gebracht; die Tangenten zur ersten sind mit einem Querstrich, die zur zweiten mit zwei Querstrichen bezeichnet.

Werden die Mantellinien der Cylinderfläche horizontal, also dem Grundschnitt parallel, so bringt dies keine Aenderung.

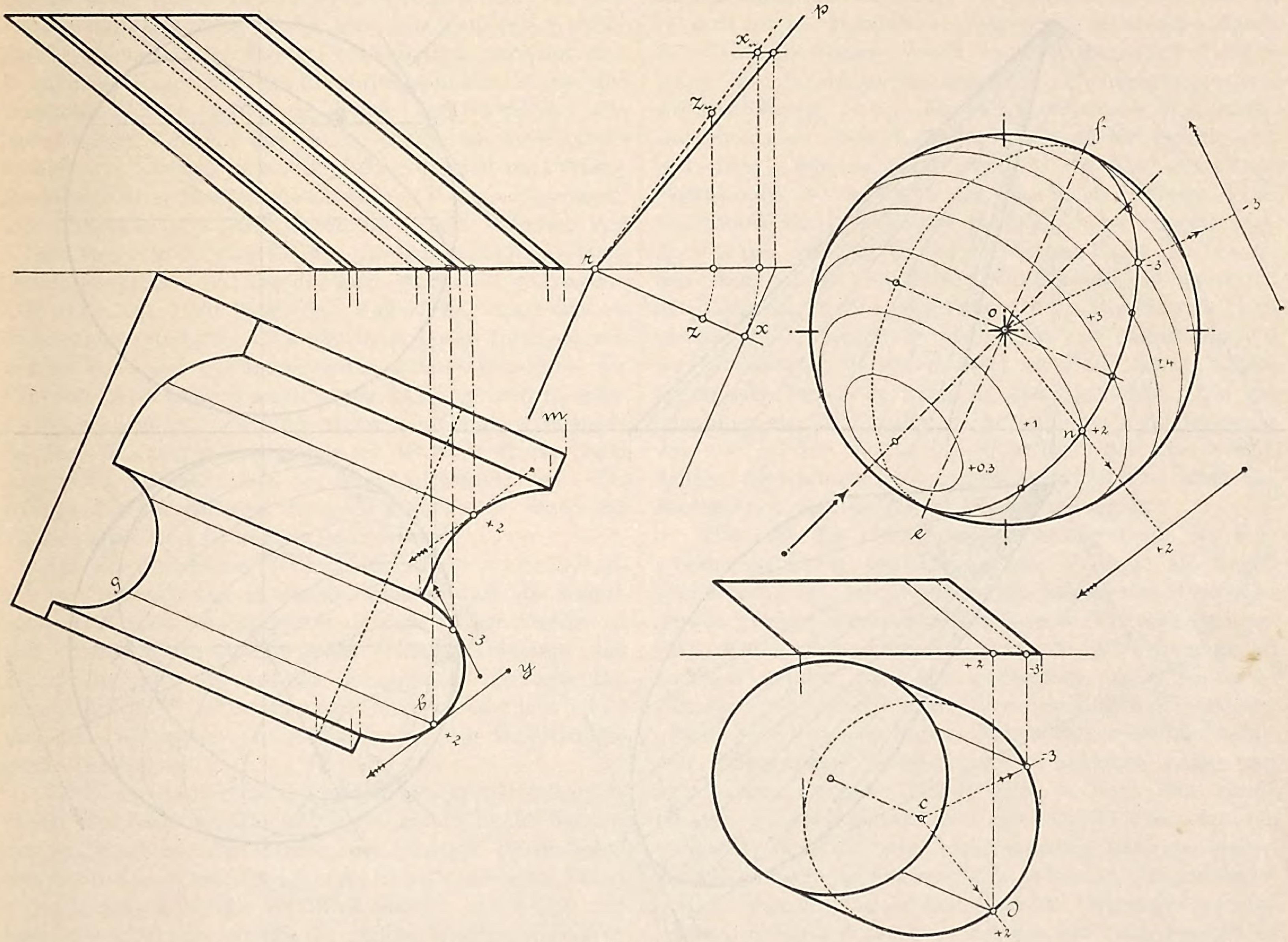


Figur 99.

100. Die beliebig schiefgerichtete Cylinderfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis.

Der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel (Figur 100) ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf den Mantellinien der Cylinderfläche. Die Spuren dieser Ebene *r m* und *r p* stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen der Mantellinien. Den Grosskreis zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel; er erscheint dort als Ellipse, deren grosse Achse den Berührungspunkt *b* dieser Tangente ist eine Lichtstufenlinie + 2 der Cylinderfläche.

Dies ist etwa durch folgendes zu beweisen. Wenn man durch irgend einen Punkt des Grosskreises eine Parallele zu den Mantellinien zieht, so ist diese Tangente an der Kugel; also ist auch eine solche durch *n* gezogene Parallele eine Tangente, und eine Berührungsebene an der Kugel im Punkt *n* enthält diese Parallele. Die Horizontalrichtung der Ebene ist dargestellt durch eine Senkrechte zum Radius *o n* (vergl. Art. 91). Die Berührungs-



Figur 100.

e f parallel ist der Horizontalspur *m r* der Ebene, und deren kleine Achse dadurch erhalten wird, dass man mit Hilfe eines beliebigen Vertikalschnitts *r x* der Ebene normal zu ihrer Horizontalspur ihre Gefällslinie umgeklappt in die Vertikalebene darstellt, auf der Umklappung $r\,x_{,,}$ den Normalkugelradius $r\,z_{,,}$ aufträgt und auf die Normalschnittlinie nach *r z* zurückklappt. Die Linie *r z* giebt nach Grösse und Richtung die kleine Halbachse der Ellipse. Schneidet nun der Grosskreis z. B. die Lichtstufenlinie + 2 der Normalkugel in einem Punkt *n*, so zieht man im Grundriss der Normalkugel den Radius nach *n* und an die Basislinie der Cylinderfläche eine Tangente *b y* senkrecht zu diesem Radius. Die Mantellinie durch ebene der Cylinderfläche im Punkt *b* geht durch die Mantellinie *g b* und die Tangente *b y*; beide Linien sind parallel den in der Berührungsebene der Kugel enthaltenen, also sind beide Berührungsebenen parallel.

Wird die Basis der Cylinderfläche kreisförmig (Fig. 100 rechts unten), so entfallen jene Tangenten; zu dem im Grundriss der Normalkugel gezogenen Radius *o n* ist nur im Basiskreis des Cylinders ein paralleler Radius *c d* zu ziehen; dieser giebt in seinem Endpunkt *d* den Lichtstufenpunkt + 2.

Der gerade elliptische Kegel mit vertikaler Achse. 101.

Man zeichnet ein Drehungsellipsoid mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, dessen Umriss im Grundriss eine

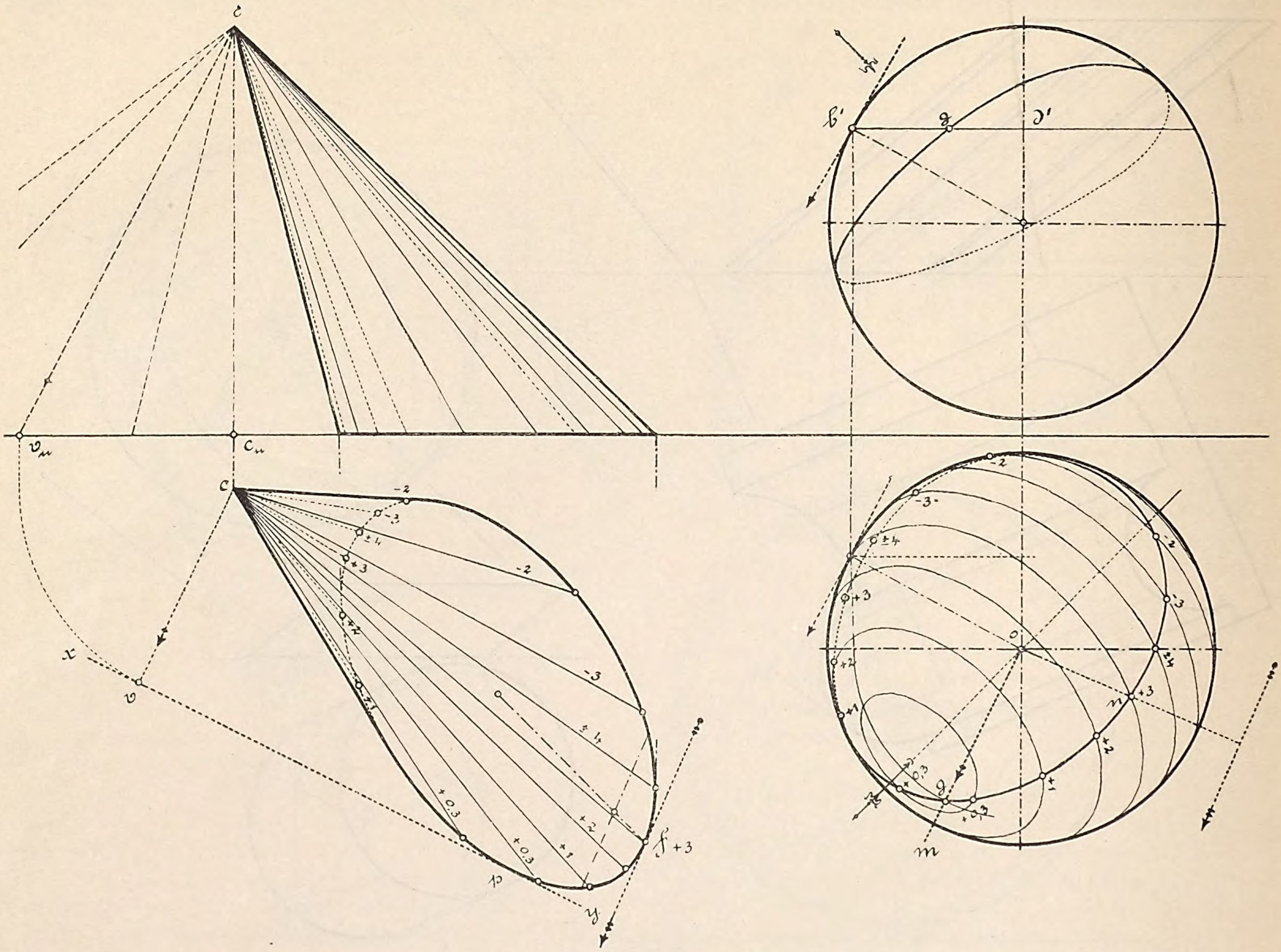
Ellipse mit demselben Achsenverhältnis ist wie die Basisebene des Kegels. In diesem Grundriss bestimmt man die Lichtstufenlinien des Ellipsoids nach Art. 96 mit Hilfe der sechs Strahlenbüschel. Auf dieses Ellipsoid denkt man sich den Kegel gestülpt. Die Berührungslinie zwischen beiden Körpern ist eine etwas kleinere horizontale Ellipse vom gleichen Achsenverhältnis wie der Umriss des Ellipsoids. Die grosse Achse dieser Ellipse erhält man, indem man im Aufriss das Aufstülpen des Kegels mit dessen breitestem Umrissbild zeichnet; die Strecke zwischen den Berührungspunkten ist diese grosse Achse. Im Grundriss erscheint die Berührungsellipse konzentrisch zum Umriss des Ellipsoids; wo sie dessen Lichtstufenlinien schneidet, da sind die Lichtstufenpunkte für den gleich grossen Horizontalschnitt des Kegels, die ohne Eingehen auf den Aufriss des Ellipsoids in den Aufriss des Kegels übertragen und dort zum Zeichnen der Mantellinien, welche Lichtstufenlinien sind, verwertet werden können. Die Berührungsellipse wird zur gegebenen Basis des Kegels, wenn man gleich anfangs den Aufriss des Ellipsoids so gross wählt, dass er die äussersten Mantellinien des in der breitesten Ansicht gezeichneten Kegels in deren Fusspunkten berührt. Ein Drehungsellipsoid wie das hier notwendige ist mit dem Achsenverhältnis 1 : 2 in Figur 103a (Seite 107) dargestellt.

Eine andere Lösung für den elliptischen Kegel ist die allgemeine für Kegelflächen nach Art. 102.

Die Kegelfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis. 102.

Man sucht zunächst auf der Normalkugel den geometrischen Ort der Berührungspunkte der Ebenen, welche den Berührungsebenen an der Kegelfläche parallel sind und zwar in folgender Weise. Während bei fast allen andern hier behandelten Flächen, selbst bei Schraubenflächen, Konoidflächen u. s. w., dieser geometrische Ort für eine bestimmte Linie auf der Fläche als Grosskreis oder Parallelkreis erhalten werden kann, ergiebt sich für den allgemeinen Fall der Kegelflächen immer eine doppelt gekrümmte Linie auf der Normalkugel, und es erweist sich hiedurch die Kegelfläche, abgesehen vom geraden Kreiskegel, als ein verhältnismässig schwieriger Gegenstand der Beleuchtungskunde.

Mit beliebiger Richtung und ohne Bestimmung des Berührungspunktes wird an die Kegelbasis (Figur 102)



Figur 102.

eine Tangente xy gezogen und von der Spitze des Kegels aus eine Senkrechte im Raum auf diese Tangente gefällt gedacht. Diese Senkrechte, die auch im Grundriss als eine Senkrechte cv auf der Tangente erscheint, ist die Gefällslinie der Berührungsebene, die durch den (unbestimmten) Basispunkt p an die Kegelfläche gelegt wird und diese längs der Mantellinie dieses Basispunktes berührt. Die Horizontalneigung dieses Lotes ergiebt sich als spitzer Winkel am Fuss eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen horizontale Kathete $c_{\prime\prime} v_{\prime\prime}$ die Senkrechte cv aus dem Grundriss und dessen Höhe gleich der Höhe des Kegels ist. An den Aufriss der Normalkugel zieht man eine Tangente parallel zur Hypotenuse $c' v_{\prime\prime}$ dieses Dreiecks und bestimmt den Horizontalabstand $d' b'$ des Berührungspunktes b' von der vertikalen Achse der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel wird ein Radius om parallel zu jener Senkrechten cv gezogen und auf diesem Radius vom Mittelpunkt aus jener Horizontalabstand $d' b' = og$ aufgetragen. Der Endpunkt g ist der Berührungspunkt zwischen der Normalkugel und einer Ebene, die der Berührungsebene am Kegel parallel ist; dieser Punkt giebt also an, welche Lichtstufe die Mantellinie des Kegels im ausgewählten Basispunkt p darbietet. Wendet man dieses Verfahren auf weitere Basispunkte p an, so finden sich im Grundriss der Normalkugel weitere Berührungspunkte g, welche in einer Kurve zusammengefasst den anfangs genannten geometrischen Ort ergeben. In Figur 102 ist diese Kurve auch im Aufriss bestimmt, wo sie nicht verwertet wird. Ein Aufriss der Normalkugel ist ganz entbehrlich, wenn die Tangente an den Grundriss gezogen wird.

Die Kurve schneide die Lichtstufenlinie + 3 im Grundriss der Normalkugel in einem Punkt n. An die Kegelbasis zieht man eine Tangente normal zu dem Radius on und erhält im Berührungspunkt f dieser Tangente den Lichtstufenpunkt + 3 auf der Kegelbasis. (Scharfe Bestimmung von f durch eine zur Tangente parallele Sehne und den Halbmesser der Ellipse nach dem Halbierungspunkt der Sehne.)

Die Konstruktion beruht darauf, dass jede Berührungsebene des Kegelmantels in irgend einem Punkt der auf der Kugel gefundenen Kurve eine parallele Berührungsebene der Kugel finden muss, und dass die zu einem Punkt f des Kegels gehörige Berührungsebene der Kugel nur diejenige sein kann, welche die gleiche Horizontalrichtung hat, wie die Berührungsebene des Kegels in f.

103 Das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das einmantelige elliptische Hyperboloid.

Auch auf diesen Körpern lassen sich die Lichtstufenlinien auf kürzestem Weg mit Hilfe des in Art. 101 beschriebenen Drehungsellipsoids mit Achse senkrecht zur Vertikalebene erhalten, indem man jede horizontale Schnittellipse der Körper als einen sehr niedrigen Kegelrumpf auffasst und auf diesem die Lichtstufenpunkte bestimmt wie für den elliptischen Kegel gezeigt worden ist. Uebrigens verlohnt es sich hier mehr, auch den Aufriss des Drehungsellipsoids mit den Lichtstufenlinien zu zeichnen und dann zu benützen wie den Aufriss der Normalkugel bei Drehungsflächen mit vertikaler Achse nach Art. 93. Die Figur 103a (Seite 107) zeigt das benützte Drehungsellipsoid, 103b das elliptische Hyperboloid; die Schattierung beider Körper ist durchgeführt auf der ersten Lichtdrucktafel.

Das windschiefe Viereck oder hyperbolische Paraboloid. 104.

Das hyperbolische Paraboloid ist als Gegenstand der Schattenkonstruktion in Art. 69e behandelt, und zwar ist es dort als Rückungsfläche aufgefasst, entstanden durch die Parallelbewegung einer horizontalliegenden Parabel längs einer andern vertikalstehenden mit entgegengesetzter Achsenrichtung. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien ist diese Auffassung die nächstliegende und einfachste. Wie nach Art. 69e für die Körperschattenbestimmung, so ist auch für das neue Problem jeder Horizontalschnitt der Fläche zu erklären als eine niedrige Zone eines schiefen Cylinders, dessen Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinienrichtung durch die Tangente an der festen Parabel im Punkte des Horizontalschnitts dargestellt wird. Wo die Lichtstufen auf der horizontalen Parabel als auf der Basis des Cylinders liegen, da liegen sie auch für das Paraboloid. Die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf dem Cylinder ist in Art. 100 erklärt, vereinfacht sich aber dem dort behandelten allgemeinen Fall gegenüber dadurch, dass die Mantellinien parallel zur Vertikalebene liegen.

Hier sei die Lichtstufenbestimmung auch für eine zweite Auffassung der Fläche, für diejenige als Regelfläche betrachtet, nach welcher sie, abgegrenzt durch vier gerade Linien, auch das „windschiefe Viereck“ genannt wird. Ein solches erzeugt sich, indem eine Gerade gleitet an zwei andern, räumlich getrennten, nicht parallelen Geraden und dabei immer einer bestimmten Ebene, der „Richtebene“ parallel bleibt. Neben dieser ersten Gruppe von Erzeugenden, welche die verschiedenen Lagen der beweglichen Geraden bilden, giebt es noch eine zweite Gruppe gerader Mantellinien auf der Fläche, dadurch bestimmt, dass die zwei ursprünglichen Leitlinien selber auf zwei beliebigen Erzeugenden der ersten Gruppe derart gleiten, dass sie immer einer zweiten Richtebene parallel bleiben, nämlich derjenigen, welcher jene beiden Leitlinien gemeinschaftlich parallel sind.

Die Fläche findet in der Technik höchst selten Verwertung, in der Baukunst etwa als windschiefe Dachfläche zwischen zwei gleich hohen, aber verschieden breiten Giebeln eines Hauses, wobei die erste Gruppe von Erzeugenden dargestellt ist durch die geneigten Dachsparren, die zweite durch die horizontalen Pfetten und Dachlatten, so dass ein solches Dach, obgleich eine gekrümmte Fläche, doch durchaus aus geraden Hölzern hergestellt werden kann. Hierin erscheint der besondere Fall, dass die beiden Richtebenen senkrecht zu einander stehen. Anlehnend an dieses Beispiel sei hier eine Fläche gewählt, deren Richtebenen die horizontale Grundebene und die Seitenprojektionsebene bilden, die also im Aufriss als ein rechtwinkliges Netz von Horizontalen und Vertikalen sich dar-

stellt. Im Grundriss und Seitenriss erscheint die Projektion je als Strahlenbüschel mit Scheitelbüschel, durchschnitten von vertikalen, beziehungsweise horizontalen Linien.

Die Berührungsebene an der Fläche in einem ihrer Punkte ist bestimmt durch die beiden Erzeugenden *H* (die horizontale) und *G* (die geneigte), die durch den Punkt gehen. Denkt man sich den Punkt der Normalkugel, in dem sie von einer gleichgerichteten Ebene berührt wird, so findet sich, dass der horizontale Parallelkreis der Normalkugel in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie *H* hat, und der senkrecht zum Grundschnitt stehende Parallelkreis in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie *G* hat. Verschiedenen Punkten der Linie *H* entsprechen verschiedene horizontale, im Grundriss konzentrische Parallelkreise mit parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte im Grundriss der Normalkugel auf einem zur Linie *H* senkrecht stehenden Radius erscheinen müssen, also im Raum auf einem vertikalen Meridian der Normalkugel liegen. Hieraus folgt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine horizontale Erzeugende der windschiefen Fläche sind auf einem Meridian der Normalkugel zu suchen, dessen Vertikalebene senkrecht zu dieser Erzeugenden steht.“ In derselben Weise lässt sich ableiten, indem man sich die oben genannten vertikalen Parallelkreise in der Seitenansicht der Normalkugel gezeichnet denkt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine geneigte Erzeugende der windschiefen Fläche liegen auf einem Grosskreis der Normalkugel, dessen Ebene normal steht zu der Erzeugenden.“ Man kann den einen oder andern Satz zur Konstruktion verwerten, im folgenden ist der erste gewählt.

Ein vertikalstehender Meridian, der in der vorbeschriebenen Weise einer zu seiner Ebene senkrechten horizontalen Erzeugenden *H* der Fläche entspricht, schneidet die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Durch jeden dieser Punkte ist ein vertikaler Parallelkreis der Kugel senkrecht zum Grundschnitt zu zeichnen; für jeden dieser Punkte ist ferner zu bestimmen, welche Neigung gegen die Horizontalebene die Tangente an diesem Parallelkreis in ihm darbietet. Sucht man die geneigte Mantellinie der windschiefen Fläche auf, welche mit dieser Tangente gleiche Neigung hat, so schneidet diese Mantellinie die ausgewählte horizontale Erzeugende *H* in einem Lichtstufenpunkt, der gleichnamig ist mit dem Punkt der Normalkugel, durch welchen der vertikale Parallelkreis gelegt worden ist.

Zur graphischen Durchführung der Konstruktion zeichnet man sich Aufriss und Seitenriss der Fläche mit vielen dichtstehenden geneigten Mantellinien bei wenigen horizontalen Erzeugenden, und fügt in der Seitenansicht zu jeder der ersteren eine Senkrechte, indem man diese Senkrechten gut getrennt hält und wie die Geneigten in der Vorderansicht numeriert. Die Meridiane zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel, wo sie als Radien erscheinen; die vertikalen Parallelkreise zeichnet man im Grundriss und in der Seitenansicht samt dem Lichtstufenpunkt, der auf jedem erscheint, indem man jedem Parallelkreis den Buchstaben der horizontalen Erzeugenden und die Nummer der Lichtstufe beifügt, zu welcher er gehört. Dann sieht man zu, welche von jenen Senkrechten im Seitenriss der Fläche einem Radius nach einem Lichtstufenpunkt in einem Parallelkreis ganz oder annähernd parallel ist. Die zu der Senkrechten gehörige geneigte Erzeugende schneidet die zu dem Parallelkreis gehörige horizontale Erzeugende in einem Lichtstufenpunkt, der mit demjenigen auf dem Parallelkreis gleichnamig ist. Findet sich keine genau parallele Senkrechte für einen der Parallelkreisradien, so gestattet das Verfahren ein Einschätzen der Lichtstufenpunkte zwischen zweien der geneigten Mantellinien mit genügender Genauigkeit. Andernfalls hat man senkrecht zu diesem Radius eine Mantellinie der Fläche in deren Seitenriss zu ziehen und die Projektion dieser Mantellinie im Aufriss zu bestimmen.

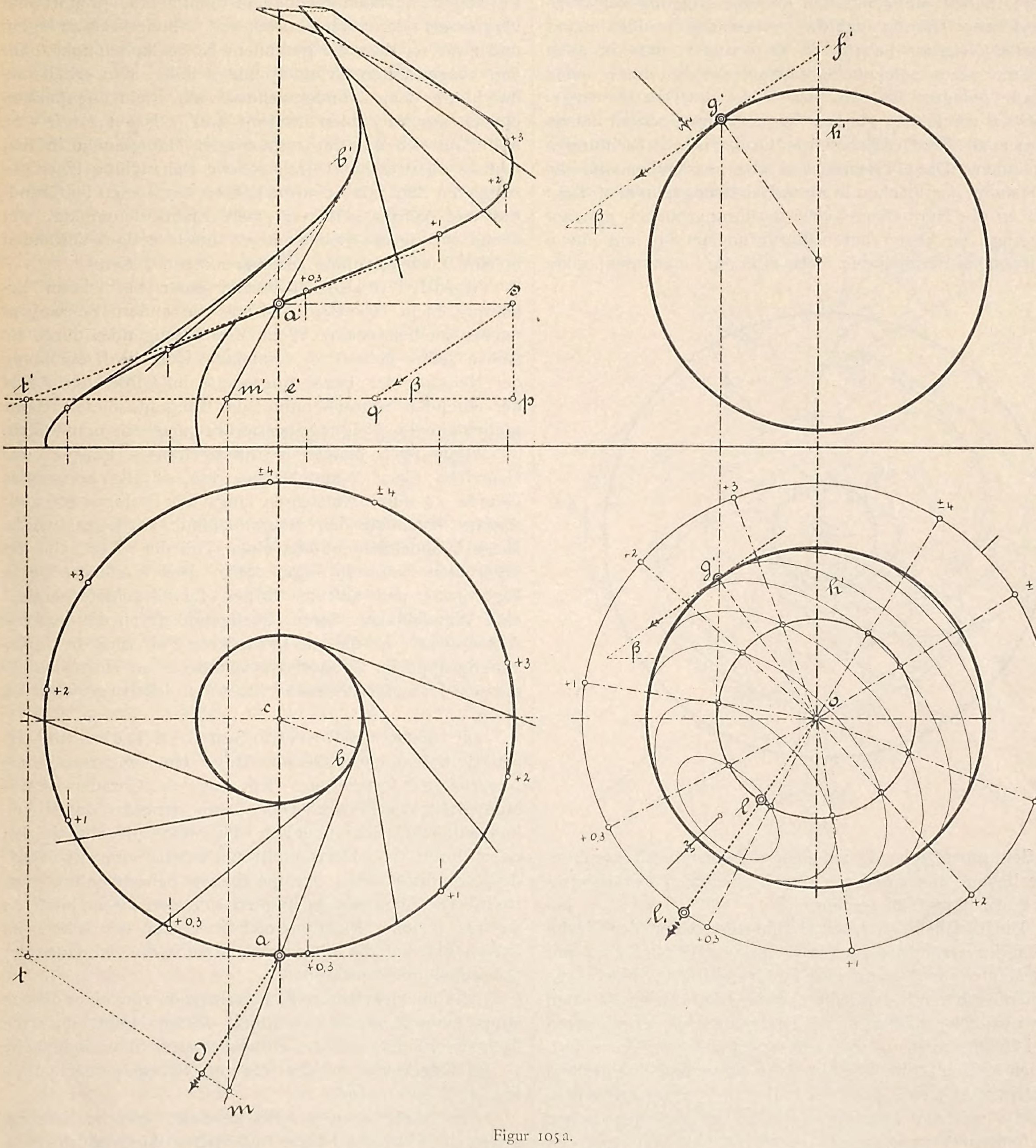
Für die beschriebene Erzeugung der Fläche wird die Kurve $\pm$ 4 im Aufriss eine zum Lichtstrahl normale Gerade, im Grundriss eine Parabel, also im Raum eine Parabel, wie bei der andern Erzeugungsweise nach Art. 69e. Nach einem oberflächlichen Versuch scheint auch die Linie + 1,7 im Aufriss eine Parabel zu werden, deren Scheitel gegen jene Gerade gerichtet ist; die Linien zwischen + 1,7 und $\pm$ 4 scheinen im Aufriss Hyperbeln zu sein, zwischen beiden zuvorgenannten Linien gelegen, mit Scheitel gegen die Gerade und um so flacher werdend, je mehr sie sich ihr nähern. Zwischen dem hellsten Punkt und + 1,7 dürften sich Ellipsen bilden, mit der grossen Achse senkrecht zur Geraden $\pm$ 4, und jenseits dieser Geraden für — 3,5 — 3 und — 2,5 u. s. f. wieder Hyperbeln mit Scheiteln gegen die Gerade; doch fällt die Linie — 1,7 schon ganz ins Unendliche. Das ganze Lichtstufensystem hat im Aufriss eine Symmetralachse senkrecht zu $\pm$ 4, also in der Richtung der Lichtstrahlprojektion.

Der allgemeine Fall der windschiefen Fläche, bei welchem die zweite Richtebene nicht senkrecht zur Horizontalebene als der ersten Richtebene steht, wenn sie auch noch normal zur Vertikalebene bleibt, erfordert anstatt der Seitenprojektion der Fläche und der Parallelkreise eine Projektion beider auf die Richtebene, auf welcher sich die Parallelkreise wieder als Kreise darstellen; im übrigen ändert sich der Gang der Lösung nicht.

Schraubenflächen, Wendelflächen. 105.

Schrauben- und Wendelflächen sind in Art. 70 nach ihrer Entstehungsweise erklärt und als Gegenstände der Schattenkonstruktion behandelt. Zum Zweck enger Begrenzung der Anschauung mögen auch hier die Achsen der leitenden Schraubenlinien und also der Flächen selber vertikal gedacht werden (Figur 105a). Alle Arten von Schraubenflächen haben das Gemeinsame, dass sie von konzentrischen Kreiscylindern, deren Achsen mit denen der gegebenen Schraubenlinien zusammenfallen, nach Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, aber verschiedenen Neigungen geschnitten werden. In einem beliebigen Punkt *aa* einer solchen Fläche ist die Berührungsebene bestimmt einerseits durch die erzeugende Gerade *a b a' b'*, die durch den Punkt geht, andererseits durch die Tangente *a t a' t'* an der Schraubenlinie, welche der durch den Punkt gelegte konzentrische Kreiscylinder als Schnitt mit der Fläche liefert.

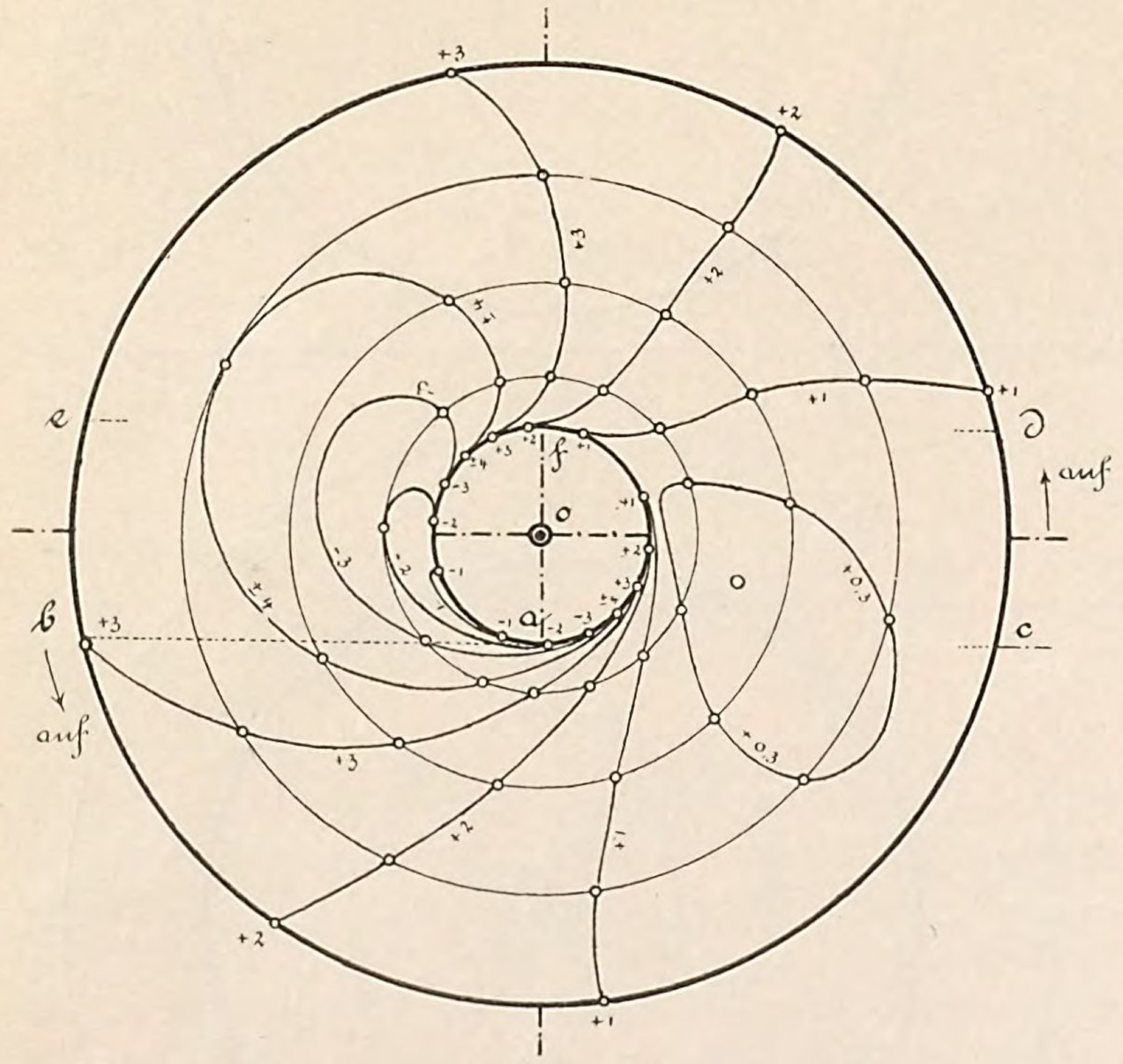
Es ist also, sobald für einen beliebigen Punkt der Fläche die Projektionen dieser beiden Geraden bekannt sind, nur noch das Problem zu lösen: „Die Lichtstufe einer Ebene zu bestimmen, die durch die Projektionen zweier sich schneidender Geraden gegeben ist.“ Diese Aufgabe ist in Art. 91 behandelt. Wenn in der Vertikalprojektion die beiden Geraden durch eine beliebige Horizontallinie $m' t'$ geschnitten und die Punkte $m' t'$ in den Grundriss nach $m t$ gelotet werden, so ist $m t$ die horizontale Richtungslinie der Berührungsebene und die dazu Senkrechte $a d$ der Grundriss der Gefällslinie. Im Dreieck $s p q$ ist $q p = a d$, $s p = a' e'$, also β der Neigungswinkel der Gefällslinie oder Berührungsebene. An den Aufriss der Normalkugel (oder an den zeitweilig als Aufriss aufgefassten Grundriss) ist eine Tangente $f' g'$ parallel zu $s q$ zu ziehen, woraus der Radius $h' g'$ für den horizontalen Parallelkreis des Lichtstufenpunktes erhalten wird. Der im Grundriss in diesem Kreis parallel zu $a d$ gezogene



Figur 105 a.

Radius $o\,l$ liefert den Lichtstufenpunkt l, der dem Flächenpunkt a entspricht.

In allen Punkten einer Schraubenlinie, die ein bestimmter Schnittcylinder der obengenannten Stellung liefert, haben die Tangenten dieselbe Neigung zur Horizontalebene. Da nun auch die erzeugenden Geraden immer dieselbe Neigung haben, so ist deutlich, dass in allen Punkten einer solchen Schraubenlinie die durch beide Gerade gelegten Ebenen, das heisst die Berührungsebenen der Fläche gleiche Neigung zum Horizont haben, wenn auch ihre Gefällslinien im Grundriss alle Richtungen annehmen. Diese Ebenen sind aber massgebend für die Lichtstufen der Flächen in ihren Berührungspunkten. Legt man an die Normalkugel viele Berührungsebenen gleicher Neigung, so liegen deren Berührungspunkte auf einem horizontalen Parallelkreis. Also sind die Lichtstufenpunkte



Figur 105 b.

der Schraubenfläche, die auf einer und derselben Schraubenlinie liegen, alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der Normalkugel zu suchen.

Die Gefällslinien jener Berührungsebenen der Fläche bilden im Grundriss immer denselben Winkel $d\,a\,b$ mit den Mantellinien; wenn also im Grundriss der Fläche die Radien nach den Fusspunkten zweier Mantellinien $c\,a$ einen Centriwinkel γ bilden, so schliessen auch die zugehörigen zwei Gefällslinien $a\,d$ und mit diesen die zwei ihnen parallelen Radien $o\,l$ im Grundriss der Normalkugel denselben Centriwinkel γ ein. Soviel sich also die zu einem Flächenpunkt a gehörige Mantellinie dreht, um zu einem neuen Flächenpunkt zu gelangen, soviel dreht sich auch im Grundriss der Normalkugel der Radius nach dem zu a gehörigen Lichtstufenpunkt, um zum Lichtstufenpunkt des neuen Flächenpunktes zu gelangen.

Aus beiden Betrachtungen ergiebt sich der Grundgedanke der Konstruktion wie folgt: Wenn einer der obengenannten Schnittcylinder im Grundriss gezeichnet und für einen Punkt $a\,a'$ des Cylinders nach der zuvor gegebenen Vorschrift der gleichhelle Punkt l der Normalkugel in deren Grundriss bestimmt ist, so hat man nur den horizontalen Normalkugelparallelkreis, der durch diesen Punkt geht, mit allen seinen Lichtstufenpunkten proportional vergrössert oder verkleinert auf den Cylinderkreis zu legen, und zwar so, dass der gefundene Normalkugelpunkt l_1 auf den ausgewählten Cylinderpunkt a fällt. Man erhält hiedurch auf dem Cylindergrundriss alle Lichtstufenpunkte, die mit ganzen Zahlen benannt sind (z. B. $a + 2 = l_1 + 2$), und kann sie auf die zugehörigen Mantellinien in den Aufriss übertragen. Durch gleiche Behandlung einer genügenden Zahl von Schnittcylindern erscheinen im Grundriss und Aufriss genügend viele Lichtstufenpunkte, von denen sich je die gleichnamigen durch stetiges Verbinden in eine Lichtstufenlinie zusammenfassen lassen.

Wendelflächen bedürfen einer besonderen Erklärung nicht, sondern sind wie die andern Schraubenflächen zu behandeln. Wenn ihre Erzeugenden durch die Achse selber gehen, so vereinfacht sich die Bestimmung der Neigung der Berührungsebene im vordersten Punkt der leitenden Schraubenlinie; die Tangente dieser letzten giebt dann die Neigung der Berührungsebene unmittelbar.

Figur 105 b bietet als durchgeführtes Beispiel den Grundriss einer Wendelfläche, wie sie die horizontale Gerade $a\,b$ durch Aufsteigen längs der in Figur 106 a als Aufriss erscheinenden Schraubenlinie erzeugen würde. Diese Wendelfläche bildet einen Teil der Oberfläche des verdrehten Stabs in Figur 106 a. Die Wendeltreppe in Figur 106 c und auf der dritten Lichtdrucktafel enthält eine Wendelfläche, deren Erzeugende durch die vertikale Achse geht. In diesem besonderen Fall wird die Lichtstufengruppe im Grundriss symmetrisch zu einem Durchmesser, der senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist.

Die entwickelbare Schraubenfläche wird erzeugt, indem eine Gerade längs einer Schraubenlinie berührend fortschreitet. Jede Lage der Geraden ist eine Mantellinie der Fläche. Diese kann entweder durch eine konzentrische Schraubenlinie begrenzt gedacht werden oder durch ihre Horizontalspur, welche eine Evolvente des Grundrisskreises der gegebenen Schraubenlinie darstellt. Die Mantellinien können sich von dieser letzteren aus nur in einer Richtung oder in beiden erstrecken; im letzten Fall hat die Fläche zwei Mäntel, die sich längs der Schraubenlinie berühren.

Alle entwickelbaren Flächen werden von einer Ebene längs einer Mantellinie berührt. Daraus folgt, dass die Lichtstufenlinien auf der entwickelbaren Schraubenfläche — im Gegensatz zu den übrigen Schraubenflächen — Mantellinien sind.

Alle Mantellinien der Fläche haben gleiche Neigung gegen die Horizontalebene und stehen im Grundriss normal zu der Evolvente, welche die Horizontalspur der Fläche darstellt. Daraus folgt, dass sich jede Mantellinie als ein sehr schmaler Ausschnitt des Mantels eines geraden vertikalen Kreiskegels auffassen lässt, dessen Mantellinien gleiche Neigung haben wie diejenigen der Schraubenfläche, und wie sich eine solche Mantellinie schattiert als

Bestandteil ihres Kegels, so schattiert sie sich auch als Bestandteil der Schraubenfläche.

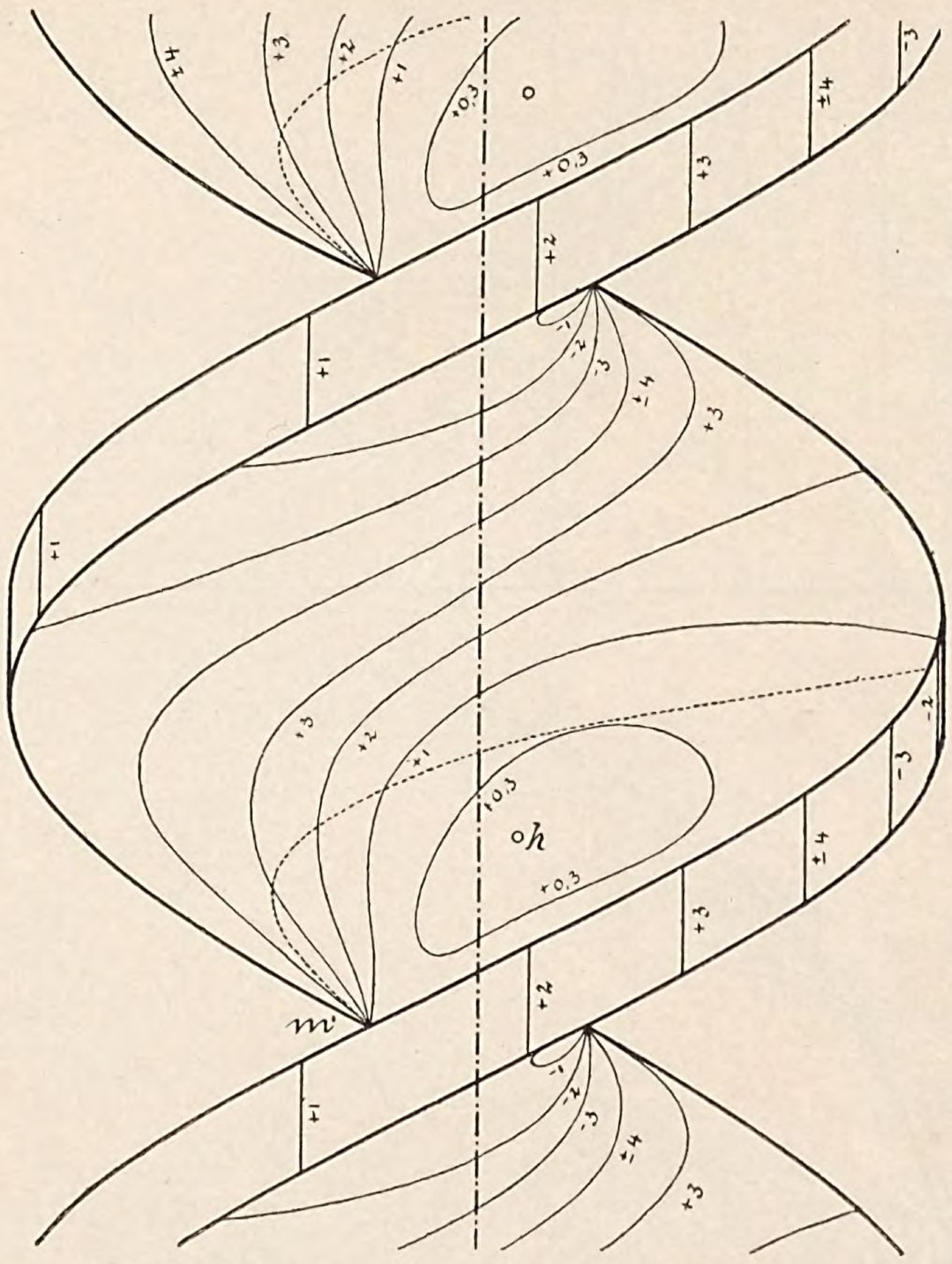
Die Neigung der Mantellinien erscheint unmittelbar in den äussersten Mantellinien der Fläche im Aufriss; aus dieser Neigung ergiebt sich der horizontale Parallelkreis der Normalkugel, auf welchem die Lichtstufenpunkte zu suchen sind. Zeichnet man den geraden vertikalen Kreiskegel, der die Normalkugel längs dieses Parallelkreises berührt, samt den Mantellinien dieses Kegels nach den Lichtstufenpunkten des Parallelkreises, so hat man nur im Aufriss der Schraubenfläche die gleichgerichteten Mantellinien zu ziehen, um in ihnen die gleichnamigen Lichtstufenlinien der Fläche zu erhalten. Will man sie zuerst oder nur im Grundriss haben, so zieht man im Grundriss der Normalkugel die Radien des Parallelkreises nach dessen Lichtstufenpunkten und dann die dazu parallelen Mantellinien der Fläche in deren Grundriss. Bei der Fläche mit zwei Mänteln ist eine Lichtstufenlinie des unteren nicht auch eine gleichnamige Linie des oberen, weil bei jenem die Spitze des Hilfskegels nach oben, bei diesem nach unten gerichtet ist.

106. Stabformen mit drehend fortschreitendem Querschnitt oder Achsenschnitt. Ringförmig steigendes Tonnengewölbe.

Ein (wagrecht gedachtes) regelmässiges oder unregelmässiges Vieleck, oder ein Rechteck, oder ein Vieleck, dessen gerade Seiten durch bogenförmige konkave oder konvexe Linien ersetzt sind, rückt auf einer senkrecht zu seiner Ebene stehenden Achse derart parallel fort, dass seine Ecken Schraubenlinien beschreiben. Derartige Gebilde sind in der spätgotischen und spätromanischen Architektur, ferner in den Arbeiten des Drehers und Kunstschlossers, endlich im Maschinenbau verwirklicht. Für konkave schraubend fortschreitende Linien können etwa Säulen mit gewundener Kannellierung als Beispiele dienen.

Sind die Seiten der beweglichen Figur gerade, so beschreiben sie Wendelflächen, und die Lichtstufenlinien lassen sich dann konstruieren wie oben in Art. 105 beschrieben, sobald eine genügende Zahl von Punkten (worunter der Halbierungspunkt) auf der Polygonseite angenommen und die Neigungen der von diesen Punkten beschriebenen Schraubenlinien bestimmt worden sind. Für die Halbierungspunkte werden die Berührungsebenen vertikal, und die Lichtstufenpunkte finden sich auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel ganz wie für einen Cylinder vom gleichen Durchmesser wie die von den Halbierungspunkten beschriebene Schraubenlinie.

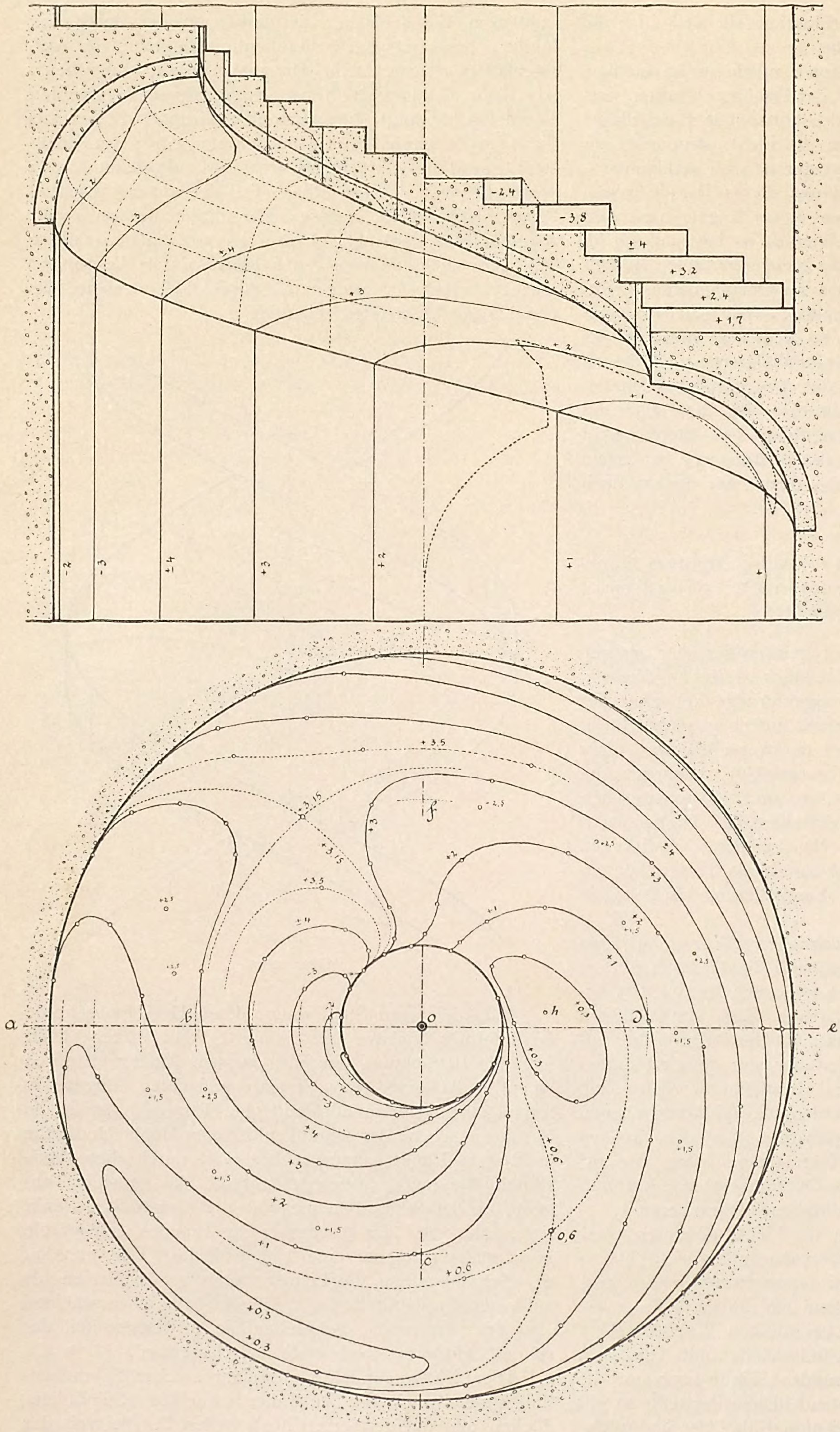
In Figur 106a erscheinen die Lichtstufenlinien einer Stabform, welche entsteht, wenn das in Figur 105b dargestellte Rechteck *b c d e* mit zwei geraden und zwei bogenförmigen Seiten sich schraubend um die vertikale Achse *o* dreht. Die geraden Seiten beschreiben Wendelflächen, die bogenförmigen eine Cylinderfläche mit vertikalen Lichtstufenlinien. Da der Grundriss Figur 105b nur die vom Arm *a b* beschriebene Wendelfläche darstellt, so gilt dieser Grundriss nur für diejenige Hälfte der im Aufriss sichtbaren Wendelfläche, die links von der durch den Punkt *a* beschriebenen Schraubenlinie liegt und im Aufriss als Unterfläche auftritt. Die vom Arm *a c* beschriebene, von oben sichtbare Hälfte der im Aufriss erscheinenden Wendelfläche folgt einem zweiten Grundriss, der aus Figur 105b durch deren Umlegen um einen zur Lichtstrahlprojektion senkrechten Durchmesser abgeleitet werden kann. Der von oben sichtbare Teil der von *a b* beschriebenen Fläche ist im Aufriss immer durch die von *a c* erzeugte Fläche verdeckt, ebenso der von unten sichtbare Teil der von *a c* beschriebenen Fläche durch die von *a b* erzeugte. Auf der zweiten Lichtdrucktafel erscheint das Gebilde mit Lichtstufen schattiert.



Figur 106a.

Für diejenigen Stabformen, deren Horizontalschnitte bogenförmig konkave oder konvexe Seiten haben, kann folgende Betrachtung den Weg weisen. Zieht man durch einen Punkt eines (etwa konkav gedachten) Bogens in irgend einem Horizontalschnitt eine Tangente, so ist die Berührungsebene der schraubenförmigen Hohlkehlenfläche in diesem Punkt einerseits bestimmt durch diese horizontale Tangente, andererseits durch die geneigte Tangente an der Schraubenlinie, die der ausgewählte Punkt beschreibt. Bei der Bewegung des Punktes erzeugt die horizontale Tangente eine Wendelfläche. Wie nun auf der Schraubenlinie die Lichtstufenpunkte erscheinen als auf einem Bestandteil dieser Wendelfläche, so erscheinen sie auch, wenn die Schraubenlinie als Bestandteil der schraubenförmigen Hohlkehle aufgefasst wird.

Die Lichtstufenpunkte auf einer solchen Schraubenlinie sind also wie bei den früher betrachteten Schraubenflächen alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der



Figur 106 b.

Normalkugel zu suchen, und es ist überhaupt, sobald die genannte Tangente an die Kehllinie gezogen ist, für das Aufsuchen der Lichtstufe des Berührungspunktes und die an diese anzuschliessende Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf derselben Schraubenlinie ganz derselbe Weg einzuschlagen, wie nach Art. 105 für die einzelnen Schraubenlinien, welche die konzentrischen Schnittcylinder auf den früher betrachteten Schraubenflächen erzeugen.

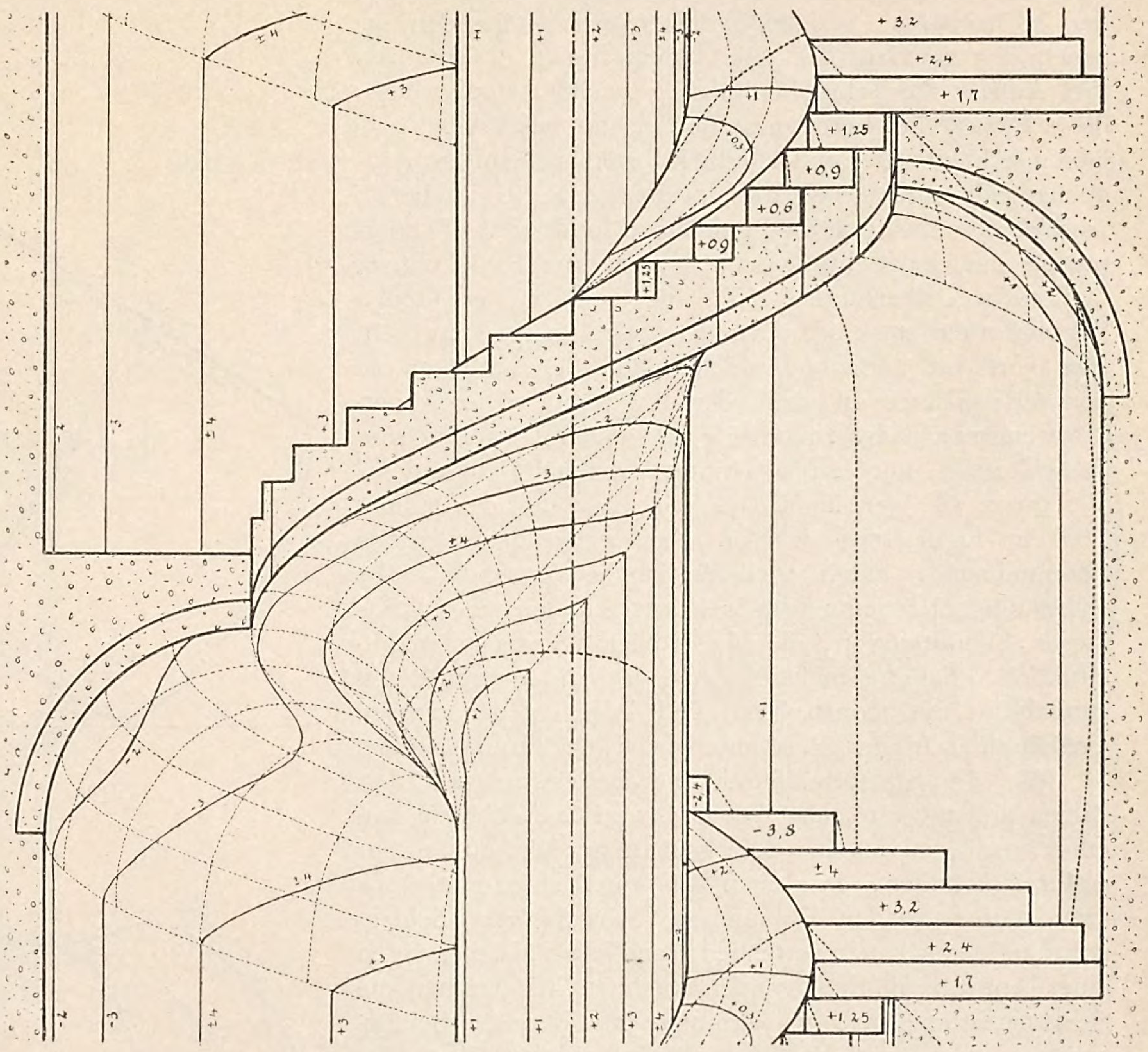
Eine andere Art von schraubend verdrehten Stabformen sind diejenigen, bei welchen eine ebene Figur irgend welcher Form auf einem Kreiscylinder fortschreitet, und zwar so, dass die Ebene der Figur immer durch die Achse geht und die Ecken der Figur Schraubenlinien um die Achse beschreiben. Die Schraubengänge können dabei den Cylinder ganz bedecken oder schraubenförmige Bänder der Cylinderfläche zwischen sich übrig lassen. Die scharf- und flachgängigen Schrauben (samt den Abrundungen der Kanten der ersteren) sind besondere Fälle dieser Stabformen; auch die in Art. 71 behandelte schraubenförmige Röhre kann als eine solche aufgefasst werden. Es mag etwa ein konvexes Segmentbogenstück, dessen Sehne auf dem Cylinder liegt, als erstes Beispiel und ein konkaves, in den Cylinder eingeschnittenes ebensolches als zweites genannt sein.

Zieht man durch einen Punkt einer beliebigen Lage des erzeugenden Bogenstücks eine Tangente an dieses, so ist die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkt einerseits bestimmt durch diese in der Vertikalebene der Schraubenachse liegende Tangente, andererseits durch die geneigte Tangente an der Schraubenlinie, die der ausgewählte

Punkt bei der Erzeugung der Fläche beschreibt. Bei der Bewegung des Punktes erzeugt jene erste Tangente eine gewöhnliche Schraubenfläche. Wie nun auf der Schraubenlinie die Lichtstufenpunkte erscheinen als auf einem Bestandteil dieser Schraubenfläche, so gelten sie auch für die schraubenförmige Wulstfläche oder Hohlkehlenfläche. Damit ist auch für diese Art von Stabformen die Bestimmung der Lichtstufenlinien zurückgeführt auf diejenige der Schraubenflächen in Art. 105.

Die Figuren 106b und c, die auch auf dem dritten Lichtdruckblatt mit Beifügung eines andern Grundplans schattiert auftreten, zeigen eine Wendeltreppe mit Ueberdeckung durch ein ringförmig steigendes Tonnengewölbe; in diesem ist ein Beispiel der zuvor behandelten Formen geboten. Der Grundriss in Figur 106b giebt die Leibung des Gewölbes mit den Lichtstufenlinien; die Vorzeichen sind so eingeschrieben, als ob die Fläche wie eine Lehrschalung gegen oben konvex und von oben gesehen wäre, so dass im Aufriss, der die Unterfläche projiziert, alle Vorzeichen umzukehren waren. In dem Aufriss Figur 106c ist die Treppe und das Gewölbe als Höhenschnitt nach *a b c d e* gezeichnet und der vordere Teil weggenommen gedacht, wie es der Grundriss auf der dritten Lichtdrucktafel ersichtlich macht; der Aufriss in Figur 106b ist ein Höhenschnitt nach *a b f d e*, in welchem auch die Spindel herausgebrochen gedacht ist. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien war nur die oftmalige Wiederholung der in Art. 105 beschriebenen Konstruktion, wobei in einer einzigen Hilfsfigur für den Radius *o c* und sechs Schraubenlinien die Neigungen aller Schraubenlinien und aller Tangenten am Vertikalschnitt, die Grundrissrichtungen der Gefällslinien aller Berührungsebenen, die Horizontalrichtungen dieser letzten und endlich ihre Neigungswinkel vereinigt erschienen.

Die Kurven + 0,6 und — 3,15 (angenähert) haben Kreuzungspunkte. Diese Punkte liegen auf derjenigen Schraubenlinie, für welche die Neigung der Berührungsebene ein Minimum wird. Am inneren Rand des Gewölbes sind die Berührungsebenen vertikal, nach aussen werden sie flacher, weil sowohl die Schraubenlinien als die Tangenten am Vertikalschnittkreis flacher werden. Im Scheitel des Halbkreisbogens ist die Tangente horizontal geworden und die Schraubenlinie hat eine mittlere Neigung erreicht. Weiter nach aussen werden die Schraubenlinien immer noch flacher, die Tangenten aber wieder steiler. Zuerst überwiegt die Wirkung jener; die Neigungen der Berührungsebenen nehmen auch ein Stück weit vom Scheitel nach auswärts noch ab, erreichen aber schon nahe dem Scheitel ein Minimum; von diesem Punkt an überwiegen die steiler werdenden Tangenten und die Neigungswinkel der Ebenen nehmen wieder zu. Der Einfluss der Minimalneigung auf die Lichtstufenlinien ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Wird die Neigung der Berührungsebene ein Minimum, so wird in Figur 105a der Radius *g' h'* oder *o l* ein Minimum. Denkt man sich den Grundriss in Figur 105a rechts unten für diesen Fall gezeichnet, so berührt der Parallelkreis eine Lichtstufenlinie von aussen und eine andere von innen (und zwar erweist sich jene im vorliegenden Beispiel als + 0,6, diese als — 3,15); bei allen früheren und allen späteren Grössen des Kreises *o l* erscheinen mit den Lichtstufenellipsen + 0,6 und — 3,15 zwei Schnittpunkte, wonach auf allen Schraubenlinien innerhalb und ausserhalb derjenigen mit der Minimalneigung der Berührungsebene zwei Lichtstufenpunkte mit + 0,6 und zwei solche mit — 3,15 erscheinen müssen, auf dieser letzten Schraubenlinie aber nur ein Punkt + 0,6 und — 3,15 auftreten kann. Damit sind die zwei Kreuzungspunkte begründet.



Figur 106 c.

Die Uebertragung der im Grundriss gefundenen Lichtstufenlinien in die Aufrisse geschah mit Hilfe des von den

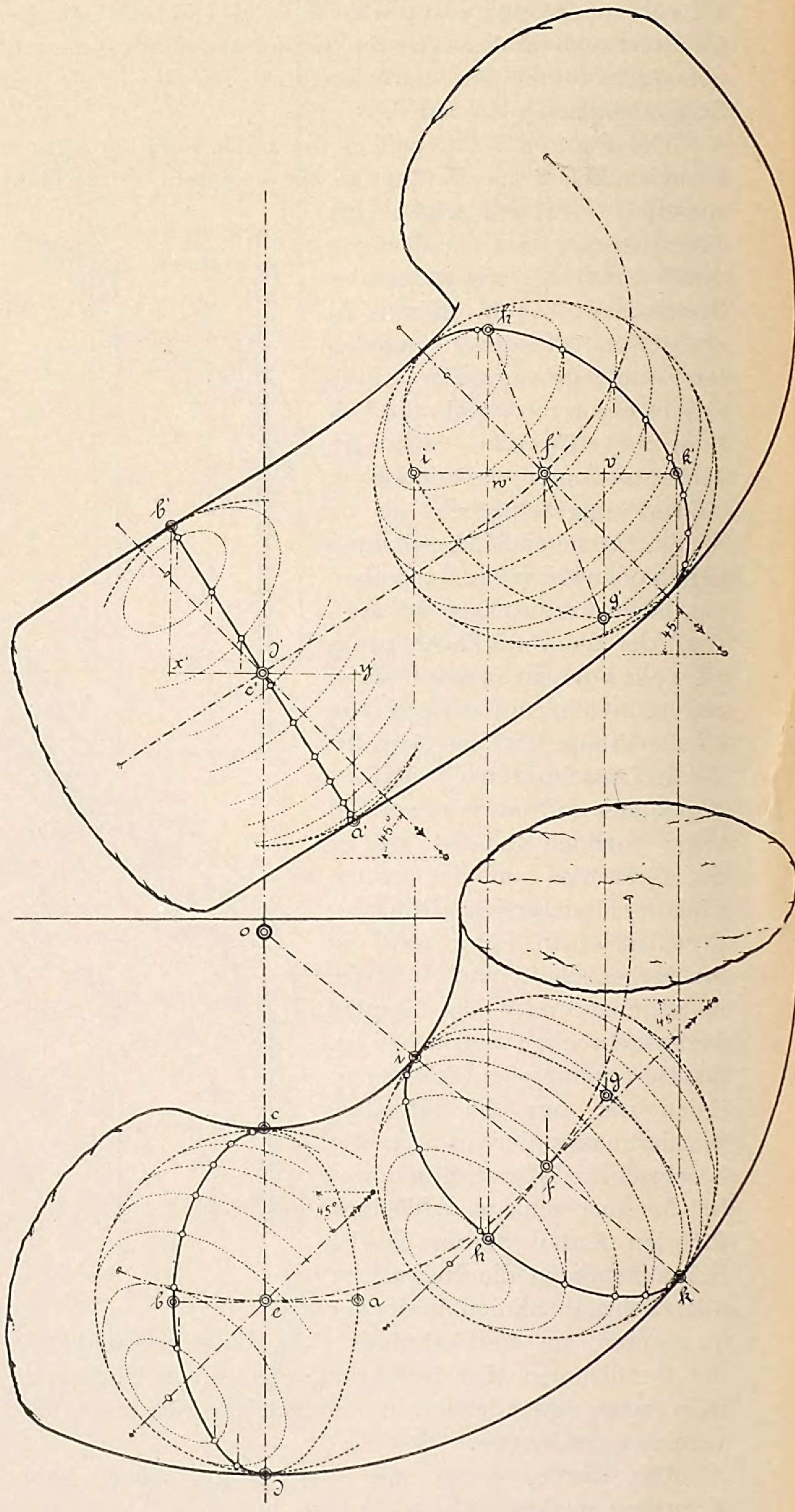
Schraubenlinien und Radialschnittlinien gebildeten Netzes, das im Grundriss in konzentrischen Kreisen und deren Radien erscheint und auch zur Schlagschattenkonstruktion dient. Die Vertikalflächen der Stufen sind Beispiele für die Lichtstufenbestimmung verschieden gerichteter vertikaler Ebenen; die Wendelfläche zwischen Spindel und Stufen ist schon in Art. 105 erwähnt; im übrigen erscheinen nur noch vertikale Cylinderflächen.

Die Schlagschattengrenzen auf beiden Arten von schraubend verdrehten Stabformen lassen sich in erster Linie durch das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen bestimmen. Sobald für die ausgewählten Punkte der horizontalen, beziehungsweise vertikalstehenden erzeugenden geraden oder gekrümmten Linien in Grundriss und Aufriss die Schraubenlinien gezeichnet sind, welche diese Punkte bei Erzeugung der Fläche beschreiben, so lassen sich entweder im Grundriss vertikalstehende Schnittebenen oder im Aufriss vertikalprojizierende Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung annehmen und deren Schnittpunkte mit den Schraubenlinien aus einer Projektion in die andere übertragen. Wo die hiedurch erhaltenen Schnittkurven stark schiefwinklige Schnitte ergeben, geht man von den horizontalprojizierenden Schnittebenen zu vertikalprojizierenden über oder umgekehrt. Die Schlagschattengrenzen des ringförmig steigenden Gewölbes sind ausschliesslich mit Vertikalschnitten bestimmt; ein anderes Verfahren ist hier kaum möglich. Für den verdrehten Stab in Figur 106a wurden oben vertikalprojizierende Schnittebenen, unten vertikalstehende verwendet. Die selbständige Bestimmung der Körperschattengrenzen aus diesen Schnittkurven, die als Problem der Schattenkonstruktion verlangt sein kann, ohne dass die übrigen Lichtstufenlinien mitzukonstruieren sind, leidet an der grossen Unsicherheit in der Bestimmung der Berührungspunkte.

Wo die Stabform durch die Bewegung gerader Linien erzeugt wird, also Wendel- und Schraubenflächen entstehen, lässt sich die Schlagschattengrenze oft rascher dadurch erhalten, dass man auf einer Horizontalebene (oder der vertikalen Grundebene) sowohl den Schlagschatten der schattenwerfenden Randkurve als diejenigen einer Anzahl von Erzeugenden zeichnet, auf welchen die Schlagschattengrenze zu vermuten ist. Wo der Schlagschatten der Randkurve den Schlagschatten einer Erzeugenden schneidet, da ist der gemeinschaftliche Schlagschattenpunkt derjenigen Punkte beider Raumlinien, die einander in Schatten setzen, und ein durch diesen Schlagschattenpunkt rückwärts bis zur Erzeugenden gezogener Lichtstrahl liefert auf dieser einen Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Für den unteren Teil der Schlagschattengrenze in Figur 106a, der anderweitig unsicher zu bestimmen ist, wurden zur Probe die Schlagschatten der Randkurve und einiger Erzeugenden auf der Horizontalebene des Punktes *m'* zu Hilfe genommen.

107. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Normalschnitt.

Diese Fläche wird nach Art. 71 erzeugt als Umhüllungsfläche aller Lagen einer unveränderlichen Kugel, deren Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet. In den Figuren 107abc ist die Achse dieser Schraubenlinie vertikal. Jede Lage der Kugel berührt die Fläche nach einem Kreis, der zugleich ein Grosskreis der Kugel und ein Normalschnitt der Röhrenfläche ist, das heisst,



Figur 107a.

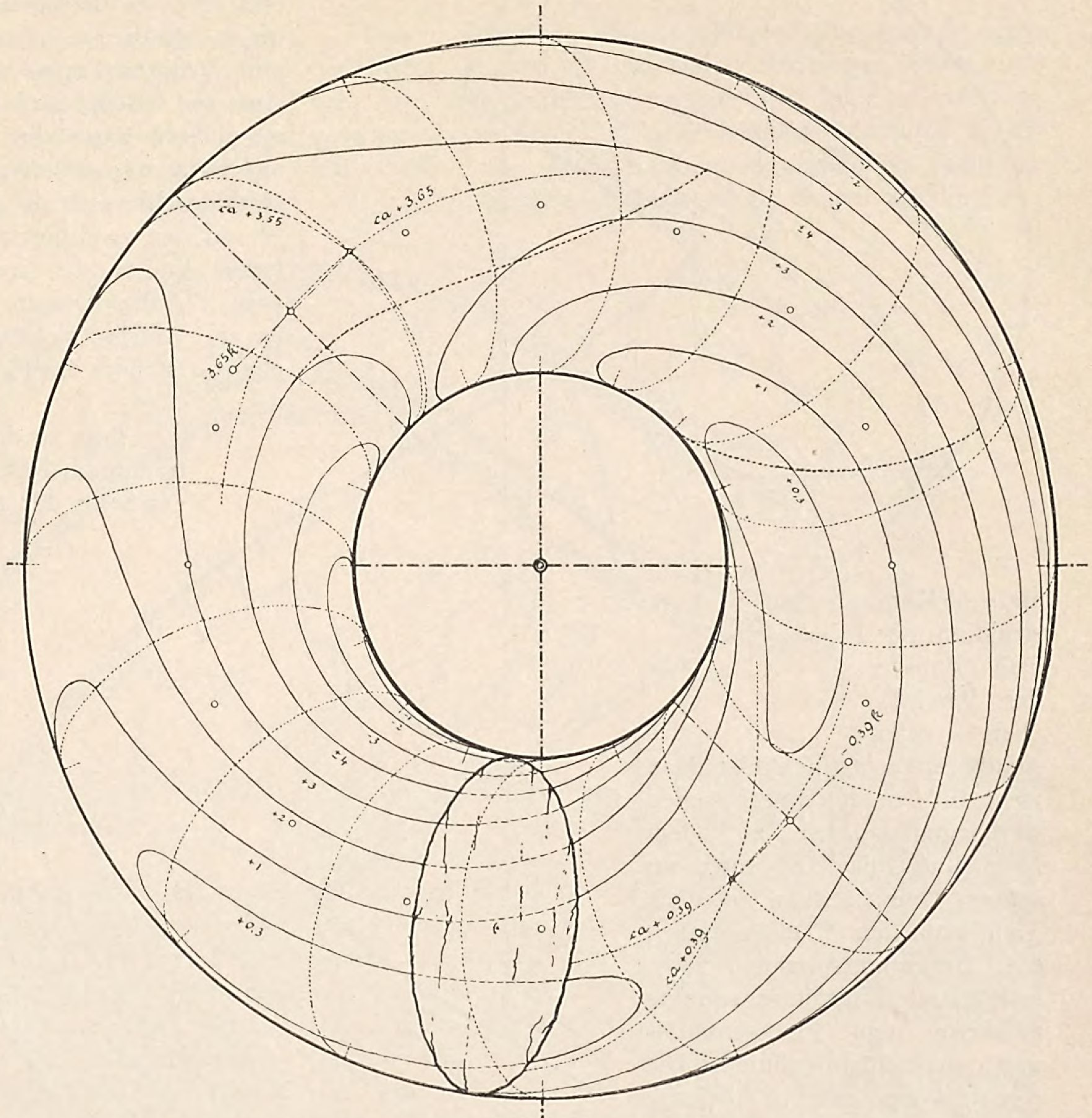
dessen Ebene normal steht zu einer Tangente, die im Mittelpunkt des Kreises an die leitende Schraubenlinie gezogen wird. Da die Neigung der Tangente an einer vertikalstehenden Schraubenlinie überall dieselbe ist, so ist auch die Neigung der Ebenen solcher Berührungs- oder Schnittkreise überall dieselbe.

Hieraus folgt zunächst, dass die elliptischen Grundrisse $a\,c\,b\,d$ (Figur 107a) aller solchen Schnittkreise kongruent und zwar mit der grossen Achse gegen den Mittelpunkt gerichtet sein müssen. Das Achsenverhältnis dieser Ellipsen ergiebt sich, indem man den ersten Normalschnitt der Röhre so durchführt, dass er sich im Aufriss als gerade Linie $a'\,b'$ projiziert, das heisst an einem Punkt, in welchem die schraubenlinienförmige Röhrenachse eine Tangente parallel zur Vertikalebene hat. Teilt man nun den Grundrisskreis in eine bestimmte Zahl gleicher Teile und zeichnet für jeden Teilungspunkt f den zugehörigen Aufrisspunkt f' und die Grundrissellipse $g\,i\,h\,k$ kongruent $a\,c\,b\,d$, so lassen sich die zugehörigen Aufrissellipsen in folgender Weise rasch erhalten. Man zieht für jede Ellipse die Projektionslote durch die Punkte $g\,i\,h\,k$. Die Endpunkte des horizontalen Durchmessers i' und k' liegen im Aufriss ebenso hoch wie f'; für die Endpunkte des Durchmessers grösster Neigung $h'\,k'$ ist $w'\,h' = v'\,g' = x'\,b' = y'\,a'$ aufzutragen, weil infolge der gleichen Neigung aller Normalschnittkreise deren höchste und tiefste Punkte immer gleichviel über und unter ihrem Mittelpunkt liegen. $i'\,k'$ und $h'\,g'$ sind konjugierte Durchmesser der Aufrissellipse, aus welcher diese nach Art. 68d abgeleitet werden kann.

Sind in dieser Weise alle Normalschnittkreise in Grundriss und Aufriss gezeichnet, so gelangt folgender Grundgedanke für die Bestimmung der Lichtstufenpunkte zur Verwertung: „Wo auf dem Berührungskreis zwischen einer Lage der erzeugenden Kugel und der Röhrenfläche die Lichtstufenpunkte für die Kugel gelegen sind, da liegen sie auch für die Röhrenfläche.“ Zeichnet man die Umhüllungskugel selbst als Normalkugelgrundriss und -Aufriss mit allen Lichtstufenlinien auf Pauspapier, so lässt sich jedes solche Kugelbild im Grundriss, beziehungsweise Aufriss derart auf die Ellipse eines jeden Schnittkreises legen, dass die Lichtstufenpunkte unmittelbar auf die durchscheinende Ellipse als deren Schnitte mit den Kugellichtstufenlinien durchgestochen werden können. Hiezu gehört nur, dass der Mittelpunkt des Normalkugelbildes immer auf den Mittelpunkt der Ellipse fällt und dass in Grundriss und Aufriss der ursprünglich der Lichtrichtung entsprechende Kugelbilddurchmesser in jeder neuen Lage genau gleichgerichtet bleibt (wie es in Figur 107a durch die Durchmesser mit Pfeilen angedeutet ist).

Ohne die arbeitsparende Benützung des Pausblattes wäre für jeden Normalschnitt der Fläche die elliptische Projektion des Grosskreises der Normalkugel aufzusuchen, welche nach Achsenverhältnis und Richtung der grossen Achse mit dem Normalschnitt übereinstimmt. Von dieser Projektion wären die Schnittpunkte mit den Lichtstufenlinien durch proportionale Vergrösserung oder Verkleinerung aller Masse auf den Normalschnitt zu übertragen.

In den Figuren 107b und c sind die Lichtstufenlinien der Fläche samt den Normalschnittlinien und Schlagschattengrenzen in Grundriss und Aufriss gezeichnet und

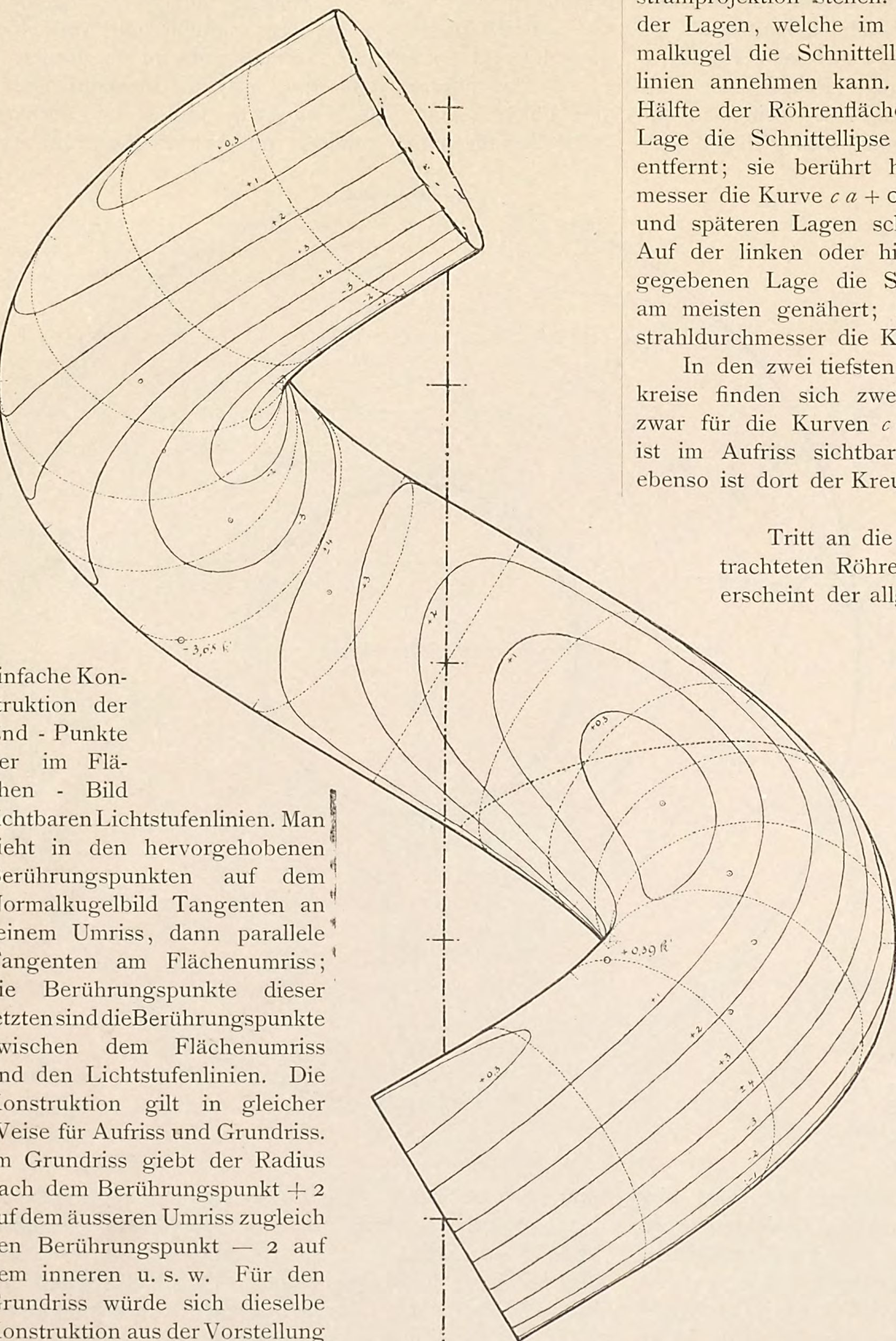


Figur 107b.

zwar für eine Röhre, welche derjenigen in Figur 71a bis d kongruent oder ähnlich ist. Die Schlagschattengrenzen, deren Konstruktion in Art. 71 besprochen ist, sind aus diesen Figuren herübergenommen. Auf dem zweiten und dritten Lichtdruckblatt erscheint dieselbe schraubenförmige Röhre mit den Lichtstufen schattiert.

Das Kugelbild erreicht in seiner Bewegung im Grundriss und Aufriss bestimmte Lagen, in welchen es den Umriss der Fläche mit einem der in Figur 88b durch Ringe hervorgehobenen Berührungspunkte zwischen seinen Lichtstufenellipsen und seinem eigenen Umriss berührt. In einem solchen Punkt haben also Kugelumriss und Flächenumriss eine gemeinschaftliche Tangente; zugleich

ist der Punkt ein Lichtstufenpunkt der Fläche, weil er der Endpunkt der grossen Achse der Projektion des Berührungskreises zwischen Fläche und Kugel sein muss, also im Raum auf diesem Kreis selber liegt. Hieraus folgt eine



Figur 107 c.

einfache Konstruktion der End-Punkte der im Flächen-Bild sichtbaren Lichtstufenlinien. Man zieht in den hervorgehobenen Berührungspunkten auf dem Normalkugelbild Tangenten an seinem Umriss, dann parallele Tangenten am Flächenumriss; die Berührungspunkte dieser letzten sind die Berührungspunkte zwischen dem Flächenumriss und den Lichtstufenlinien. Die Konstruktion gilt in gleicher Weise für Aufriss und Grundriss. Im Grundriss giebt der Radius nach dem Berührungspunkt + 2 auf dem äusseren Umriss zugleich den Berührungspunkt — 2 auf dem inneren u. s. w. Für den Grundriss würde sich dieselbe Konstruktion aus der Vorstellung zweier vertikaler Berührungscylinder der Fläche ableiten lassen.

Wie bei dem ringförmig steigenden Tonnengewölbe in Figur 106b und in derselben Thatsache begründet wie dort erscheinen im Grundriss der Röhrenfläche zwei Lichtstufenlinien mit Kreuzungspunkten, nämlich *c a* + 0,39 und + 3,65; sie sind in Figur 107b punktiert eingetragen. Hier finden sich jedoch diese Punkte einfacher; sie sind die höchsten Punkte derjenigen Normalschnittkreise, deren horizontale Durchmesser im Grundriss senkrecht zur Lichtstrahlprojektion stehen. Dies folgt aus der Betrachtung der Lagen, welche im Grundriss der beweglichen Normalkugel die Schnittellipse gegenüber den Lichtstufenlinien annehmen kann. Auf der rechten oder vorderen Hälfte der Röhrenfläche hat sich in der angegebenen Lage die Schnittellipse am meisten vom hellsten Punkt entfernt; sie berührt hiebei auf dem Lichtstrahldurchmesser die Kurve *c a* + 0,39 von aussen; in allen früheren und späteren Lagen schneidet sie diese Kurve zweimal. Auf der linken oder hinteren Hälfte hat sich in der angegebenen Lage die Schnittellipse dem hellsten Punkt am meisten genähert; sie berührt dann auf dem Lichtstrahldurchmesser die Kurve *c a* + 3,65 von innen.

In den zwei tiefsten Punkten derselben Normalschnittkreise finden sich zwei weitere Kreuzungspunkte, und zwar für die Kurven *c a* — 0,39 und — 3,65. Der letzte ist im Aufriss sichtbar und mit — 3,65 *k'* bezeichnet; ebenso ist dort der Kreuzungspunkt + 0,39 *k'* eingetragen.

Tritt an die Stelle der Schraubenlinie der betrachteten Röhre eine beliebige andere Kurve, so erscheint der allgemeine Fall der Röhre mit kreisförmigem Normalschnitt. Auch dieser Fall kann immer als Umhüllungsfläche aller Lagen einer beweglichen unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der Kurve fortschreitet. Als Beispiel mit gewundener Kurve des Fortschreitens ausser der Schraubenlinie wurde schon in Art. 71 der Rundstab eines Bogengesimses auf cylindrischer Wandfläche genannt; weit häufiger ist die Verwirklichung der Fläche mit ebenen Kurven als Röhrenachsen.

Zur Bestimmung der Lichtstufenlinien führt am raschesten die oben bei der Schraubenröhre durchgeführte Betrachtung des Normalschnittkreises als der Berührungslinie der rückenden Kugel und die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis der Kugel. An die beliebig gekrümmte Achse der Röhre sei in einem bestimmten Punkt *pp'* eine Tangente *a b a' b'* gezogen worden. Man hat dann auf der Umhüllungskugel in *pp'* den Kreis zu zeichnen, dessen Ebene normal zu dieser Tangente steht. Diese Aufgabe ist in Art. 71 gelöst; auch kann für den vorliegenden Fall die dort gezeichnete Figur 71e unverändert

gelten. Die Ellipsen, deren grosse Achsen senkrecht zu den Tangentenprojektionen *a b* und *a' b'* stehen, sind die Projektionen des Normalschnittkreises der Röhre im Punkt *pp'*. Die Ellipsen benützt man wie bei der schraubenförmigen Röhre. Legt man auf die Aufrissellipse den Aufriss einer Normalkugel, deren Durchmesser gleich dem der Röhre ist, und auf die Grundrissellipse den Grundriss derselben Normalkugel auf Pauspapier gezeichnet, so lassen sich wieder die Lichtstufenpunkte auf die durchscheinenden Ellipsen als deren Schnittpunkte mit den Kugellinien durchstechen. Hiezu gehört wieder, dass der Mittelpunkt des Normalkugelbildes auf den Mittelpunkt der Ellipse fällt, und dass in Grundriss und Aufriss der ursprünglich der Lichtstrahlprojektion entsprechende Kugelbilddurchmesser genau gleich gerichtet bleibt. Wenn in den beiden Kugelbildern der Figur 71 e zu den schon vorhandenen Schattengrenzen oder Kurven ± 4 die andern Lichtstufenlinien hinzugedacht werden, so bringt sie auch diesen zweiten Teil der Konstruktion vollständig zur Anschauung.

Die Konstruktion vereinfacht sich wesentlich, wenn die Röhrenmittellinie eine ebene Kurve parallel zu einer Grundebene, etwa zur Vertikalebene wird, weil dann in der Projektion auf diese Grundebene alle Normalschnitte geradlinig werden. Die Lichtstufenpunkte ergeben sich in diesem Fall, ähnlich wie nach Figur 58 die Körperschattenpunkte des Wulstes, äusserst einfach und ohne Benützung eines Grundplans, indem der Aufriss der Normalkugel mit dem Durchmesser der Röhre einmal gezeichnet und mit Durchmessern parallel zu den ausgewählten Normalschnitten versehen wird. Jede Normalschnittlinie im Aufriss der Fläche ist dann ebenso einzuteilen, wie der ihr parallele Durchmesser durch die Lichtstufenlinien der Kugel eingeteilt ist. Figur 58 kann auch diese Konstruktion vollständig zur Anschauung bringen, wenn an die Stelle der nur mit Körperschatten versehenen Kugel die Normalkugel und an die Stelle der kreisförmigen Mittellinie des Wulstes eine Ellipse oder beliebige andere ebene Kurve gesetzt wird. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien eines kreisförmigen oder elliptischen oder sonst wie eben gekrümmten Wulstes ist hienach eine der einfachsten Aufgaben der Beleuchtungskunde.

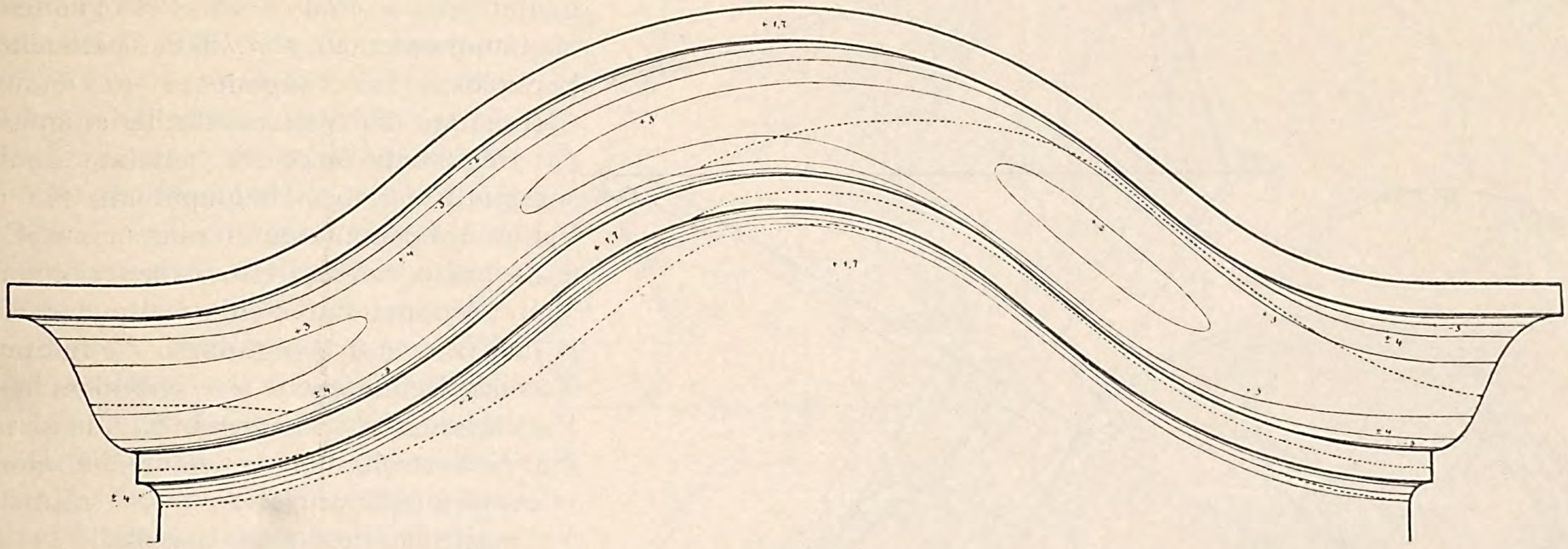
Eine mit anderer Grösse gegebene Normalkugel kann man in derselben Weise unmittelbar benützen, indem man die auf ihren Durchmessern erhaltenen Einteilungen durch proportionales Verkleinern oder Vergrössern den Normalschnitten der Fläche anpasst.

Die Röhrenfläche mit beliebigem Normalschnitt; geschweifte Gesimse auf ebener und gekrümmter Wand. Die Röhrenfläche mit veränderlichem Normalschnitt. 108.

Dieser allgemeine Fall der Röhrenfläche entsteht nach der früher (in Art. 71) gegebenen Erklärung, wenn eine beliebige unveränderliche gekrümmte oder zusammengesetzte ebene Linie auf einer beliebigen Leitlinie derart fortschreitet, dass ihre Ebene immer normal zur Leitlinie steht und ein bestimmter Punkt in ihr immer auf der Leitlinie bleibt. Dabei darf sich die bewegliche Linie auch nicht in ihrer eigenen Ebene verdrehen, das heisst, es muss bei einer eben gekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in der Ebene der Leitlinie bleiben, und bei einer doppelt gekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in die Schmiegungsebene der Leitlinie fallen; mit andern Worten, die bewegliche Linie muss immer dieselbe Lage gegenüber der „Hauptnormalen" der Leitlinie beibehalten.

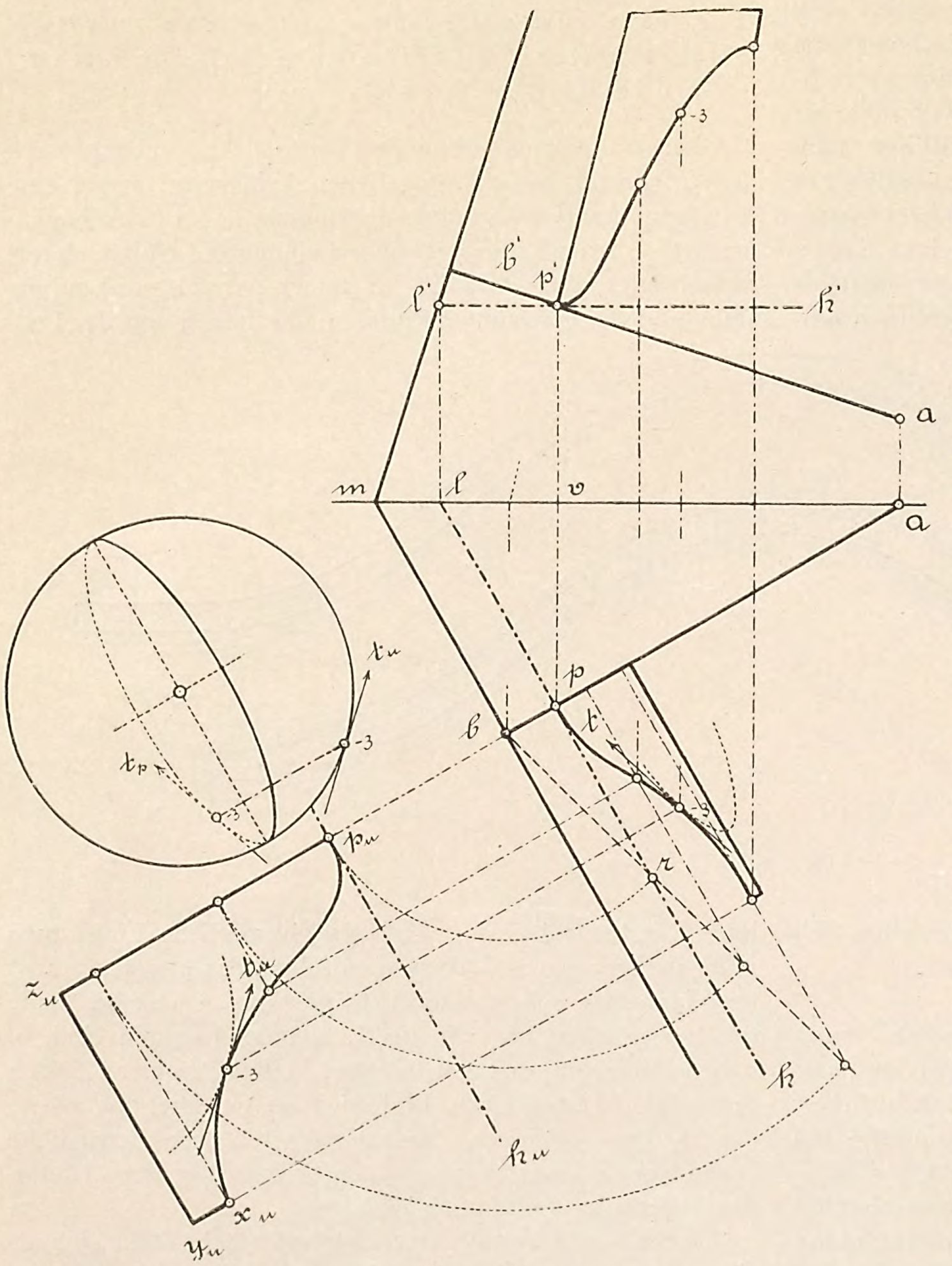
Jeder Normalschnitt einer solchen Fläche lässt sich als eine niedrige Zone eines Cylinders vom selben Normalschnitt auffassen, dessen Mantellinien parallel sind der Tangente an der Kurve des Fortschreitens in dem Punkte des Normalschnitts. Auf diesem Cylinder bestimmen sich die Lichtstufenpunkte nach Art. 99.

Als Beispiel mit einer eben gekrümmten Leitlinie ist auch hier (Figur 108a) eine Röhrenfläche parallel zur Vertikalebene, und zwar das geschweifte Gesims auf vertikaler Wand aus Figur 72a gewählt, dessen Normalschnitte sich im Aufriss als gerade Linien projizieren. Zu einem solchen Normalschnitt zieht man im Aufriss der Normalkugel einen parallelen Durchmesser und klappt sowohl den mit seinen Lichtstufenpunkten versehenen Grosskreis, den dieser Durchmesser darstellt, als die Profillinie der Röhrenfläche, welche durch den Normalschnitt dargestellt



Figur 108a.

ist, in die Vertikalebene um. Ist nun auf der umgeklappten Normalschnittprofillinie der Lichtstufenpunkt + 3 zu suchen, so zieht man an den umgeklappten Grosskreis eine Tangente im Lichtstufenpunkt + 3, dann an die Profillinie eine parallele Tangente. Der Berührungspunkt dieser letzten ist der gesuchte Lichtstufenpunkt; er ist noch auf den Normalschnitt im Aufriss zurückzuklappen. Auf Grund



Figur 108b.

der gefundenen Lichtstufengruppe ist das Gesims auf der zweiten Lichtdrucktafel schattiert.

Ist die Leitlinie eine doppeltgekrümmte, wie etwa bei dem Glockenleisten als Bestandteil eines Bogengesimses auf cylindrischer Wandfläche, so wird die Bestimmung der Lichtstufenlinien sehr zeitraubend; doch mag sie als theoretisch interessant hier einigen Raum finden. Die Lichtstufen für jeden Normalschnitt sind auch in diesem Fall auf einem Grosskreis der Normalkugel zu suchen, dessen Ebene derjenigen des Normalschnitts parallel ist. Sobald die beiden Projektionen $a\,b\,a'\,b'$ der Tangente an der Leitlinie im ausgewählten Punkte pp' gezeichnet sind, kann dieser Grosskreis ganz ebenso bestimmt werden, wie für den Normalschnitt der doppeltgekrümmten kreisrunden Röhre in Art. 71 und 107 angegeben (Figur 71e), indem man sich wie dort die Normalkugel in den Punkt pp' versetzt vorstellt.

Der zweite Teil der Lösung hat für den ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie (Figur 108b) mit Hilfe der beiden Projektionen $a\,b\,a'\,b'$ der Tangente in diesem Punkt die zwei Projektionen der Normalschnittprofillinie zu zeichnen, wobei die Raumgestalt dieser Linie und ihre Lage zur Hauptnormalen der Leitlinie als gegeben vorauszusetzen sind; diese letzte muss als gerade Linie $p_u\,h_u$ dem Normalschnittprofil der Röhrenfläche $p_u\,x_u\,y_u\,z_u$ beigezeichnet sein. Für den ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie müssen gezeichnet sein beide Projektionen der Tangente $a\,b\,a'\,b'$ und beide Projektionen der Hauptnormalen $p\,h\,p'\,h'$; diese letzte muss als Senkrechte zur Tangente in pp' auftreten. (Bei der auf den Vertikalcylinder aufgewickelten Bogenlinie für die Unterkante eines Gesimsglieds ist die Hauptnormale für jeden Punkt horizontal und normal zur Cylinderfläche, also beim Kreiscylinder ein Radius.) Man bestimmt die Vertikalspur der Hauptnormalen l' und legt durch l' die Spuren der Normalschnittebene $l'\,m\,b$ senkrecht zu den Projektionen der Tangente. Nun klappt man die Normalschnittebene in die Horizontalebene um, indem man $p\,r = v\,p'$ und $b\,p_u = b\,r$ macht, ferner $p_u\,h_u$ parallel $m\,b$ zieht. $p_u\,h_u$ ist die Umklappung der Hauptnormalen; an diese Linie wird das Profil der Röhrenfläche so angefügt wie beide Linien gegeben sind. Das Zurückklappen führt in bekannter Weise zu beiden Projektionen der Normalschnittprofillinie.

Der dritte Teil der Lösung, das Bestimmen der Lichtstufen, wird am besten mit Hilfe der Umklappung erhalten. Man legt neben das umgeklappte Profil den samt seinen Lichtstufenpunkten um dieselbe Fusslinie $m\,b$ in die Horizontalebene umgeklappten Grosskreis aus dem ersten Teil der Lösung. Im Lichtstufenpunkt — 3 des Grosskreises zieht man eine Tangente t_u, dazu eine parallele Tangente t_u an die Profillinie; der Berührungspunkt dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt — 3 in der Umklappung; er ist samt den andern Punkten der Profillinie in die Projektionen zu übertragen. — Auch an den Projektionen des Grosskreises und der Profillinie unmittelbar können die parallelen Tangenten gezogen werden, wofür die Ellipse mit der Tangente $t\,p$ und am Grundriss der Normalschnittlinie die Tangente t eingezeichnet sind. Doch ist dieser kürzere Weg weniger zuverlässig. cf. Berichtigungen!

Röhrenflächen mit veränderlichem Normalschnitt, wie sie in Art. 73 erklärt und durch Figur 73 vertreten sind, bilden schwierigere Probleme der Beleuchtungskunde. Das

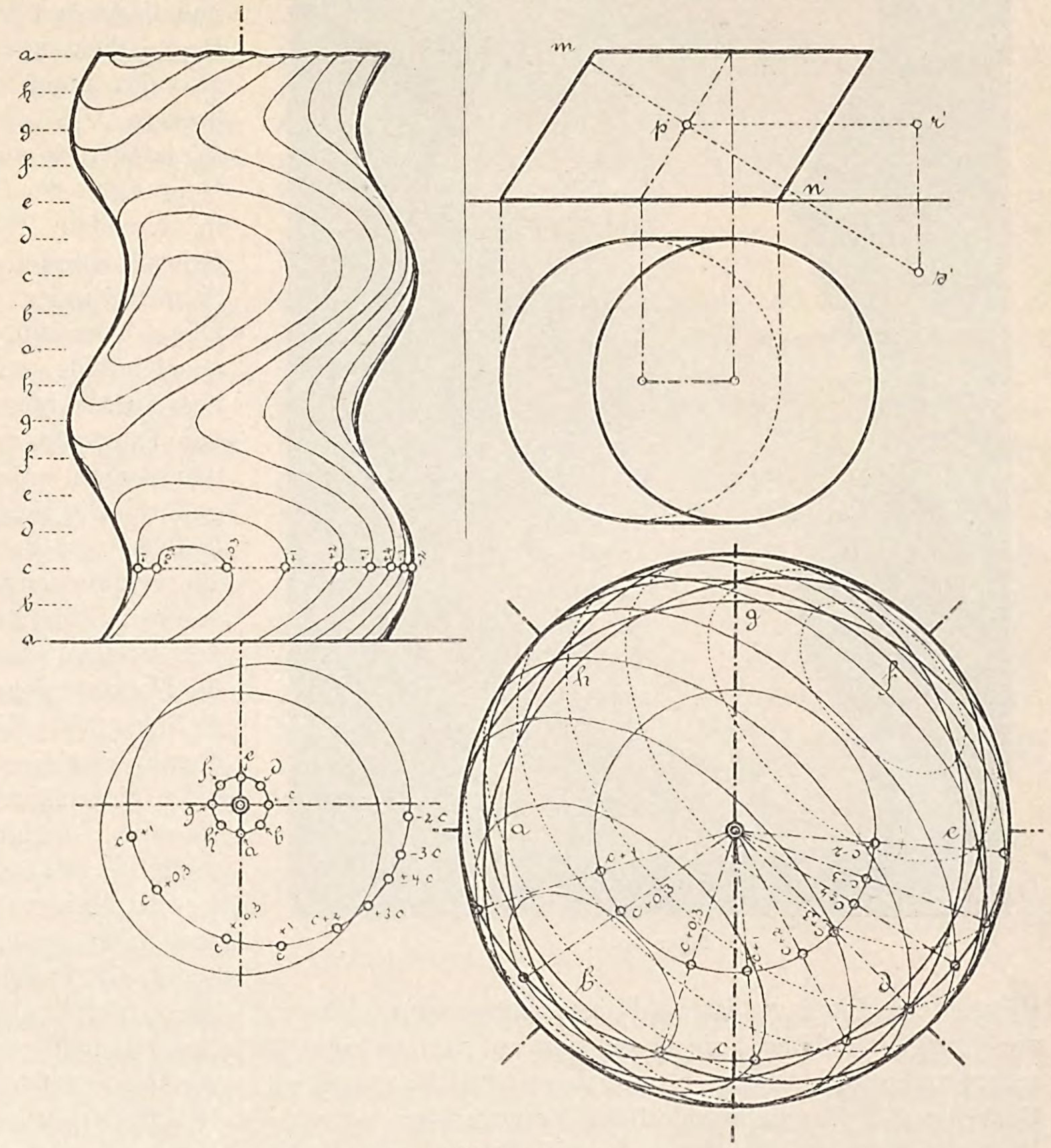
in der genannten Figur dargestellte Gebilde ist als Gegenstand eines allgemeinen Verfahrens für die Lichtstufenbestimmung auf gekrümmten Flächen in Art. 112 behandelt.

109. Die Rückungsflächen. Die gewundene Säule.

Diese Flächen sind nach ihren Erzeugungsgesetzen erklärt in den Artikeln 74, 75 und 76. Bei den Rückungsflächen mit unveränderlicher, immer gleichgerichteter Erzeugenden, wofür das hyperbolische Paraboloid (Figur 69 d) und die Gewölbformen Figur 74 a Beispiele sind, betrachtet man wie für die Körperschattenbestimmung jede Lage der Erzeugenden als niedrige Zone einer schiefgerichteten Cylinderfläche und bestimmt auf dieser die Lichtstufenpunkte nach Art. 99 oder 100.

Das interessanteste Beispiel einer solchen Rückungsfläche, der **gewundene Säulenschaft** des Barockstils, ist in Art. 74 beschrieben und als Gegenstand der Schattenkonstruktion behandelt. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien wird im Einklang mit der eben ausgesprochenen allgemeinen Vorschrift ganz wie in Figur 74 c jeder der kreisförmigen Horizontalschnitte des Schaftes aufgefasst als schiefer Cylinder mit kreisförmiger Basis, dessen Mantellinien gleichgerichtet sind mit der Tangente an der leitenden Schraubenlinie im Punkte des Horizontalschnitts. Die Konstruktion der Lichtstufenlinien für diesen Fall ist in Art. 100 beschrieben und dort am Schluss der hier vorliegende Fall der kreisförmigen Basis besonders ins Auge gefasst.

Figur 109 a enthält die Durchführung der Konstruktion mit acht Horizontalschnitten für jeden Umgang der Schraubenlinie. Die acht grosskreisförmigen Normalkugelschnitte, deren Ebenen senkrecht stehen zu den Mantellinien der acht Cylinder, sind im Grundriss alle kongruent, da alle Tangenten an der leitenden Schraubenlinie gleiche Neigung haben. Die erste solche Schnittellipse wird erhalten mit demjenigen Cylinder, dessen Mantellinien der Vertikalebene parallel sind (Figur rechts oben). An dem im Aufriss gezeichneten geradlinig erscheinenden Normalschnitt $m' n'$ dieses Cylinders lässt sich nach Beifügung einer Horizontal- und Vertikallinie mit $p' s'$ gleich dem Normalkugelradius die kleine Halbachse der Kugelellipse als Mass $p' r'$ abnehmen. Die grosse Achse dieser ersten Schnittellipse ist im Normalkugelgrundriss senkrecht zum Grundschnitt gerichtet; die andern sieben Ellipsen ergeben sich durch Drehung der ersten. Zeichnet man nun den beweglichen Kreis, der den Säulenschaft erzeugt, konzentrisch in den Normalkugelgrundriss ein und zieht für eine der Schnittellipsen c die Radien nach ihren Schnittpunkten mit den Lichtstufenlinien der Kugel, so geben diese Radien die Lichtstufenpunkte auf demjenigen Säulenkreis, der zu der Schnittellipse c gehört, und es können diese Punkte in den Grundriss des Schaftes unmittelbar und durch Abmessen ihrer Abstände vom vertikalen Durchmesser auch in den Aufriss auf den Kreis c übertragen werden. (Der gezeichnete Normalkugelgrundriss giebt die Konstruktion der Punkte nur für **einen** Kreis c, zeigt aber alle acht Schnittellipsen. Um die vielen Punkte nicht zu verwechseln, wird man die in der Figur begonnene Bezeichnung jedes Punktes mit



Figur 109 a.

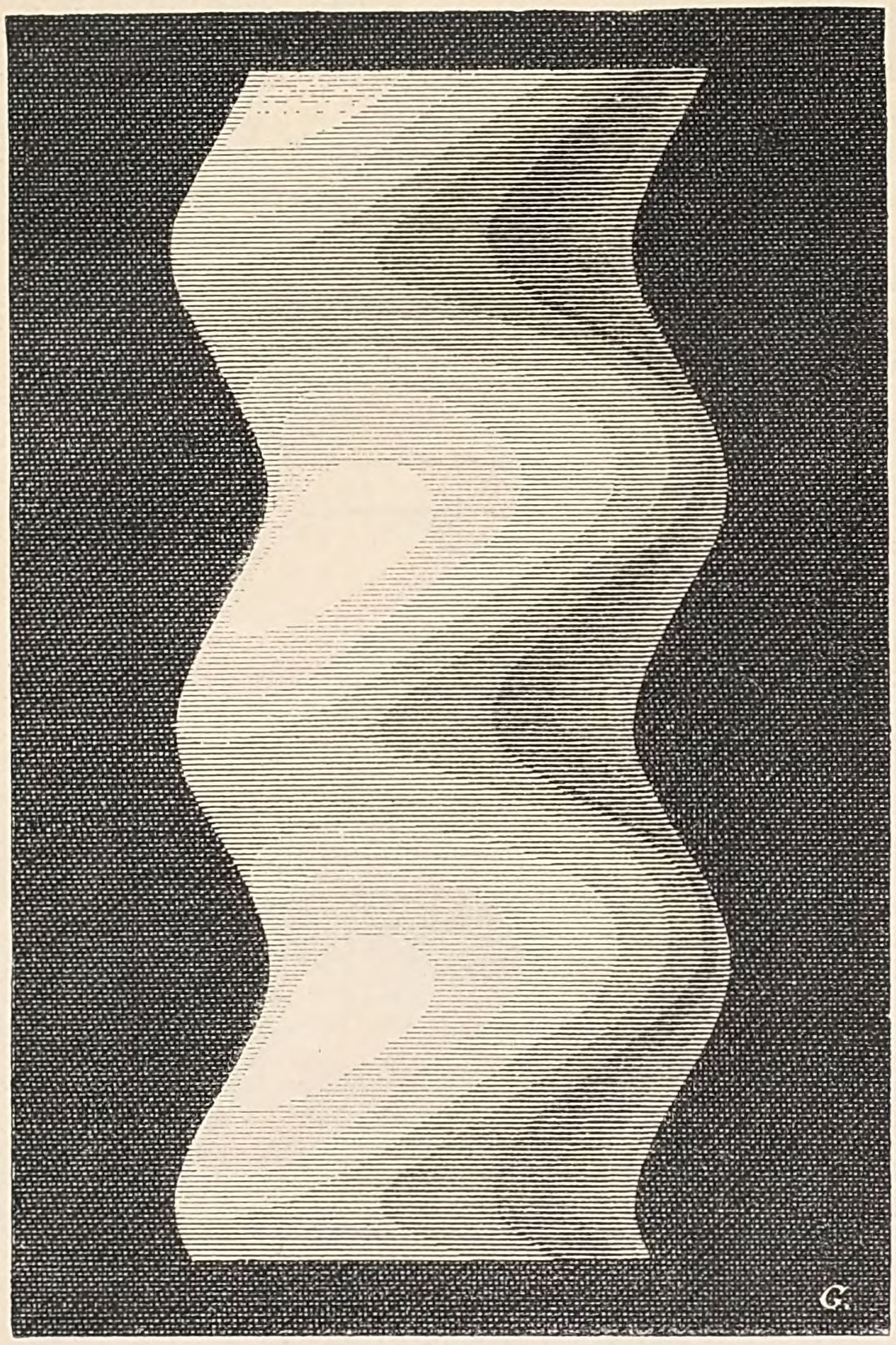
dem Buchstaben seines Horizontalkreises und der Nummer seiner Lichtstufe streng durchführen.)

Der Schaft in Figur 109 a zeigt nur die Lichtstufenlinien; die Grenzen einer Selbstbeschattung, die das gezeichnete Beispiel in geringem Umfang aufweist, ergeben sich nach Art. 74. In Figur 109 b ist die Schattierung mit den Lichtstufen durchgeführt.

Ist die Erzeugende einer Rückungsfläche veränderlich, wenn auch immer gleichgerichtet, so tritt die in Art. 75 erklärte Auffassung jeder ihrer Lagen als der Zonen einer Kegelfläche in Geltung. Wie auf dieser die Lichtstufenpunkte erscheinen, so gelten sie auch für die Rückungsfläche. Für jeden Vertikalschnitt des in Figur 75 gezeichneten Rundfensters und Kernbogens wäre also die Konstruktion der Lichtstufen des schiefen Kegels nach Art. 102

durchzuführen! Einen kürzeren Weg dürfte hier und in andern Fällen die in Art. 112 beschriebene allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen eröffnen.

Für die Rückungsflächen mit drehend fortschreitenden veränderlichen Erzeugenden, also z. B. für die verdrehte



Figur 109 b.

Pyramide in Figur 76, ist wohl diese letztgenannte Lösung die einzig brauchbare; sie liesse sich auf den in Figur 76 rechts unten gezeichneten Grundriss unmittelbar anwenden. Dasselbe gilt für unveränderliche Erzeugende, wenn die Drehung keine gleichmässig fortschreitende, also keine schraubende ist.

110. Konoidische Flächen. Windschiefer Mauerbogen. Kugelkonoid.

Diese Flächen sind in Art. 77 nach ihrem Entstehungsgesetz erklärt und als Gegenstand der Schattenkonstruktion behandelt.

Auf den senkrechten Konoiden, das heisst auf denjenigen, deren Erzeugende rechtwinklig zur geraden Leitlinie stehen, ist die Bestimmung der Lichtstufenlinien nicht schwierig. Als Beispiel sei wieder der in Figur 77 a und b dargestellte „windschiefe Mauerbogen" gewählt. An einem beliebigen Punkt der Leibungsfläche ist die Berührungsebene, die für die Lichtstufe massgebend ist, durch zwei unschwer erhältliche, durch den Punkt zu ziehende Gerade bestimmt, nämlich einerseits durch die Erzeugende, andrerseits durch die Tangente an der Kurve, die ein konzentrischer Cylinder als Schnitt mit der Fläche liefert. Die Tangente ergiebt mit ihrer Horizontalneigung unmittelbar die Neigung der Berührungsebene selbst; sie erscheint im Grundriss als Tangente am Cylinderkreis; alle Tangenten längs einer Erzeugenden sind im Grundriss parallel; für ihre Neigungen zur Horizontalebene ist folgendes zu beachten.

Ein Element der Fläche zwischen zwei einander sehr naheliegenden Erzeugenden kann — indem das zugehörige Bogenstück des eben gedachten Halbkreises als gerade, also das zugehörige Bogenstück des aufgewickelten Halbkreises MN als Schraubenlinie betrachtet wird — als Wendelfläche aufgefasst werden. Hieraus folgt, dass die Neigungen der Tangenten längs einer Erzeugenden sich in derselben Weise verändern wie die Neigungen der Schraubenlinien, welche die konzentrischen vertikalen Schnittcylinder mit der Wendelfläche liefern würden. Diese Wendelfläche ist für jede Lage der Erzeugenden des Konoids einerseits bestimmt durch den Radius MO des Aufwicklungscylinders, andrerseits durch die Neigung der Tangente an dem aufgewickelten Halbkreis MN in demjenigen seiner Punkte, welcher der Erzeugenden angehört. Die Neigung der Tangente am aufgewickelten Halbkreis ist aber ganz dieselbe wie diejenige der Tangente am entsprechenden Punkt des verstreckten Halbkreises; denn ein Bogenelement ändert durch das Aufwickeln auf den Vertikalcylinder seine ursprüngliche Neigung gegen die Horizontalebene nicht. Für jede Lage der Erzeugenden ist hienach die Wendelfläche erhältlich. Da alle Berührungsebenen der Konoidfläche längs einer Erzeugenden durch diese hier horizontale Erzeugende selber gehen, also alle dieselbe Horizontalrichtung haben, so sind für jede Erzeugende alle Lichtstufenpunkte auf einer vertikalstehenden Meridianlinie zu suchen, deren Ebene senkrecht zur Erzeugenden gerichtet ist, also im Grundriss der Normalkugel als Radius senkrecht zur Erzeugenden erscheint. Diese Meridianlinie lässt sich hienach im Grundriss der Normalkugel rasch erhalten und samt ihren Lichtstufenpunkten mit den Tangenten in diesen in ihrer wahren Gestalt heraustragen. Wenn dies geschehen ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden folgende einfache Konstruktion für die Lichtstufenpunkte auf der ausgewählten Erzeugenden, wobei der Gedanke zu Grunde liegt, dass in irgend einem ganzzahligen Lichtstufenpunkt der Erzeugenden die Neigung der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie dieselbe sein muss wie die Neigung der Meridiantangente im gleich hellen Kugelpunkt.

Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen horizontale Kathete der Radius OM des Cylinders ist, auf welchem das Halbkreisbogenfeld aufgewickelt wurde, und dessen Hypotenuse die Neigung der Tangente hat, welche an den ebenen Halbkreis durch denjenigen Punkt gezogen wird, welcher der Lage der ausgewählten Erzeugenden entspricht. Durch die Spitze dieses Dreiecks zieht man eine Parallele zu jeder Tangente, die an dem herausgetragenen Normalkugelmeridian in einem seiner Lichtstufenpunkte gezogen worden ist. Wie diese Parallelen

die liegende Kathete vom recktwinkligen Eckpunkt aus einteilen, so ist auch die Erzeugende im Grundriss vom Mittelpunkt aus durch die Lichtstufenpunkte einzuteilen. Die Durchführung des Verfahrens für eine genügende Zahl von Erzeugenden liefert wie in den früheren Lösungen eine genügende Zahl von Punkten für jede Lichtstufenlinie. Hiebei ist Gebrauch gemacht von der Thatsache, dass für jeden beliebigen Höhenabschnitt einer vertikalstehenden Wendelfläche die Grundrissbogenlängen der auf ihr liegenden Schraubenlinien deren Radien proportional sind. Jene geneigten Parallelen samt der zuerst gezeichneten Hypotenuse können unmittelbar als die Abwicklungen der Schraubenlinien der für die ausgewählte Erzeugende vorgestellten Hilfswendelfläche aufgefasst werden, ebenso die Horizontalabschnitte als Verstreckungen der zugehörigen Grundrissbogenlängen.

Die Lösung hat sich verhältnismässig einfach gestaltet, weil es möglich war, jede Lage der Erzeugenden als Bestandteil der einfach zu schattierenden senkrecht stehenden Wendelfläche zu betrachten. Beim allgemeinen Fall des Konoids, wofür etwa das Kugelkonoid mit schrägstehender Geraden als Leitlinie und mit Gleiten der Erzeugenden an einer Kugel anstatt des Kreises in Figur 29b ein interessantes Beispiel wäre, fällt diese Erleichterung weg. Auch nicht als Schraubenfläche darf ein Stück der Fläche zwischen zwei einander naheliegenden Erzeugenden betrachtet werden, da die Winkel mit der festen Geraden sich ändern. Die Auffassung als Bestandteil eines windschiefen Vierecks (hyperbolischen Paraboloids) wäre berechtigt, führt aber zu keiner direkten Lösung. Daher dürfte wie bei der schiefen Kegelfläche nur eine Lösung mit punktweise konstruierten geometrischen Orten möglich sein, wie sie im folgenden in den Grundzügen gegeben ist.

Wie im zuerst betrachteten einfachen Fall und wie bei allen Regelflächen überhaupt besteht die Thatsache, dass die Lichtstufenpunkte für jede der Erzeugenden E auf einem Meridian ME der Normalkugel zu suchen sind, dessen Ebene normal steht zur Erzeugenden, also hier vertikal steht. Wenn noch für einen Punkt der Erzeugenden die Neigung der Tangente N an der Schnittlinie der Fläche mit der zur Erzeugenden normalen Ebene bekannt ist, so kann für diesen Punkt der zugehörige Normalkugelpunkt angegeben werden; es ist derjenige Punkt des Meridians ME, in welchem die Meridiantangente dieselbe Neigung hat wie die Tangente N.

Ein beliebiger Vertikalschnitt V der Fläche, der senkrecht zum Grundschnitt gerichtet sein mag, kann für jeden Punkt, in dem er eine Erzeugende E schneidet, diese Neigung liefern. Man zeichnet die Schnittkurve des Vertikalschnitts V und in jedem Punkt, in welchem er eine der ausgewählten Erzeugenden E schneidet, die Tangente S an der Vertikalschnittkurve. Diese Tangente S hat man rechtwinklig auf die zur Erzeugenden E normale Ebene zu projizieren, um in dieser die Normaltangente N zu erhalten.

Hienach lässt sich für jeden Schnittpunkt der Vertikalschnittkurve V mit einer Erzeugenden E der entsprechende Punkt P der Normalkugel bestimmen. Verbindet man auf der Normalkugel alle zu einem Vertikalschnitt V gehörigen Punkte P durch eine Kurve, so ist diese der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte für eine Vertikalschnittkurve V. Diese Raumkurve auf der Kugel schneide z. B. den Lichtstufenkreis $+3$ in einem bestimmten Punkt. Durch diesen Punkt legt man einen Vertikalschnitt der Normalkugel parallel zum Vertikalschnitt V, zieht an den Schnittkreis eine Tangente im Punkt $+3$ und dazu eine parallele Tangente an die Vertikalschnittkurve V. Der Berührungspunkt auf dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche.

Eine zweite Lösung, bei welcher der geometrische Ort nicht auf der Normalkugel, sondern auf der Fläche selber sich bildet, ist die folgende. Der zu einer Erzeugenden E gehörige vertikalstehende Kugelmeridian M schneide die Lichtstufenlinie $+3$ in einem Punkt R. Durch R legt man einen vertikalen Parallelkreis, dessen Ebene denjenigen der Vertikalschnitte V_1 V_2 V_3 ... der Fläche parallel ist, also nach der für diese getroffenen Wahl auch senkrecht zum Grundschnitt steht. In R zieht man eine Tangente an den Parallelkreis, dann an die getrennt herausgetragenen Schnittkurven V_1 V_2 V_3 ... parallele Tangenten. Die Berührungspunkte dieser letzten überträgt man in den Grundriss oder Aufriss und verbindet sie durch eine stätige Kurve. Wo diese die Erzeugende E schneidet, da ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf dieser. Selbstverständlich wird man die parallelen Tangenten nur an etwa vier Vertikalschnittkurven V ziehen, bei denen die Berührungspunkte in die Nähe der Schnittpunkte der Kurven mit der Erzeugenden fallen. Da diese Schnittpunkte zum Heraustragen der Kurven V dienen, also von Anfang auf ihnen vorhanden sind, so ist die Auswahl der vier Kurven leicht zu treffen (eine dritte Lösung s. Art. 111 am Schluss).

Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, erstes Verfahren: mit geometrischen Orten auf der Normalkugel. 111.

Bei allen bisher beschriebenen gekrümmten Flächen ist das Verfahren zur Bestimmung der Lichtstufenlinien einem bestimmten Erzeugungsgesetz angepasst worden. Andere Flächen als die betrachteten dürften zwar selten mit Lichtstufen zu schattieren sein; doch ist vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus die Aufgabe der Beleuchtungskunde mit solcher Einzelkonstruktion noch nicht gelöst. Sie ist es offenbar erst dann, wenn alle Flächen in derselben Weise schattiert werden können wie die bisher betrachteten, das heisst wenn ein allgemein gültiges Verfahren für alle gekrümmten Flächen gefunden ist, ähnlich wie es für die Bestimmung der Schattengrenzen in Art. 28 vorliegt. Den im Früheren betrachteten Lösungen muss ein gemeinschaftlicher Grundgedanke zu eigen sein, dessen Durchführung sich in ihnen verhältnismässig einfach gestaltet hat, weil das Erzeugungsgesetz der Flächen ein einfaches war oder eine günstige Verwandtschaft mit dem der Kugel darbot. Diesen Grundgedanken auszuziehen und seine Verwertung ohne Eingehen auf ein bestimmtes Erzeugungsgesetz zu zeigen, ist im vorliegenden Artikel versucht.

Für jeden Punkt x einer gekrümmten Fläche ergeben sich unmittelbar aus dem Erzeugungsgesetz zwei in der Oberfläche liegende, im allgemeinen gewundene Linien, die durch den Punkt x gehen und in beiden Projektionen gezeichnet werden können. Eine dieser Linien ist eine Lage der erzeugenden Linie oder findet sich aus einer Lage der erzeugenden Fläche, die andere bestimmt sich aus deren Bewegung. Zieht man in dem betrachteten Punkt x die beiden Tangenten, so bestimmt deren Ebene den für x gültigen Lichtstufenpunkt auf der Normalkugel. Auf jeder beliebig gekrümmten Fläche lässt sich somit für jeden Punkt die Lichtstufe angeben. Damit ist aber das Problem der Beleuchtungskunde für die Fläche nicht gelöst, indem die gefundenen Lichtstufen beliebig ausgewählter Flächenpunkte im allgemeinen keine ganzzahligen sind, also das Zusammenfassen in Lichtstufenlinien nicht gestatten oder nur eine unsichere Schätzung über deren Verlauf ermöglichen. An die beiden unmittelbar gegebenen Flächenlinien eines Punktes ist keine allgemeingültige Lösung anzuknüpfen; eine solche erfordert ebene Kurven mit leicht festzuhaltender Lage ihrer Ebenen.

Ein erstes allgemeines Verfahren lässt sich als dasjenige „der geometrischen Orte auf der Normalkugel“ bezeichnen. Man zeichnet auf der gegebenen Fläche die Schnittlinie mit einer horizontalen Ebene, bestimmt für eine Anzahl von Punkten dieser Linie die Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel in deren Grundriss und verbindet diese Kugelpunkte durch eine stetige Kurve. Diese ist der geometrische Ort, auf welchem auch alle andern Lichtstufenpunkte jener Schnittlinie zu suchen sind. Die Kugelkurve schneidet die Lichtstufenkreise der Kugel in bestimmten Punkten. Wenn man nun durch den Schnittpunkt der Kurve mit der Linie + 3 den horizontalen Parallelkreis der Kugel legt und an diesen im Punkt + 3 eine Tangente zieht, ferner an jene horizontale Schnittkurve auf der Fläche eine parallele Tangente zieht, so ist der Berührungspunkt dieser letzten ein Lichtstufenpunkt + 3 auf der Fläche. (Anstatt der Tangente am Normalkugelkreis wird man nur den zugehörigen Radius ziehen und die Tangente der Flächenkurve senkrecht zu diesem Radius stellen, wie in Art. 99, 100 und 102, wo ebenfalls immer die Vorstellung paralleler Tangenten zu Grunde lag.)

Weitere Tangenten in weiteren ganzzahligen Punkten der Kugelkurve geben weitere ganzzahlige Lichtstufenpunkte auf der Horizontalkurve der Fläche, und weitere Horizontalschnitte der Fläche liefern weitere geometrische Orte auf der Kugel und damit weitere Gruppen von Lichtstufenpunkten auf der Fläche.

Dieses Verfahren ist schon im früheren bei der schiefen Kegelfläche in Art. 102 zur Anwendung gebracht worden. Dort war jedoch eine der beiden Flächenlinien eine Gerade und dadurch die Bestimmung der Lichtstufenpunkte vereinfacht. Im allgemeinen Fall ist es nötig, ausser den horizontalen Schnittebenen auch noch vertikale beliebiger Richtung einzuführen, die sich im Grundriss als gerade Linien projizieren und deren Schnittkurven am besten getrennt herausgetragen werden. Wenn eine solche vertikale Schnittkurve eine horizontale in einem Punkt x schneidet, so zieht man Tangenten an beide Schnittkurven im Punkt x. Die Richtung der horizontalen bestimmt einen Grosskreis auf der Kugel, der sich im Grundriss als Radius senkrecht zu dieser Tangente projiziert (die „geographische Länge“ des Lichtstufenpunktes); die geneigte Tangente, rechtwinklig projiziert auf eine Ebene, die senkrecht zur Horizontaltangente steht, erscheint in dieser Projektion als Gefällslinie der Berührungsebene und bestimmt in bekannter Weise einen horizontalen Parallelkreis (als „geographische Breite“) im Grundriss der Normalkugel, dessen Schnitt mit jenem Radius den Lichtstufenpunkt für den Flächenpunkt x darstellt. Dieses Verfahren, für jeden Schnittpunkt x einer Horizontalkurve durchgeführt, liefert die Reihe der Lichtstufenpunkte und damit den geometrischen Ort für die Horizontalkurve.

Als vertikale Schnittebenen wird man in erster Linie solche zu benützen suchen, welche der Lichtrichtung parallel stehen. Die mit ihnen erhaltenen Schnittkurven können nicht nur gleichzeitig zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen dienen, sondern auch eine Probe für die Kurve ± 4 liefern; die Berührungspunkte dieser Kurven mit den Lichtstrahlen müssen ja Punkte der Kurve ± 4 sein.

In andern Fällen werden Vertikalschnitte senkrecht zum Grundschnitt, die auch im Aufriss geradlinig erscheinen, die meist geeigneten sein, in wieder anderen Vertikalschnitte verschiedener Grundrissrichtungen, welche sich etwa den verschiedenen Lagen einer Erzeugenden anpassen.

Bei bestimmten Lagen der Flächen treten an die Stelle der in der voranstehenden Lösung als erste Kurvengruppe verlangten Horizontalschnitte solche parallel zur Vertikalebene, und an die Stelle der vertikalen Schnitte solche senkrecht zur Vertikalebene, entweder mit Richtung parallel zum Lichtstrahl oder senkrecht zum Grundschnitt oder irgend einer andern gleichbleibenden oder veränderlichen Aufrissrichtung. Die geometrischen Orte auf der Normalkugel sind dann für die zur Vertikalebene parallelen Schnittkurven aufzusuchen und werden im Aufriss der Normalkugel, anstatt im Grundriss gezeichnet. So können z. B. bei Regelflächen mit horizontalen Erzeugenden keine Tangenten an Horizontalschnittkurven gezogen werden, weil diese letzten zu geraden Linien geworden sind; hier müssen also notwendig andere Parallelschnitte, welche Kurven liefern, eingeführt werden.

In wieder anderen Fällen ist die erste Schnittebenengruppe, für deren Kurven die geometrischen Orte auf der Kugel zu suchen sind, parallel zur Seitenebene zu wählen, wie es für das Kugelkonoid in Art. 110 geschehen ist. Die horizontalen Schnitte waren aus dem eben angegebenen Grund ausgeschlossen; Schnitte parallel zur Vertikalebene wären wegen ihrer viel zu schiefen Winkel mit den Erzeugenden auch nicht zweckmässig gewesen.

Eine letzte Stellung, die für die erste Parallelschnittebenengruppe zweckmässig sein kann, ist diejenige mit schiefem Winkel gegen zwei Grundebenen bei Richtung normal zur dritten; sie kann sich empfehlen, wenn sie dem Entstehungsgesetz und der Lage der Fläche in besonders hohem Mass entspricht und die Ableitung der andern Schnittkurven schwierig wäre. Doch wird hiebei für die Erleichterung in der einen Seite der Lösung weit

grösserer Arbeitsaufwand in der andern eingetauscht. Schiefgerichtete Schnittebenen, die nicht wenigstens senkrecht zu einer Grundebene stehen, dürften ausgeschlossen sein.

Das umständliche Projizieren der in den Vertikalschnittebenen der ursprünglichen Lösung gelegenen geneigten Tangenten auf die zu den Horizontaltangenten normalen Ebenen kann umgangen werden, indem man Gebrauch macht von der in Art. 91 angegebenen Lichtstufenbestimmung für eine Ebene, die gegeben ist durch ihre Horizontalrichtung und irgend eine ihr angehörige geneigte Gerade. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die an die Normalkugel parallel zu einer der geneigten, in den Vertikalschnittebenen liegenden Flächentangenten *N* gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht zur Tangente steht; er projiziert sich im Grundriss als eine Ellipse *E*, deren grosse Achse senkrecht zum Grundriss der Vertikalschnitte *V* gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal dem Sinus des Neigungswinkels der Tangente. Wo diese Ellipse den Radius *R* schneidet, der im Grundriss der Normalkugel senkrecht zur zugehörigen Horizontaltangente *H* steht, da ist der Lichtstufenpunkt *L*. Bei dieser Abänderung des oben beschriebenen allgemeinen Verfahrens tritt also an die Stelle der Projektion der geneigten Tangente diese selbst und an die Stelle des Horizontalkreises die Grosskreisellipse.

Diese Thatsache lässt sich in folgender Weise zu einem mechanischen Hilfsmittel verwerten. Auf durchsichtigem Papier wird ein Kugelgrundriss ebensogross wie das Normalkugelbild, aber ohne Lichtstufenlinien, mit den elliptischen Projektionen von etwa 16 bis 32 zu einem Horizontaldurchmesser gehörigen Grosskreisen gezeichnet und über diesem vertikal dargestellten Durchmesser die Tangentenneigungen, die senkrecht zu den Ebenen der Grosskreise stehen, so beigefügt, dass durch Verbindungslinien die zu jeder Neigung gehörige Ellipse leicht herausgefunden werden kann. Dieses Blatt wird zuerst auf der Vertikalschnittkurve *V* mit immer vertikalbleibendem Durchmesser so verschoben, dass die Tangente *N* an dieser mit einer der Tangenten des Blattes zusammenfällt oder zwischen zwei Tangenten fällt und die zugehörige Ellipse *E* bezeichnet oder eingeschätzt werden kann. Dann wird das Blatt auf den Normalkugelgrundriss gelegt und dabei die ursprünglich vertikale grosse Ellipsenachse senkrecht zur Grundrissrichtung der Vertikalschnitte *V* gelegt, worauf der Schnittpunkt der eingeschätzten Ellipse *E* mit dem Radius *R* auf diesen durchgestochen werden kann; dieser Punkt ist der gesuchte Lichtstufenpunkt *L*. Das Hilfsblatt kann für alle Schnittpunkte von Horizontal- und Vertikalkurven in gleicher Weise benützt werden und für alle Arten von Flächen dieselben Dienste leisten, ohne die Genauigkeit des Resultats in ungünstiger Weise zu vermindern.

Noch auf einem andern Weg lassen sich die Parallelkreise der Lichtstufenpunkte mit Umgehung jenes Projizierens schräggeneigter Tangenten erhalten, und es dürfte sogar, wenn keine Schlagschattengrenzen mitzubestimmen sind, dieser letzte Weg für die meisten Flächen der kürzeste sein. Man zeichnet im Grundriss der Fläche über deren Horizontalkurvensystem weg und nur nach Schätzung weitere Kurven, welche alle Horizontalkurven rechtwinklig durchschneiden, sogenannte „Trajektorien“ und betrachtet sie als Grundrisse von Linien auf der Fläche. Jede Tangente an einer solchen Flächenkurve im Raum ist zugleich die Gefällslinie der Berührungsebene der Fläche in demselben Berührungspunkt, so dass die im allgemeinen gewundene Kurve eine „Gefällskurve“ der Fläche heissen kann, womit ausgedrückt ist, dass sie in jedem ihrer Punkte nach Horizontalrichtung und Neigung die grösste Horizontalneigung der Fläche verwirklicht. (Ein Punkt auf der Fläche, der nur der Schwerkraft folgen würde, müsste sich auf einer „Gefällskurve“ bewegen.) Durch Verstreckung ihres projizierenden Cylinders herausgetragen, giebt eine solche Linie in jedem Schnittpunkt mit einer der Horizontallinien unmittelbar die Neigung der Fläche in diesem Punkt und damit durch ihre Tangente in diesem Punkt den Parallelkreis der „geographischen Breite“ des zugehörigen Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel. Es genügt, die „Trajektorien“ ganz oder als beliebig lange Bruchstücke nur nach Schätzung zu zeichnen, da der Neigungswinkel, den sie allein liefern sollen, auch bei ziemlich stark unrichtiger Schätzung noch ebenso genau richtig erhalten wird, als die übrigen Resultate der Konstruktion erhalten werden können. Diese Thatsache beruht darauf, dass eine gerade Strecke, rechtwinklig auf eine andere Gerade sehr wenig verschiedener Richtung projiziert, in der Projektion fast unverändert lang auftritt.

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Lichtstufe eines einzelnen Flächenpunktes, so wird man ein Bruchstück der Trajektorie durch den Punkt nur etwa über zwei oder drei Horizontalkurven weg zu beiden Seiten des Punktes zeichnen; sollen die geometrischen Orte für viele Horizontalkurven zugleich gesucht werden, so wird man die meisten Trajektorien so weit als möglich durchführen. Sie vereinigen sich im höchsten Punkt der Fläche.

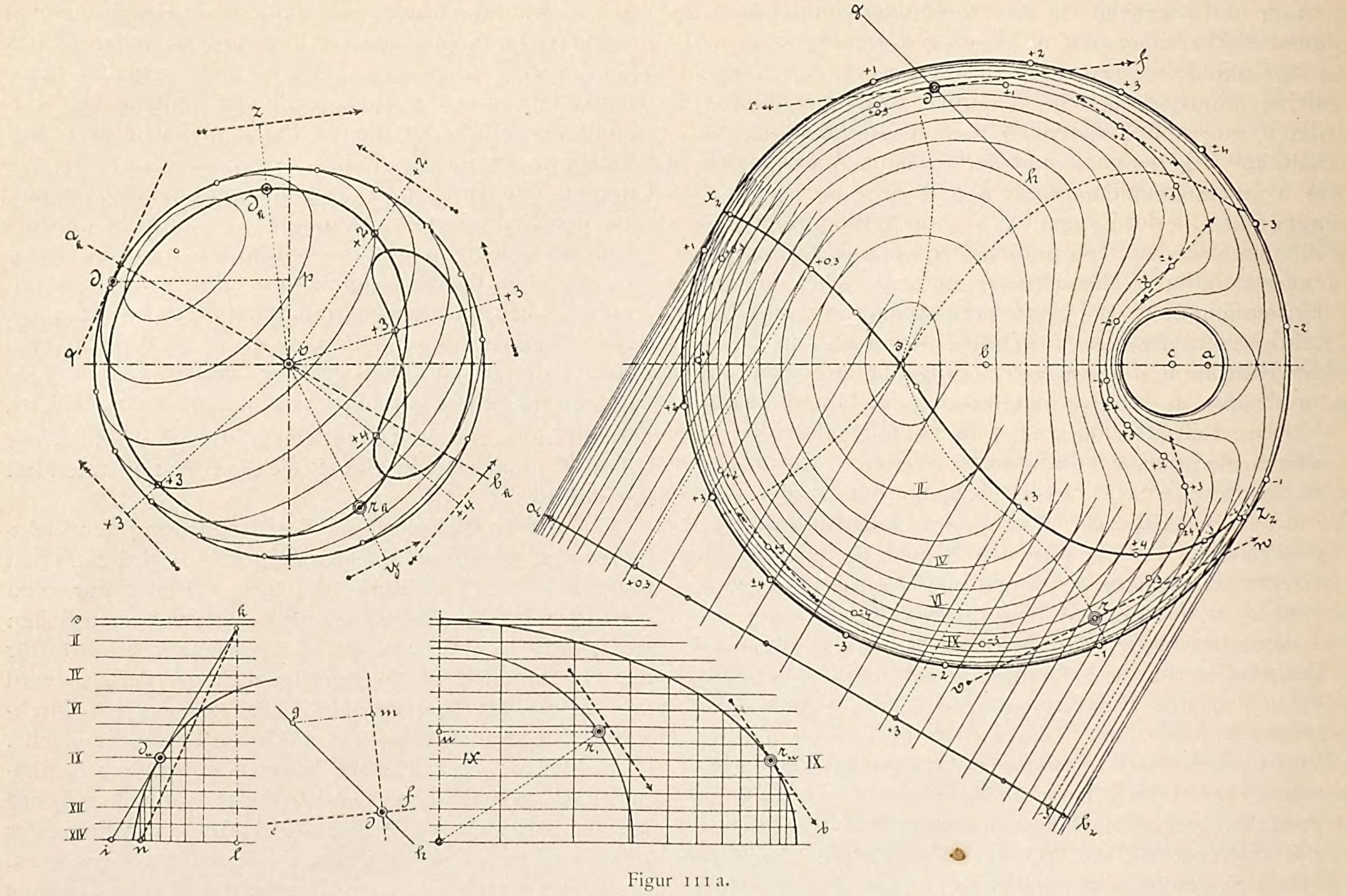
Bei allen beschriebenen Konstruktionen zur Bestimmung des geometrischen Ortes auf der Normalkugel wird man das oft sich wiederholende Auftragen geradliniger Reihen von Punkten mit einem Papierstreifen vornehmen.

In Figur 111a—c ist ein Beispiel für die beschriebene allgemeine Lösung gezeichnet; Figur 111a rechts zeigt das gewählte Gebilde, das sich als „exzentrische Wulstfläche“ benennen liesse, im Aufriss. In einer zur Vertikalebene parallelen Ebene liegt ein Kreis mit dem Mittelpunkt *b*, der einen andern, nicht konzentrischen, mit dem Mittelpunkt *c* einschliesst; die Fläche erzeugt sich durch einen beweglichen veränderlichen Kreis, dessen Ebene immer senkrecht zu derjenigen der festliegenden Kreise steht und dessen Durchmesser die zwischen beiden gelegene Strecke auf dem verlängerten Halbmesser des kleineren Kreises ist. (Richtiger wäre es, den Durchmesser auf einer Sehne durch den in beiden Kreisen geometrisch ähnlich liegenden Punkt *a* anzunehmen; es wäre dann keiner der beiden festen Kreise bevorzugt. Doch würde sich hiedurch die Fläche nur wenig ändern.)

Hier empfiehlt sich als erste Schnittkurvengruppe

offenbar eine solche parallel zur Vertikalebene; sie ist mit der Hilfsfigur 112a links rasch erhältlich. In dieser Figur sind 14 Lagen des erzeugenden Kreises konzentrisch gezeichnet und durch 15 Horizontallinien, welche die Schnittebenen bedeuten, durchschnitten. Der höchste Punkt jedes Kreises erscheint im Aufriss der Fläche als Halbierungspunkt des Sehnenstücks, in welchem sich der Kreis projiziert; die Abstände der Schnittpunkte des Kreises mit jeder der Horizontallinien vom vertikalen Radius der Hilfsfigur sind dieser zu entnehmen und auf dem Sehnenstück von jenem Halbierungspunkt aus nach rechts und links aufzutragen. (Da die Ebene der festen Kreise und die erste Schnittebenengruppe nicht horizontal sind, so Tangente in einem gegebenen Punkt genau richtig gezogen werden, an jene andern Schnittkurven nicht. Um dem allgemeinen Fall der gekrümmten Fläche möglichst nahe zu bleiben, ist die Einfachheit der Kreislinie nicht ausgenützt und die zweite zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung angenommen.

Zur Darstellung der Konstruktion des geometrischen Ortes auf der Kugel und der ganzzahligen Lichtstufenpunkte auf der Fläche ist die Schnittkurve IX ausgewählt. In einem beliebigen Punkt d dieser Kurve ist deren Tangente $e f$ und die Schnittlinie $g h$ parallel zur Lichtstrahlprojektion gezogen. Im Aufriss der Normalkugel, Fi-



Figur 111 a.

erscheint die Lösung nicht ganz in der ursprünglich beschriebenen Gestalt; doch wäre es leicht, die gegebene Figur mit allen im folgenden darauf erscheinenden Linien als Grundriss aufzufassen, indem man sie um 90° gedreht vorstellt.)

Da eine Selbstbeschattung stattfindet, so liegt ein Grund vor, die zweite, zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung einzuführen, um die Schnittkurven zugleich zur Schlagschattenbestimmung und zur Probe für die Kurve ± 4 benützen zu können. Aber auch die Benützung der Ebenen des erzeugenden Kreises als der zweiten Schnittebenengruppe hätte einen grossen Vorzug; diese Kreise sind schon in der Hilfsfigur 112a links vorhanden, wogegen jene andern Schnittkurven neu abzuleiten sind, und an einen Kreis kann die gur 111a links, erscheint als erster geometrischer Ort des zu d gehörigen Lichtstufenpunktes der Radius $o z$ senkrecht zu $e f$. Die Ebene $g h$, welche zum Zweck der Schlagschattenkonstruktion und Verwertung bei andern Vertikalschnittkurven durch die ganze Fläche zu führen wäre, liefert die in Figur 111a links unten herausgetragene Schnittkurve durch Auftragen der Abscissen und Ordinaten; $i k$ ist die Tangente dieser Kurve im Punkt $d_{,,}$, der in dieser Hilfsfigur den Flächenpunkt d darstellt. Der rechts hievon beigezeichnete Aufriss zeigt in $g h$ und $e f$ die Richtungen $g h$ und $e f$ aus dem Flächenaufriss wiederholt; $d m$ ist senkrecht zu $e f$, $k l$ eine Vertikale an beliebiger Stelle, $d g = l i$, $g m$ senkrecht zu $d m$, $l n = d m$; $k n$ ist die Projektion der in der Ebene $d g$ liegenden Flächentangente $k i$ auf die Ebene $d m$, das heisst auf eine

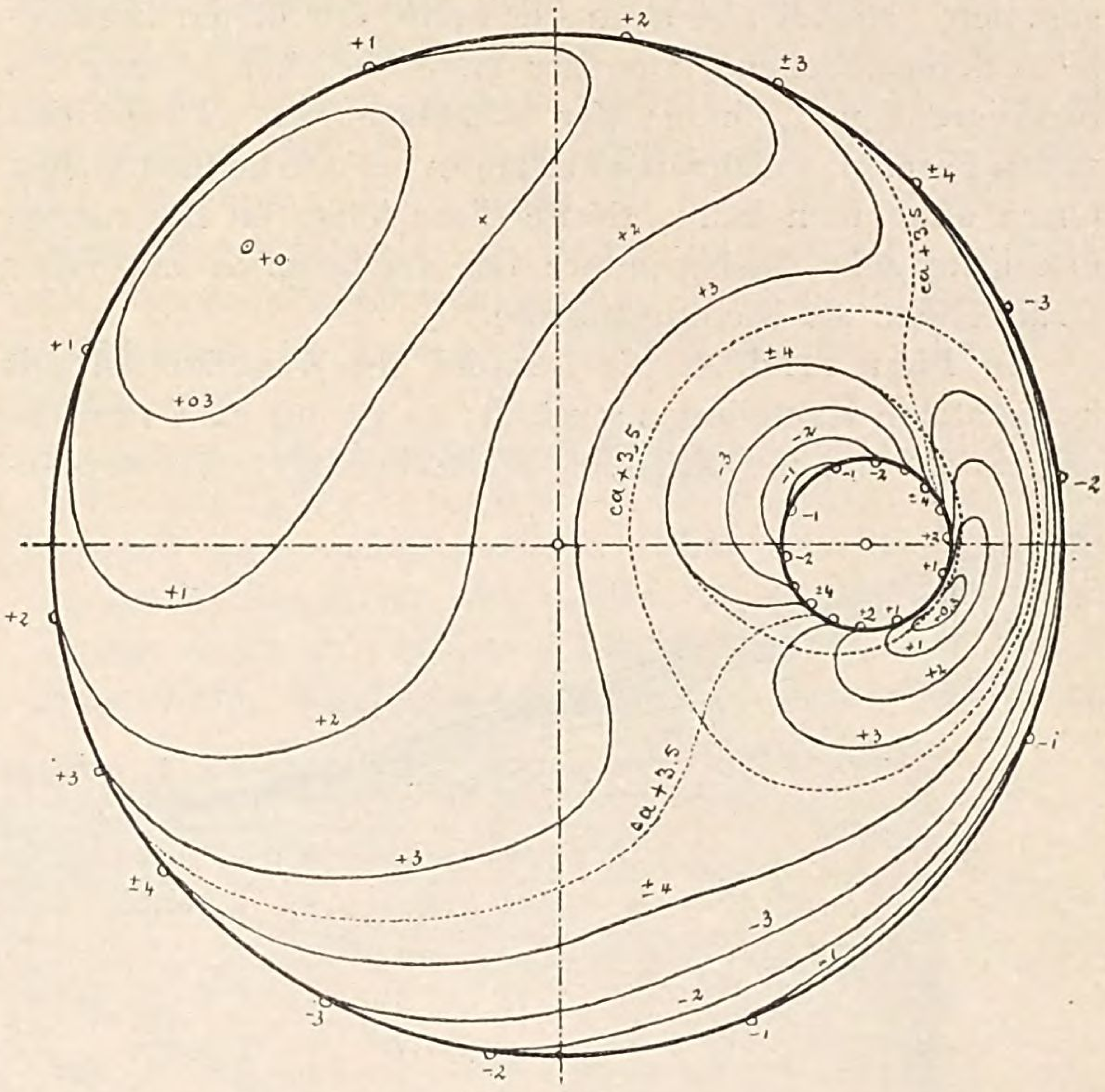
Schnittebene der Fläche, die senkrecht zu *ef* gerichtet ist, also die Neigungslinie der Berührungsebene der Fläche im Punkt *d* in Beziehung auf die Vertikalebene. An einem Normalkugelumriss ist die Tangente $q d_1$ parallel $n k$ gezogen, deren Berührungspunkt d_1 bestimmt und im Aufriss der Normalkugel auf dem zuvor bestimmten Radius $o d_k = p d_1$ aufgetragen; d_k ist der Lichtstufenpunkt auf der Kugel für den Flächenpunkt *d*. Durch Annahme weiterer Punkte *d* auf der Kurve *IX* erhält man die im Aufriss der Kugel gezeichnete Kurve als geometrischen Ort der Berührungspunkte aller Tangentialebenen, welche den längs der Kurve *IX* an die Fläche gelegten Tangentialebenen parallel sind. Wegen der Symmetrie der Fläche und der Kurve *IX* zu der Ebene *sbc* wird auch die Kugelkurve symmetrisch zu einer gleichgerichteten Grosskreisebene.

Auf der Flächenkurve *IX* ist ein zweiter Punkt *r* ausgewählt, um die oben beschriebene Verwertung der Trajektorien zu zeigen. Die punktierte Kurve *sr* ist die nur nach Schätzung eingetragene Trajektorie oder, räumlich aufgefasst, „Maximalneigungskurve“ für die Vertikalebene, fortgesetzt bis zum Flächenscheitel *s*. In Figur 111 a rechts unten ist die Verstreckung dieser Kurve und ihres projizierenden Cylinders ganz herausgetragen, obwohl zum Ziehen der Tangente $t r_{\prime\prime}$ nur ein kleines Stück nötig gewesen wäre. Punkt r_1 am Kugelbild entsteht durch $h r_1$ senkrecht zu $t r_{\prime\prime}$. Im Aufriss der Normalkugel ist der Radius *oy* senkrecht zur Tangente *vw* gezogen und $o r_k = u r_1$ aufgetragen; r_k ist der zu *r* gehörige Lichtstufenpunkt.

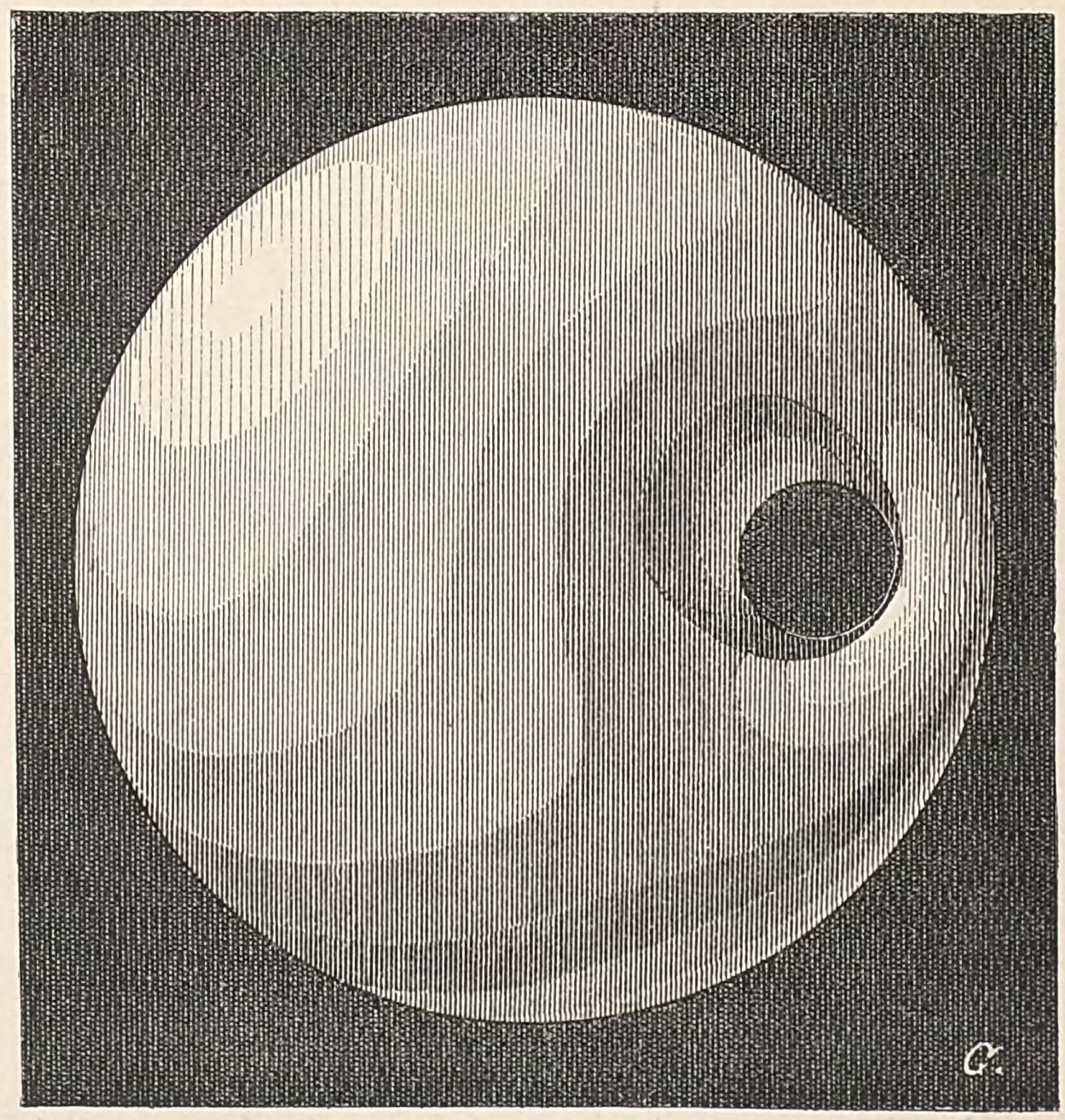
Ist in dieser oder der erstbeschriebenen Weise die Kurve des geometrischen Ortes für die Berührungsebenen längs der Flächenlinie *IX* bestimmt, so zieht man die Radien nach den Schnittpunkten dieser Kurve mit den Lichtstufenellipsen des Kugelbildes. In der Figur sind zur Darstellung dieses Teils der Konstruktion die Schnittpunkte mit den Ellipsen + 2 + 3 ± 4 ausgewählt. Eine Tangente an die Flächenlinie *IX* senkrecht zu dem nach dem Schnittpunkt + 2 gezogenen Radius liefert als Berührungspunkt einen Lichtstufenpunkt + 2 der Fläche. Die drei zu den Kugelpunkten gehörigen Tangenten sind durch Querstriche hinter den Pfeilen unterschieden. (Nicht an jeder Stelle der Flächenlinie, an welcher eine solche Tangente möglich ist, darf sie gezogen werden. Wenn etwa die Kugelkurve eine Lichtstufenellipse + 3 viermal schneidet, wie im vorliegenden Fall, so ist wohl zu untersuchen, zu welchem Teil der Flächenkurve jeder Schnittpunkt gehört.)

Zur Durchführung des Verfahrens würde man noch etwa die Vertikalschnittkurven *II*, *IV*, *VI* auszuwählen und für jede ein eigenes Kugelbild mit dem geometrischen Ort wie für die Linie *IX* zu zeichnen haben; weitere zur Konstruktion gehörige Bemerkungen sind in Art. 113 ausgesprochen. Figur 111 b zeigt die Lichtstufenlinien und Schlagschattengrenzen des betrachteten Gebildes; in Figur 111 c erscheint es mit durchgeführter Schattierung.

Ausser der schon anfangs erwähnten schiefen Kreiskegelfläche und Kegelfläche mit beliebiger Basis war das Kugelkonoid in Art. 110 ein Beispiel für diese erste allgemeine Lösung. Nur erschien sie dort mit der Umkehrung, dass die zweiten Schnittebenen auf der Kugel, anstatt auf der Fläche und die geometrischen Orte auf der Fläche, anstatt auf der Kugel gesucht wurden. Diese Umkehrung ist bei allen Regelflächen mit Richtebenen für



Figur 111 b.



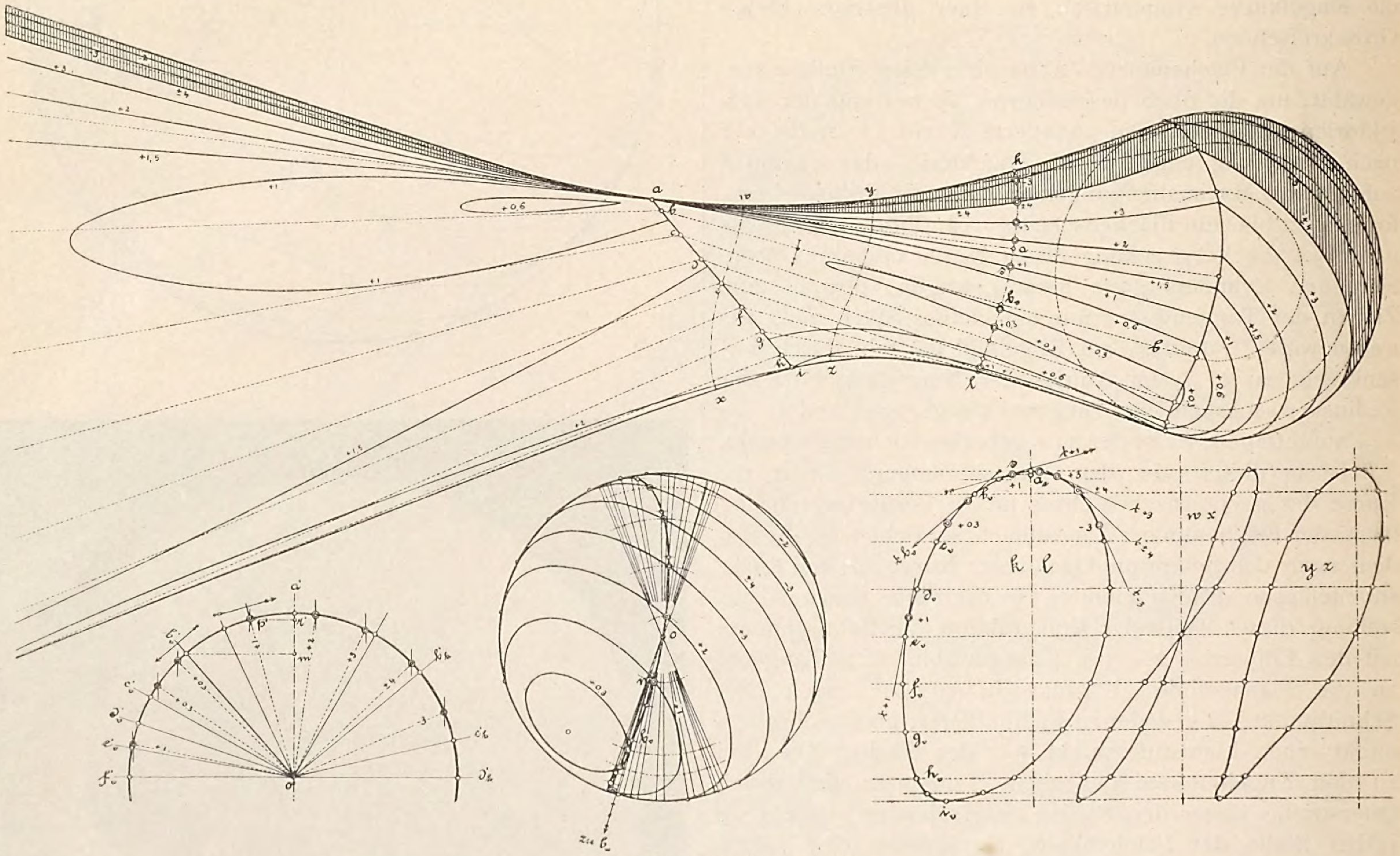
Figur 111 c.

die Erzeugenden möglich, aber auch nur bei diesen Flächen.

Eine letzte Variante der beschriebenen allgemeinen Lösung erscheint, wenn die Trajektorien nicht nur als

Hilfsmittel zum Aufsuchen der geometrischen Orte für andere Schnittkurven dienen, sondern für sich selber, oder vielmehr für die Gefällskurven, deren Projektionen sie darstellen, die geometrischen Orte auf der Kugel bestimmen. Hiebei treten an die Stelle der ersten horizontalen Schnittebenengruppe der ursprünglichen Lösung die projizierenden Cylinder der Gefällskurven. Unter den vielen Formen, welche das Verfahren mit den geometrischen Orten annehmen kann, dürfte diese letzte oft die zweckmässigste sein, insbesondere bei Regelflächen mit einer Grundebene als Richtungsebene.

In Figur 111 d ist als Beispiel ein Kugelkonoid mit horizontalen Mantellinien gewählt; es ist nur als Grundriss dargestellt und in folgender Weise erzeugt. An der ge-normal zur Mantellinie gerichtet ist, und der im Grundriss der Normalkugel (zweite Hilfsfigur unten) als Radius erscheint. Hieraus ergeben sich die zwei Strahlenbüschel, welche sämtliche Lichtstufenpunkte der Kugel, die denen der Fläche entsprechen, in sich schliessen müssen. Im Grundriss der Fläche ist die Trajektorie *k l* gezogen, welche alle von oben sichtbaren Mantellinien ganz oder annähernd rechtwinklig schneidet. Aus der Verstreckung ihrer zwischen den Mantellinien liegenden Stücke und aus der Höhenlage der Mantellinien ergab sich die in der dritten Hilfsfigur gezeichnete Linie als „abgewickelte Gefällskurve *k l*“ der Fläche (zwei weitere solche Kurven sind beigefügt). Im Schnittpunkt b_v dieser Kurve, der der Höhenlage der Mantellinie b_v entspricht, ist eine Tangente $t\,b_v$



Figur 111 d.

zeichneten Kugel einerseits und der geneigten Geraden *a i* andrerseits gleitet eine horizontale Gerade; die höchstliegende Tangente der Kugel geht durch *a*, die tiefstliegende durch *i*; von den sieben andern Punkten der Linie *a i* sind als Mantellinien der Fläche je zwei Tangenten an einen gleich hoch liegenden horizontalen Parallelkreis der Kugel gezogen. Die an der Vorderseite der Kugel berührende, durch *b* gezogene Mantellinie ist mit b_v bezeichnet. (Zwei weitere benützte Punkte der Linie *a i* sind nur in den Hilfsfiguren eingetragen.) Nur die von oben sichtbaren Mantellinien sind im Flächengrundriss gezeichnet und zwar punktiert, um sie von den Lichtstufenlinien zu unterscheiden.

Für jede horizontale Mantellinie liegen die Lichtstufenpunkte auf einem vertikalen Grosskreis, dessen Ebene gezogen und im Aufriss der Normalkugel (erste Hilfsfigur) ein Radius $o'\,b'_v$ senkrecht zu dieser Tangente. Im Grundriss der Normalkugel ist auf dem zur Mantellinie b_v normalen Radius das Mass $o\,b_v$ gleich dem im Aufriss erhaltenen Horizontalmass $m'\,b'_v$ aufgetragen und dadurch der Punkt b_v des geometrischen Ortes auf der Normalkugel bestimmt, welcher der Flächenkurve *k l* entspricht. Die Figuren lassen auch die Bestimmung weiterer Punkte des geometrischen Ortes verfolgen.

Die für diesen erhaltene Kurve schneidet die Lichtstufenlinie + 1 in einem Punkt *n*. Im Aufriss der Normalkugel ist Punkt *p'* bestimmt durch $r'\,p' = o\,n$. An die Kurve *k l* ist eine Tangente *t* + 1 normal zum Radius $o'\,p'$ gezogen; der Berührungspunkt *s* dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt + 1 in der abgewickelten Gefällskurve.

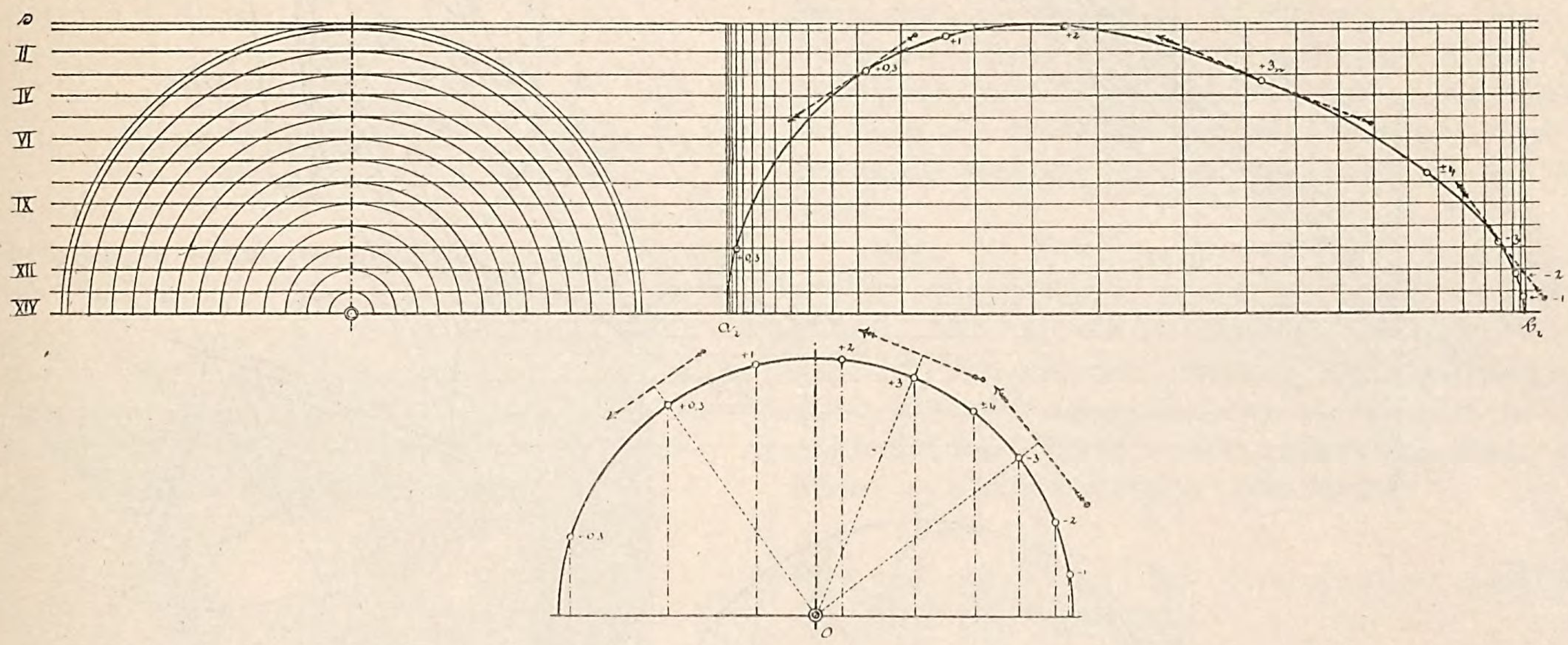
Er wird in den Grundriss der Fläche übertragen, indem dort das Bogenmass $s\,a$ gleich dem Horizontalmass $s\,a_e$ in der Abwicklung gemacht wird.

112. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, zweites Verfahren: mit berührenden Cylinderflächen. Gebilde durch Höhenkurven gegeben.

Ein zweites allgemeines Verfahren zum Bestimmen der Lichtstufenlinien auf gekrümmten Flächen ist das folgende. Man zeichnet wie beim ersten Verfahren die Schnittkurven beliebiger Horizontalebenen mit der Fläche. Im allgemeinen wird man die Abstände der Horizontalschnitte gleich gross anzunehmen suchen, in welchem Fall sie nach dem Vorgang der topographischen Flächendarstellung als „Höhenkurven" bezeichnet werden können. Zieht man an die im Grundriss gezeichneten Horizontalschnittkurven parallele Tangenten einer beliebigen Richtung und verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve, so bilden die Tangenten die Mantellinien einer horizontalen Cylinderfläche, welche die gegebene Fläche nach dieser Kurve berührt. Wo die ganzzahligen Lichtstufenpunkte dieser Kurve liegen als auf einer Linie in der Cylinderfläche, da liegen sie auch für die gegebene Fläche. Der Normalschnitt der Cylinderfläche ist leicht getrennt herauszuzeichnen, da die Mantellinien nach Grundriss und Höhenlage bekannt sind. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf der Cylinderfläche ist in Art. 99 gezeigt. Wo eine ganzzahlige Lichtstufenmantellinie, z. B. + 3, jene Berührungskurve schneidet, da ist ein Lichtstufenpunkt + 3 auf der gegebenen Fläche. Weitere Richtungen der horizontalen Tangentengruppen geben weitere Berührungslinien und auf diesen weitere ganzzahlige Lichtstufenpunkte.

Da es schwierig oder unmöglich ist, auf derselben Figur über ein System von vielen Horizontalkurven weg, die sich ja zuweilen auch überschneiden können, viele Paralleltangentengruppen verschiedener Richtung zu legen und getrennt aufzufassen, so wird man das Horizontalkurvensystem nur einmal zeichnen und jede Tangentengruppe samt der zugehörigen Berührungskurve auf einem eigenen Blatt durchsichtigen Papiers davon abnehmen, wobei die Horizontalkurven auf dem Pausblatt und die Berührungskurven auf dem Horizontalkurvenblatt wegbleiben. Wenn später auf dem Pausblatt die Lichtstufenpunkte der Berührungskurve konstruiert sind, werden sie auf das Reinblatt für die zu schattierende Flächendarstellung durchgestochen, wobei für die richtige Lage des Pausblattes Merkmale vorgesehen sein müssen. Die Benützung des Papierstreifens zum Auftragen geradliniger Punktreihen ist auch hier ein schätzbares Förderungsmittel.

Dieses zweite allgemeine Verfahren, das als dasjenige „mit berührenden Cylinderflächen" bezeichnet werden kann, wird meist erheblich rascher zum Ziel führen, als das erste. Nur werden die Berührungskurven, die alle durch den höchsten Flächenpunkt laufen, sich in dessen Nähe häufen und anderwärts grössere leere Flächen zwischen sich übrig lassen. In solche leere Stellen wird man kleinere Gruppen von Paralleltangenten einschalten, welche nur kurze Stücke von Berührungskurven liefern; auch kann wohl oft ein Hereinziehen des ersten Verfahrens für bestimmte Teile der Horizontalkurvengruppe zweckmässig sein.



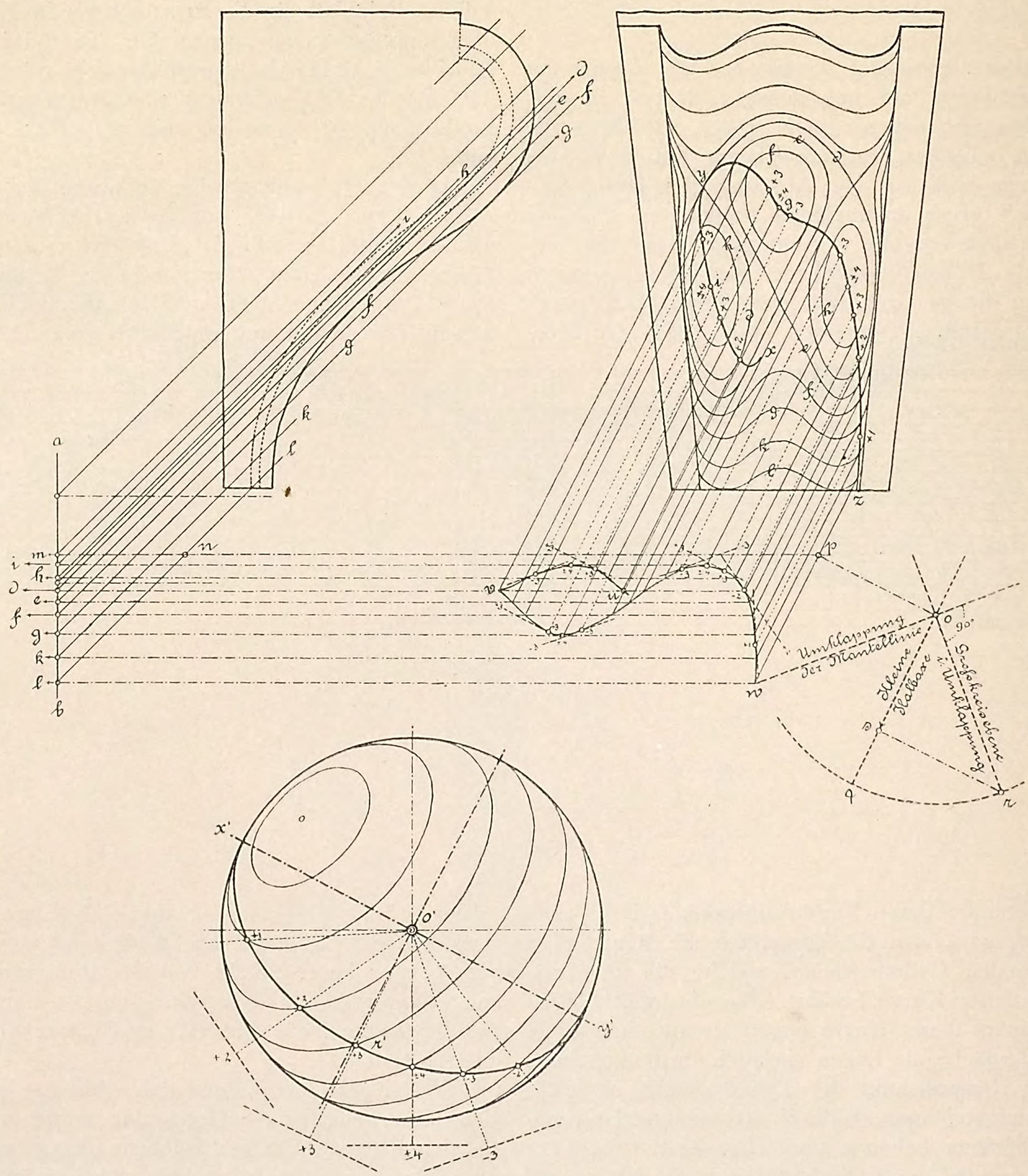
Figur 112 a.

Wie beim ersten allgemeinen Verfahren, so sind auch bei diesem zweiten die Horizontalschnitte oft zu ersetzen durch solche, die der Vertikalebene parallel oder senkrecht zum Grundschnitt gerichtet oder schiefgerichtet, wenn auch senkrecht zu einer Grundebene sind.

Zur Darstellung der Konstruktion ist als erstes Beispiel die in Figur 111 a gezeichnete exzentrische Wulstfläche mit denselben früher beschriebenen zur Vertikalebene parallelen Schnittebenen wiedergewählt. Mit einer beliebigen Richtung sind parallele Tangenten an die Schnittkurven gelegt und deren Berührungspunkte stetig verbunden worden; hiedurch ist die Kurve $x_2\,s\,z_2$ entstanden, nach welcher die mit den Tangenten vorgestellte Cylinderfläche die Wulstfläche berührt. $a_2\,b_2$ ist ein Normalschnitt der Cylinderfläche; durch Auftragen der

Abscissen und Ordinaten (Figur 112a rechts) ist die Normalschnittkurve selbst erhalten. Der Normalkugelaufriss (Figur 111a links) ist mit der Grosskreisebene $a_k b_k$ parallel zu $a_2 b_2$ geschnitten und der Schnittkreis samt seinen Lichtstufenpunkten in Figur 112a unten gezeichnet. Am Cylindernormalschnitt ist eine Tangente senkrecht zu dem Radius $0 + 3$ gezogen und der Berührungspunkt $+ 3 n$ stufenpunkte können aus derselben Normalschnittkurve in Figur 112a abgeleitet werden. Einige weitere Tangentenrichtungen haben in Verbindung mit den in Art. 113b besprochenen Hauptlinien genügend viele weitere Lichtstufenpunkte der Fläche geliefert.

Für eine schräge Richtung der Schnittebenen ist die in Figur 73 dargestellte Röhrenfläche mit veränderlicher

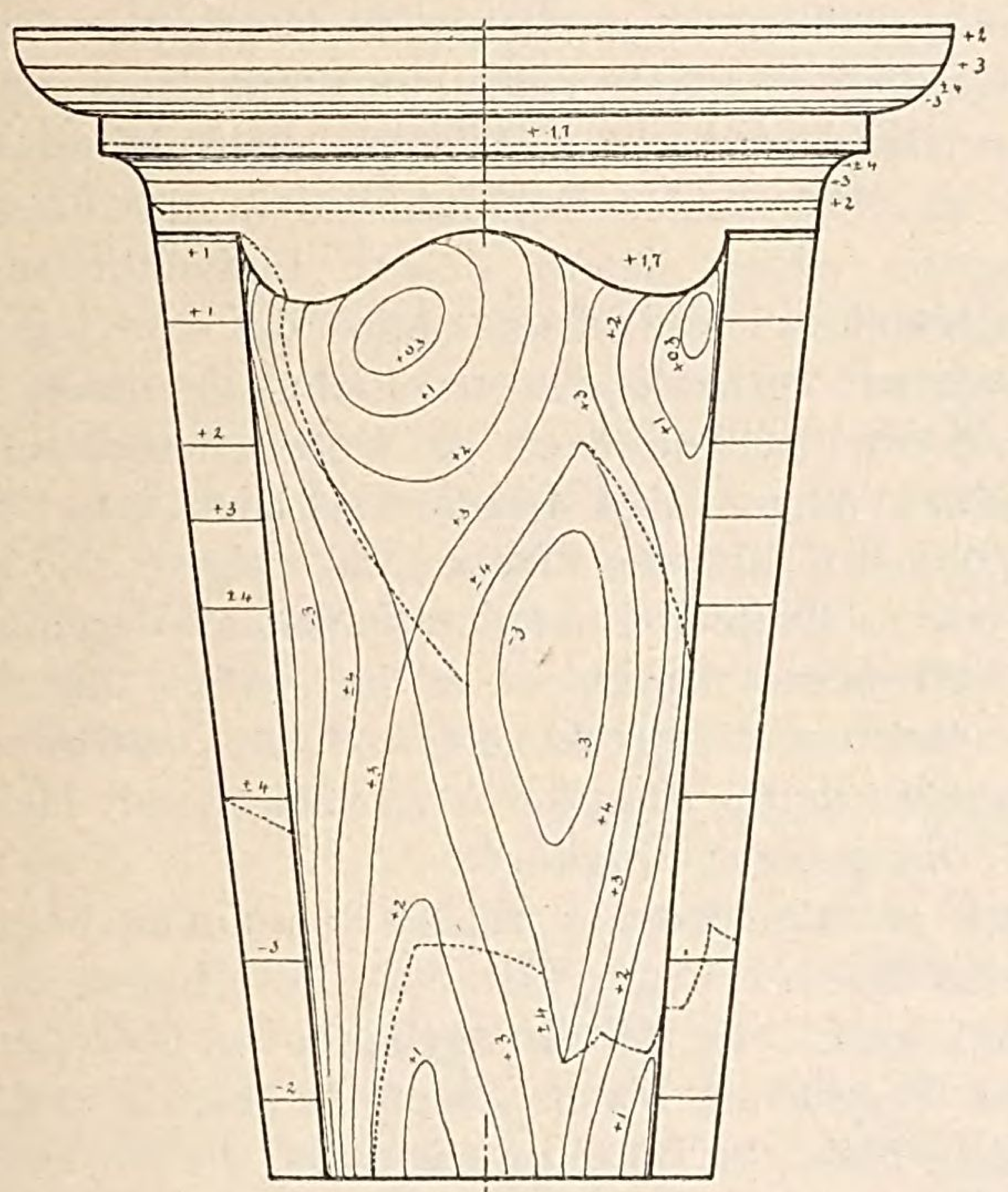


Figur 112b.

dieser Tangente auf die Linie $a_2 b_2$ nach $+ 3$ zurückgetragen. Der Schnitt der durch diesen Punkt $+ 3$ gezogenen Cylindermantellinie mit der Kurve $x_2 s z_2$ liefert einen Lichtstufenpunkt $+ 3$ auf der Fläche. Die Figuren lassen auch die Bestimmung der andern ganzzahligen Lichtstufenpunkte der Berührungskurve $x_2 s z_2$ verfolgen. Im Aufriss der Fläche ist noch eine zweite kongruente Berührungskurve, welche sich für eine symmetrische Tangentenrichtung ergeben würde, punktiert eingezeichnet; ihre Licht-

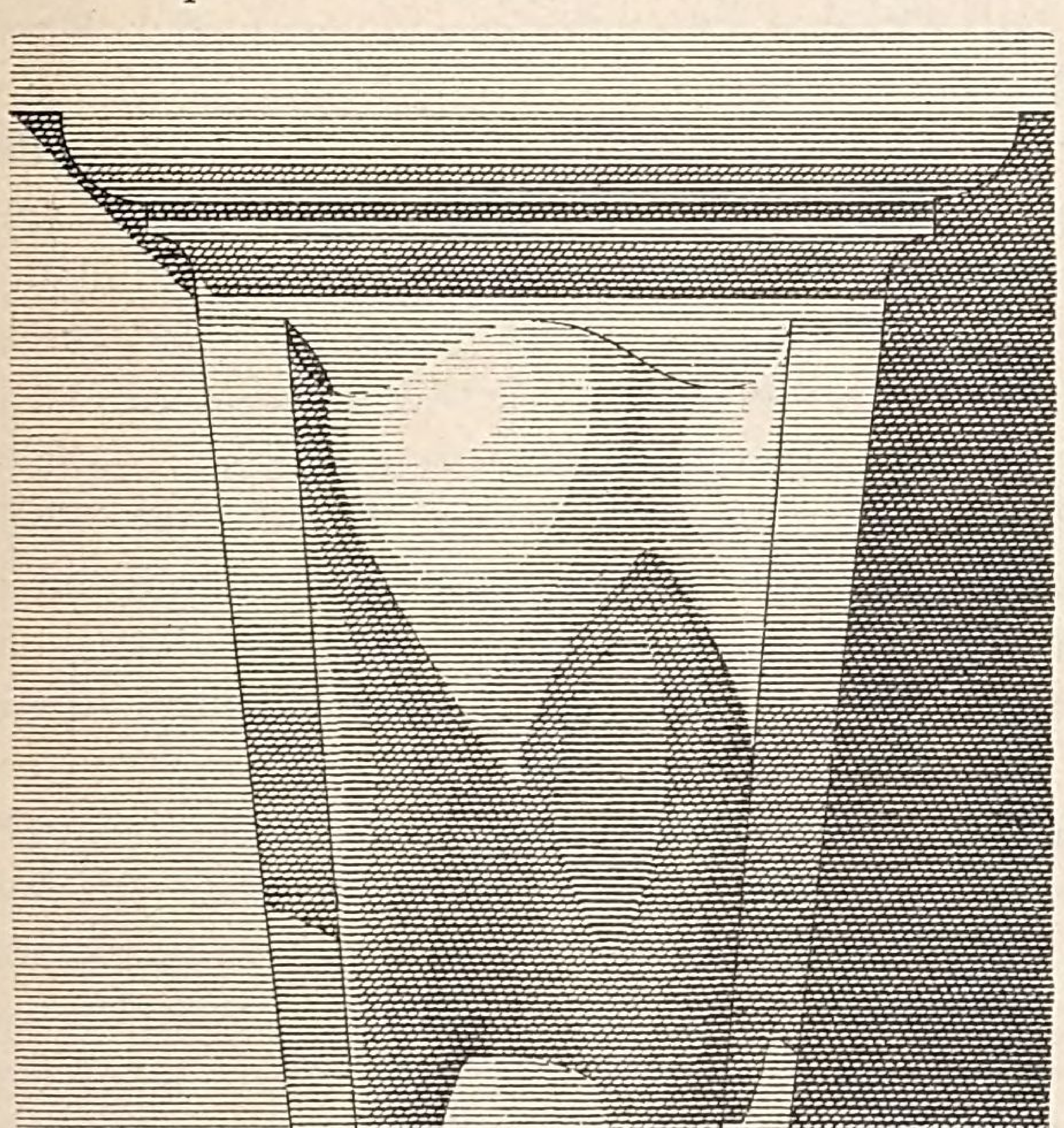
Erzeugenden, als Volutenkonsole mit Leitlinie parallel zur Seitenebene gedacht, ein interessantes Beispiel. Die in dieser Figur gezeichneten Schnittkurven der Fläche mit Lichtstrahlenebenen, die senkrecht zur Seitenebene stehen, können auch zur Bestimmung der Lichtstufenlinien verwertet werden. Zieht man (Figur 112b) mit einer beliebigen Richtung an diese Kurven parallele Tangenten, verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve $x y z$ und betrachtet die in der Seitenprojektion gezogenen

Lichtstrahlen als die auch zu diesen Tangenten gehörigen Seitenprojektionen, so bilden die Tangenten eine Cylinderfläche, deren Spur oder Basis in der Vertikalebene oder



Figur 112 c.

einer beliebigen zu dieser parallelen Ebene $a\,b$ durch Aufsuchen der Spuren ihrer Mantellinien bestimmt werden



Figur 112 d.

kann, und für welche jene Kurve $x\,y\,z$ die Berührungslinie mit der Röhrenfläche darstellt. Wo auf dieser Linie die ganzzahligen Lichtstufenpunkte für die Cylinderfläche liegen, da liegen sie auch für die Röhrenfläche. Auf der Cylinderfläche sind die Lichtstufenlinien nach Art. 100 erhältlich; was dort für die horizontale Basis erklärt wurde, ist auf die in der Vertikalebene liegende leicht übertragbar. Durch weitere Gruppen paralleler Tangenten an dem schon früher für die Schlagschattenkonstruktion erhaltenen Schnittkurvensystem lassen sich genügend viele weitere Lichtstufenpunkte erhalten.

Figur 112b macht ausser den Mantellinien der Berührungscylinderfläche die Konstruktion ihrer Basislinie oder Spur $u\,v\,w$ auf einer zur Vertikalebene parallelen Ebene $a\,b$ anschaulich. In etwas veränderter Ausführung der in Art. 100 erklärten Konstruktion ist die vertikalprojizierende Ebene der Cylindermantellinie $w\,p$ in die Vertikalebene umgeklappt, indem $p\,o = m\,n$ aufgetragen ist. $w\,o$ ist die Umklappung der Mantellinie; die Ebene des Normalkugelgrosskreises, auf welchem die Lichtstufenpunkte der Cylinderfläche zu suchen sind, steht senkrecht zu der Mantellinie und projiziert sich auf die umzuklappende Ebene als eine Gerade $o\,r$ senkrecht zu $w\,o$. Ist $o\,r$ gleich dem Normalkugelradius, so ist $o\,s$ (die rechtwinklige Projektion von $o\,r$ auf $o\,q$ parallel $w\,p$) die kleine Halbachse der Ellipse, als welche sich jener Grosskreis im Aufriss der Normalkugel darstellt. Ihre grosse Achse $x'\,y'$, als der zur Vertikalebene parallele Durchmesser des Grosskreises, ist senkrecht zur Aufrissrichtung $w\,p$ der Mantellinien.

Durch die Schnittpunkte der Berührungsellipse mit den Lichtstufenellipsen $+ 2 + 3 \pm 4$ und $- 3$ sind die Radien, dann an die Basiskurve $u\,v\,w$ Tangenten senkrecht zu diesen Radien gezogen. Die Berührungspunkte dieser letzten waren zu benützen wie beim ersten Beispiel, wofür die Mantellinien zu den Lichtstufenpunkten auf der Kurve $x\,y\,z$ punktiert eingezeichnet sind.

Bemerkungen zu den besonderen und allgemeinen Verfahren. 113.

Die beiden beschriebenen Konstruktionen für Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten Flächen geben in ihrem Verhältnis zu den früheren Lösungen und für sich allein betrachtet noch zu folgenden Bemerkungen Anlass.

a) Die früher erklärten Lichtstufenbestimmungen für gerade Kreiskegel und Cylinderflächen, Drehungsflächen u. s. f. erweisen sich, wie zu vermuten war, als vereinfachte besondere Fälle des erstbeschriebenen allgemeinen Verfahrens, wenn dieses noch in einigen Richtungen erweitert gedacht wird. (Dabei ist nur abzusehen vom dreiachsigen Ellipsoid, elliptischen Hyperboloid und rechtwinkligen Konoid, die auf dem Umweg über eine Drehungsfläche beziehungsweise Wendelfläche zu ihren Lichtstufen gelangt sind.) Die Vereinfachung liegt zum grössten Teil in der Gestalt des geometrischen Ortes, der fast immer ein Kugelkreis war und zugleich den Kugelkreis der allgemeinen Lösung ersetzte, also zwei Kurven derselben zugleich vertrat; zum andern Teil findet sie sich darin, dass von den Punkten des geometrischen Ortes meist nur ein einziger zu suchen war und dieser sich leichter ergab, als im allgemeinen Fall; zu einem dritten Teil erscheint sie in einem vereinfachten Ziehen der parallelen Tangenten.

Für alle Horizontalschnitte des geraden vertikalen Kreiskegels und Cylinders war derselbe horizontale Kugelkreis der geometrische Ort, so dass nur ein solcher Schnitt nötig war; für die Drehungsflächen erschienen verschiedene Parallelkreise für verschiedene Parallelschnitte der Fläche; in beiden Fällen ersetzten sich die parallelen Tangenten der allgemeinen Lösung durch parallele Radien oder durch die Proportionalteilungen der geradlinigen Parallelkreisprojektionen, in denen ja doch immer das Gleichgerichtetsein der Tangenten vorgestellt wird. Bei schiefgerichteten geraden Kreiskegel- und Drehungsflächen liegt dieselbe Vereinfachung derjenigen Gestalt der allgemeinen Lösung vor, bei welcher schon die erste Schnittebenengruppe schiefgerichtet ist.

Für die schiefen Cylinderflächen beliebigen Normalschnitts gilt dasselbe, wogegen schon die Kegelfläche mit beliebiger Basis die allgemeine Lösung nur mit ganz unwesentlicher Vereinfachung erfordert, indem nur die Mantellinien an die Stelle der geneigten Kurventangenten der allgemeinen Lösung treten. Die Röhrenflächen beider Arten bringen zwar wieder sehr einfache geometrische Orte auf der Kugel mit sich, erfordern jedoch andererseits eine erweiterte Auffassung der allgemeinen Lösung, indem hier schon für die erste Schnittebenengruppe das Gleichgerichtetsein aufgegeben ist.

Bei den Rückungsflächen erscheinen wieder die Parallelschnitte der allgemeinen Lösung. Ist die Erzeugende unveränderlich, so sind die geometrischen Orte auf der Kugel Grosskreise verschiedener Richtung und die Lösung gestaltet sich einfach. Bei veränderlichen und drehenden Erzeugenden fallen die Vereinfachungen weg und die allgemeine Lösung tritt ganz oder nahezu unverändert auf.

Bei den Schraubenflächen sind die parallelen Schnittebenen durch konzentrische Schnittcylinder ersetzt, weil hiedurch abermals ein einfacher geometrischer Kugelort erzielt wird; bei diesen Flächen ist also die allgemeine Lösung abermals in einer früher nicht ausgesprochenen Richtung erweitert aufzufassen. Das Gleichgerichtetsein der Horizontaltangenten ist hier zwar vorhanden, aber nicht unmittelbar herbeigeführt, sondern auf dem Umweg einer Verdrehung um den Winkel zwischen Gefällslinie und Radius erzielt, so dass diese Lösung eine eigenartige Verbindung von Erweiterung und Vereinfachung des allgemeinen Verfahrens darstellt.

b) Auf den meisten gegebenen Flächen werden sich bestimmte Hauptlinien finden, für welche sich die Lichtstufenpunkte einfacher und mit grösserer Sicherheit bestimmen lassen, als nach den allgemeinen oder sonst anzuwendenden Verfahren. Schon bei der schraubenförmigen Wulstfläche war diese Thatsache festzustellen; ihre Lichtstufenpunkte auf der äussersten und innersten Schraubenlinie ergeben sich durch Betrachtung der zwei berührenden Vertikalcylinder unabhängig von der Konstruktion mit den Umhüllungskugeln. Auf demselben Weg können auf dem dreiachsigen Ellipsoid und elliptischen Hyperboloid die Lichtstufenpunkte auf denjenigen drei Schnittkurven, deren Ebenen je durch zwei Achsen gelegt sind, unabhängig von der früher erklärten Konstruktion und mit grösserer Sicherheit erhalten werden.

Bei dem für die allgemeinen Lösungen als erstes Beispiel gewählten exzentrischen Wulst ergeben sich leicht vier Hauptlinien, nämlich der zur Vertikalebene parallele äussere Umrisskreis *b*, der gleichgerichtete innere Umrisskreis *c* und die beiden Schnittkreise in der Ebene *s b c*. Die beiden ersten liefern sichere Endpunkte und Berührungspunkte der Lichtstufenlinien da, wo Kreiscylinder senkrecht zur Vertikalebene ihre Lichtstufenpunkte hätten, nur sind beim kleinen Kreis die Vorzeichen umzukehren. Die beiden letzten sind Berührungslinien von vertikalen Kreiscylindern mit der Fläche und zeigen also je eine Reihe von Lichtstufenpunkten proportional derjenigen auf dem horizontalen Durchmesser im Aufriss der Normalkugel. Bei der Volutenkonsole ist die vertikalstehende Achsenschnittkurve eine leicht zu verwertende Hauptlinie, ebenso die obere Umrisskurve.

Der grössere Vorzug dieser Hauptlinien liegt in der grösseren Sicherheit, mit der ihre Punkte bestimmt werden können. Als Berührungslinien von Cylinderflächen mit den gegebenen Flächen sind sie nichts anderes als besondere Fälle der Berührungskurven, die in der zweiten allgemeinen Lösung auftreten. Es ist einleuchtend, dass für alle Umrisse, welche durch Auswölbung gebildet sind, dasselbe gilt, wie für den exzentrischen Wulst; die Tangente im Endpunkt und Berührungspunkt einer beliebigen Lichtstufenlinie + 3 an der Umrisslinie irgend einer solchen Fläche muss parallel sein der Tangente am gleichnamigen Punkt + 3 am Umriss der Normalkugel. Dies gilt ausdrücklich auch dann, wenn die Umrisskurve im Raum, das heisst die Berührungslinie des von den Projektionsloten gebildeten Cylinders mit der Fläche, eine schiefliegende oder gewundene ist. Diese Thatsache ist als für die meisten Flächen sehr wichtig hervorzuheben. Unter anderem können die Endpunkte der Lichtstufenlinien am Umriss des gewundenen Säulenschaftes (Figur 109a) in dieser Weise genau bestimmt werden, ebenso im Aufriss der Wulströhre Figur 107c, endlich in den Figuren 106b und 111d.

c) Auf den meisten gegebenen Flächen werden sich gleich anfangs durch Ueberlegung oder Konstruktion bestimmte Linien feststellen lassen, welche von ganzzahligen Lichtstufenlinien nicht berührt oder durchschnitten werden können. Solche Scheidelinien der Lichtstufengruppe, welche einen Einblick in deren Verlauf frühzeitig eröffnen, haben sich schon bei den Drehungsflächen in Art. 94, Satz c) und Art. 95, Satz d) als nur gedachte Parallelkreise und zugleich Lichtstufenlinien + 1,7 oder — 1,7 gefunden. Bei dem rechtwinkligen Konoid in Art. 110 und Figur 77a und b sind die zwei horizontalen Fusslinien und die Scheitellinie solche Scheidelinien, und zwar geradlinige, während die übrigen Lichtstufenlinien gekrümmte sind, ebenso beim Kugelkonoid in Art. 111 die oberste und unterste Erzeugende.

Für beide allgemeine Verfahren ist als wichtige Thatsache hervorzuheben, dass jede Schnittkurve der ersten oder zweiten Gruppe, oder jede einer Trajektorie entsprechende Flächenkurve, oder endlich jede Berührungs-

linie einer Cylinderfläche eine solche Scheidelinie für alle diejenigen Lichtstufenlinien wird, deren Punkte nicht auf ihr vertreten sind. Diese Linien können sie nicht berühren oder durchschneiden. Wenn auch auf einer solchen Kurve gar kein Lichtstufenpunkt gefunden wird, so ist sie doch nicht fruchtlos ausgewählt und behandelt, sondern als eine solche Scheidelinie für den Verlauf der gesuchten Linien verwertbar.

d) Auf vielen Flächen finden sich Lichtstufenlinien mit Kreuzungspunkten zwischen vier Gruppen umkehrender Kurven; doch ist es ein seltener Zufall, wenn eine ganzzahlige Lichtstufenlinie sich selber schneidet. Schon beim ringförmig steigenden Gewölbe in Figur 106b und bei der schraubenförmigen Wulstfläche oder Röhre in Figur 107b sind solche Kreuzungen festgestellt und erörtert worden; während dort die Kurven unganzzahlige waren, ist bei der Volutenkonsole in Figur 112c zufällig die Kurve + 3 eine Kreuzungskurve geworden. Wie sie als Kurve etwa + 3,5 bei dem exzentrischen Wulst zu vermuten sein dürfte, ist in Figur 111b punktiert eingezeichnet. Die scharfe Bestimmung ihrer Lage und Benennungszahl wäre aber bei diesem Beispiel minder einfach als bei den früheren und wohl nur durch Versuche möglich. Die gewundene Säule, Figur 109a, hat eine Kreuzungskurve zwischen + 2 und + 3.

e) Die zweite allgemeine Lösung in Art. 112 kann durch die Verwertung einer etwa vorhandenen Symmetrie der Fläche ebensowohl Arbeit ersparen wie die erste durch Benützung der Symmetrie der Kurven der geometrischen Orte auf der Kugel. Zu jeder Richtung der Tangenten bei beiden Beispielen in Art. 112 giebt es eine symmetrische, welche beim exzentrischen Wulst eine kongruente Normalschnittlinie bei veränderter Richtung der Normalschnittebene und bei der Volutenkonsole eine symmetrische Spurlinie der Cylinderfläche ergiebt.

f) Bei beiden allgemeinen Verfahren sind oft Tangenten in gegebenen Punkten an Kurven mit unbekanntem Gesetz zu ziehen und Berührungspunkte von Tangenten gegebener Richtung an solchen Kurven zu bestimmen. Dies muss meist nach Schätzung geschehen, wodurch eine kleinere oder grössere Unsicherheit über das Resultat der Konstruktion des Einzelpunktes unvermeidlich hereinkommt. (Um so wichtiger sind die oben unter b) genannten sicheren Punkte der Hauptlinien.) Man darf sich hienach durch einander mässig widersprechende Punktbestimmungen nicht beirren lassen. Im allgemeinen korrigieren sich die zu einer Kurve gehörigen Punkte gegenseitig, wenn genügend viele bestimmt werden, und gestatten, den Verlauf der Linie genügend richtig festzusetzen.

g) Häufig werden die ausgewählten Schnittkurven oder Berührungslinien der Cylinderflächen punktleere Räume zwischen sich übrig lassen, welche an wichtigen Stellen Unsicherheit über den Verlauf der Lichtstufenlinien mit sich bringen. In diesen Fällen, ebenso wo die gefundenen ganzzahligen Punkte stärkere Widersprüche aufweisen, wird man zu Versuchen greifen und sich für einen auf einer Kurve zu vermutenden Punkt die Frage stellen: „Welche Lichtstufe hat dieser Punkt?“ Diese Frage ist mit Hilfe einer eingeschätzten Tangente an der Horizontalkurve und eines Trajektorienbruchstücks zu beantworten. Man erfährt hiedurch, ob der Punkt wirklich auf der Kurve liegt oder ob sie mehr oder weniger weit rechts oder links an ihm vorbeigehen muss. Besonders für tiefste und höchste Punkte, äusserste Punkte nach irgend einer Richtung, Wendepunkte und vermutete Ein- oder Ausbiegungen werden solche Stichproben oft zweckmässig sein.

h) Ist ein Gebilde durch Höhenkurven gegeben, so ist das zweite allgemeine Verfahren unmittelbar darauf verwendbar. Dies trifft für die Darstellung der Bodengestaltung durch Höhenkurven in topographischen Karten u. s. w. zu. Zu einem Versuch der Verwertung der beschriebenen, wenigstens verhältnismässig einfachen Lichtstufenbestimmung für die Schattierung von Reliefkarten in grösserem Massstab mag hiemit die Anregung gegeben sein. Die Vertikalbeleuchtung giebt leider keine Anschauung der Bodengestaltung; eine solche ist nur mit schräger Beleuchtung erhältlich, wie sie in der Dufourkarte und im topographischen Atlas der Schweiz gewählt ist. In so kleinem Massstab (1 : 100000 beziehungsweise 1 : 50000) liessen sich freilich die Abstufungen noch nicht wohl durchführen; auch wären hier die Schlagschatten, welche bei der eingebürgerten Lichtrichtung in Gebirgsdarstellungen auftreten würden, der Deutlichkeit noch nicht förderlich. Wohl aber wäre dies bei grösserem Massstab, von etwa 1 : 25000 an, der Fall; es würde wohl damit insbesondere das anschauliche Hervortreten hoher Spitzen gewonnen werden, das bisher auch der Darstellung mit einseitiger Beleuchtung unerreichbar war.

Bei Darstellungen aus dem Hügelland und der wenig gegliederten Ebene würde eine flachere Lichtrichtung, etwa 36°, beziehungsweise 30 oder 25° zu wählen sein, doch nur soweit, dass Schlagschatten nur ausnahmsweise und in kleinen Flächen auftreten würden.

Der Arbeitsaufwand, den die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten Flächen nach den beiden beschriebenen Verfahren erfordert, ist ein sehr grosser und zwar auch dann, wenn die Ableitung der Horizontalkurven oder anderen Parallelschnittkurven aus dem Gesetz der gegebenen Fläche sich einfach gestaltet. Ausserdem ist einzuräumen, dass die Technik nur selten Flächen verwendet, welche sich nicht mit den früher erklärten einfacheren Lösungen bewältigen lassen, und dass sie noch viel seltener solche anderen Flächen eingehend schattiert, so dass eine auch nur einigermassen ausgedehnte praktische Verwertung der beiden allgemeinen Verfahren, abgesehen etwa von der angedeuteten topographischen Schattierung und der anschaulichen Darstellung mathematischer Flächen für Unterrichtszwecke, kaum je zu erwarten sein wird. Andererseits aber ist vom Standpunkt der Theorie aus festzustellen, dass die Lösungen bei allen denkbaren Flächen durchgeführt werden können und damit das Problem der Beleuchtungskunde in seinem ganzen Umfang gelöst ist.

XIII. Auftragen der Lichtstufen mit Strichlagen oder mit dem Pinsel.

114. Getrennte Streifen gleicher Lichtstärke.

Die Verwertung der mit den beschriebenen Konstruktionen abgeleiteten Lichtstufenlinien in den Darstellungen der technischen Gebilde besteht im Auftragen jeder Lichtstufe durch einen Malton bestimmter Stärke oder eine Strichlage mit bestimmter Breite und Entfernung der Striche. Man kann nun nicht wohl jedem Punkt der Fläche diejenige Lichtstärke geben, die er streng genommen haben müsste; es würde dazu ein fortwährendes Vertreiben und Verwaschen der Farbtöne und viel Nachbessern gehören, wodurch bei grossem Arbeitsaufwand und grosser Gefahr des Misslingens doch nur ein gekünsteltes, unkräftiges Bild entstehen würde. Auch wäre eine Schattierung mit überall gleich breit bleibenden parallelen Strichen unmöglich, wenn die stetige Veränderung der Flächenbeleuchtung genau wiedergegeben werden müsste; nur die künstlerische Darstellung mit gekrümmten an- und abschwellenden Strichen vermag dies zu erreichen. Man beschränkt sich daher auf eine Annäherung an den streng richtigen Zustand mit gleichmässig aufgetragenen, scharf getrennt bleibenden Streifen in deutlich verschiedenen Lichtstufen und benützt die ganzzahligen Linien gleicher Helle, wie sie die vorgeführten Konstruktionen ergeben, als Grenzlinien zwischen diesen Streifen. Jeden Streifen benennt man durch eine Zahl, die in der Mitte liegt zwischen den zwei Zahlen seiner Grenzlinien, so wird z. B. der Streifen zwischen den Linien + 2 und + 3 mit + 2,5 bezeichnet. Die Kappenfläche um den Punkt + o herum heisst + o; sie bleibt im allgemeinen als weisses Papier, kann aber auch, um eine Körperfarbe zu bezeichnen, einen leichten Ton aufnehmen, der die Grundlage aller Schattierungstöne zu bilden hat.

Es erhebt sich nun die Frage, welcher der bei streng richtiger Schattierung auf ihm erscheinenden Lichtstufen jeder Streifen entsprechen soll. Es liegt nahe, immer den mittleren Parallelkreis eines Streifens als für diesen massgebend zu betrachten, wonach z. B. der ganze Streifen + 3,5 ebenso dunkel anzulegen wäre wie der Parallelkreis + 3,5 bei streng richtiger Schattierung. Diese Wahl hätte aber den Nachteil, dass unmittelbar auf den Lichtstreifen mit + 3,5 Lichtstärke der Reflextonstreifen — 3,5 mit — 3,5 Lichtstärke folgen, also die Lichtstärke + 4 *k* ganz verschwinden und die Schattierung ihres kräftigsten Körperschattentons verlustig gehen würde. Daher ist es besser, jeden Streifen in derjenigen Lichtstufe zu halten, die sein erster, dem hellsten Punkt + o *h* zunächstliegender Parallelkreis bei streng richtiger Schattierung erhalten würde. Hiedurch werden die stetigen Abnahmen der Lichtstärke vom hellsten Punkt an durch stufenfömige, durchschnittlich fernerliegende ersetzt, also die helleren Lichtstufen im Durchschnitt auf etwas grössere Fläche gebracht, womit zugleich der in Art. 85 erwähnten Erfahrungsthatsache, dass die Lichtstärke bei den Schattierungen in der Wirklichkeit bis zu den Kreisen + 2 und + 3 weniger rasch abzunehmen scheint als nach dem zuvor abgeleiteten Gesetz der Lichtstufen zu schliessen wäre, in erwünschter Weise Rechnung getragen wird. Die Reflextöne werden dagegen etwas dunkler als sie im Mittel sein müssten; das heisst die Reflexwirkung wird in Beziehung auf ihren Flächenraum etwas eingeschränkt. Diese Thatsache kann in der später zu betrachtenden Wahl der Lichtstärke des hellsten Reflexpunktes *r* berücksichtigt werden. Hienach erhält

Tafel A	die Kappenfläche	+ o	die Lichtstärke des Punktes	+ o (h oder s)
	der Streifen	+ 0,7	die Lichtstärke des Parallelkreises	+ 0,3;
	„ „	+ 1,5	„ „ „ „	+ 1
	„ „	+ 2,5	„ „ „ „	+ 2
	„ „	+ 3,5	„ „ „ „	+ 3
	„ „	— 3,5	„ „ „ „	± 4 (k)
	„ „	— 2,5	„ „ „ „	— 3
	„ „	— 1,5	„ „ „ „	— 2
	„ „	— 0,7	„ „ „ „	— 1
	„ Kappenfläche	— o	„ „ „ „	— 0,3.

Die Lichtstufe des hellsten Reflexpunktes — o *(r)* verschwindet; doch ist ja diese ohnehin in Vorder- und Oberansichten niemals sichtbar. Für die Schlagschattenstreifen gilt dasselbe wie für die gleichzahligen Lichtstreifen.

Bei grösseren Gebilden mit sehr breiten Lichtstufenstreifen empfiehlt es sich, zu Gunsten der Annäherung an die stetige Krümmung die Streifen noch in je zwei Teile zu teilen, so dass z. B. anstatt des Streifens + 1,5 zwei Streifen auftreten würden, nämlich + 1,25 und + 1,75. Die Streifen im Schatten, die einer solchen Teilung weniger bald bedürfen, da ihre Uebergänge an sich weicher und ihre Breiten durch Verkürzung kleiner sind als im Licht, können oft ungeteilt bleiben, wenn auch die Teilung im Licht durchgeführt wird. Auch die Kappenfläche innerhalb + 0,3 kann geteilt werden oder nicht. Wo man die weitestgehende Abstufung für nötig erachtet, erweitert sich die Reihe der Streifen und ihrer Lichtstufen wie folgt:

Tafel B	Die Kappenfläche	+ o	erhält die Lichtstärke des Punktes	+ o,
	der Streifen	+ 0,25	(zwischen + 0,2 u. + 0,3 gelegen) die Lichtstärke	+ 0,2
	„ „	+ 0,45	(„ + 0,3 „ + 0,6 „) „ „	+ 0,3
	„ „	+ 0,8	(„ + 0,6 „ + 1 „) „ „	+ 0,6
	„ „	+ 1,25	(„ + 1 „ + 1,5 „) „ „	+ 1
	„ „	+ 1,75	(„ + 1,5 „ + 2 „) „ „	+ 1,5
	„ „	+ 2,25	(„ + 2 „ + 2,5 „) „ „	+ 2
	„ „	+ 2,75	(„ + 2,5 „ + 3 „) „ „	+ 2,5
	„ „	+ 3,25	(„ + 3 „ + 3,5 „) „ „	+ 3
	„ „	+ 3,75	(„ + 3,5 „ ± 4 „) „ „	+ 3,5
	„ „	— 3,75	(„ ± 4 „ — 3,5 „) „ „	± 4
	„ „	— 3,25	(„ — 3,5 „ — 3 „) „ „	— 3,5
	„ „	— 2,75	(„ — 3 „ — 2,5 „) „ „	— 3
	„ „	— 2,25	(„ — 2,5 „ — 2 „) „ „	— 2,5
	„ „	— 1,75	(„ — 2 „ — 1,5 „) „ „	— 2
	„ „	— 1,25	(„ — 1,5 „ — 1 „) „ „	— 1,5
	„ „	— 0,8	(„ — 1 „ — 0,6 „) „ „	— 1
	„ „	— 0,45	(„ — 0,6 „ — 0,3 „) „ „	— 0,6
	die Kappenfläche	— o	(um — o herum bis — 0,3) „ „	— 0,3

Wenn auch im allgemeinen die zwischen den angegebenen Grenzlinien liegenden Streifen in sich selber gleichmässig hell oder dunkel aufgetragen werden und mit deutlichen Gegensätzen stehen bleiben, so ist es doch nicht ausgeschlossen, bei gemalten Darstellungen in grossem Massstab nachträglich Uebergänge auf den äusseren Teilen der Streifen mit Vertreiben und Verwaschen leicht aufgetragener Zwischentöne herzustellen. Schwieriger sind solche Uebergänge bei schraffierten

Darstellungen zu gewinnen. Ein Anschwellen der Striche gegen eine dunklere Nachbarstrichlage, wie es zur Herstellung der stetigen Uebergänge notwendig wäre, lässt sich bis jetzt mit der Reissfeder nicht anders erhalten als durch einen zweiten, etwas schrägliegenden Strich auf jedem zuvor gezogenen.

115. Zahlenbewertung der Lichtstufen.

Im früheren sind anfangs die Verhältnisse der Lichtstufen in Zahlen ausgedrückt worden, indem sich für den hellsten Punkt und die Parallelkreise der Normalkugel die Lichtstufen oder Helligkeitswerte 4 3 2 1 0 aus dem Gesetz der Lichtstufen ergaben. Die Betrachtung der Reflexlichtwirkungen hob jedoch dieses einfache Verhältnis auf, indem sie an die Stelle der Lichtstärke Null, die nicht vorkommen kann, einen veränderlichen Wert k, Körperschattengrenzlicht oder Streiflicht, ebenso an die Stelle der Lichtstärke Vier einen anderen veränderlichen Wert h, hellster Punkt im Licht, setzte und in Ermangelung anderer Wahrscheinlichkeiten nur die arithmetische Reihe der fünf Werte beibehielt. Neben die beiden Hauptwerte k und h traten noch die Lichtstufen r, hellster Reflexpunkt, und s, dunkelster Schlagschattenpunkt, für welche als feststehend nur gelten kann, dass r einer bestimmten Lichtstärke zwischen k und h entspricht und s dunkler ist als k. Die Zwischenkreise von k nach r und von k nach s mit Einschluss dieser Hauptwerte selbst sind wieder als Glieder arithmetischer Reihen vorzustellen.

Anschliessend an Art. 85 sind nun in erster Linie bestimmte Annahmen für die Verhältnisse der vier Hauptlichtstufen und damit auch für ihre Zwischenglieder zu treffen; eine zweite Aufgabe ist die Wiedergabe jeder nach ihrem Verhältnis zu den andern festgestellten Lichtstufe durch einen Malton oder eine Strichlage.

Alle Freiheit der Wahl für den einzelnen Fall auf Grund des in Art. 85 Ausgesprochenen wiederholt anerkannt, ist im folgenden angenommen

1) dass die vier Hauptwerte und die ganzzahligen Zwischenstufen nicht nur von h nach k, von k nach r und von k nach s, sondern auch von r nach s eine arithmetische Reihe bilden, also die Unterschiede zwischen je zwei Schlagschattentönen ebenso gross sein sollen wie zwischen zwei Reflextönen,

2) dass die Lichtstärke des hellsten Reflexpunktes r dem Parallelkreis + 2,5 der Normalkugel entsprechen, also in der Mitte zwischen derjenigen der Parallelkreise + 2 und + 3 liegen soll.

Die erste Annahme, dass die acht Unterschiede zwischen r und s gleich gross sein sollen, ist zwar willkürlich, aber naheliegend; sie erreicht offenbar die grösste Stetigkeit in der Zu- und Abnahme der Schattentöne und dürfte in der Wirklichkeit oft erfüllt sein. Die Feststellung der Lichtstärke des Reflexpunktes r entspricht einer ziemlich kräftigen Reflexwirkung, wie sie der Formendeutlichkeit der dargestellten Gebilde meist am günstigsten sein dürfte; übrigens sollen auch schwächere im Auge behalten werden.

Die Stärke der Reflexwirkung auf der Körperschattenseite hängt, wie in Art. 85 ausgeführt worden ist, in erster Linie von der Durchstrahlbarkeit des Materials ab; bei geringer Durchstrahlbarkeit, etwa trockenem Gips, würde der hellste Reflexpunkt r vielleicht noch heller werden können als der Parallelkreis + 2,5; bei starker Durchstrahlbarkeit (weissem Marmor, Alabaster) ist wegen des von innen heraus erhellten Streiflichts und der geringeren Zurückwerfung des Reflexlichtes selber die Reflexwirkung weniger fühlbar; in diesem Fall würde der Reflexpunkt r nur etwa bis zur Lichtstärke des Kreises + 3 aufsteigen dürfen. Noch geringere Reflexwirkung kann in künstlerischen Darstellungen günstig sein; für den hier vorliegenden Zweck würde sie zu wenig Abstufung der Körperschattentöne liefern. Bei der Wahl der Reflexlichtstärke für eine Darstellung ist auch der Hintergrund einigermassen in Betracht zu ziehen. Auf dunklem Hintergrund scheinen die Reflextöne infolge des Gegensatzes zu diesem heller zu sein als sie wirklich sind. Sogar wenn gar keine Reflexerhellung eingeführt und der Körperschatten durchaus gleich stark gehalten wird, ist neben dunklem Grund eine scheinbare Reflexwirkung vorhanden, wogegen bei hellem Hintergrund eine schon ziemlich kräftige Reflexerhellung sich wenig fühlbar macht. Ein sehr dunkler Hintergrund verlangt aber auch dunklere Haltung aller andern Schattentöne, wenn nicht die Vorstellung stark durchscheinenden Materials erweckt werden soll. Abgesehen von allen solchen besonderen Rücksichten wird sich jedoch die oben für die Reflexwirkung getroffene Annahme am häufigsten empfehlen.

Sobald nun ein Zahlenverhältnis einer der drei Lichtstufen k r und s zu der Lichtstufe h festgesetzt ist, lassen sich die beiden übrigen aus den getroffenen Annahmen bestimmen und ebenfalls durch Zahlen ausdrücken. Wenn die im Schlagschatten befindliche Kugel eine arithmetische Reihe der Lichtstufen zwischen r und s darbieten, also k in der Mitte zwischen r und s liegen soll, so ergiebt sich die Gleichung $r - k = k - s$; die zweite getroffene Wahl, dass Punkt r die Lichtstärke des Parallelkreises + 2,5 haben soll, führt mit Berücksichtigung der Lage dieses Parallelkreises und der arithmetischen Progression zwischen h und k zu der Proportion $h - r : r - k = 5 : 3$.

Wenn nun etwa angenommen wird, dass der dunkelste Schlagschattenton s ein Achtel der Lichtstärke des hellsten Punktes h darbieten soll, so hat man in der Gleichung und der Proportion $h = 1$ und $s = {}^1/_8$ zu setzen; man erhält dann $k = {}^4/_{11}$ und $r = {}^{53}/_{88}$. Mit diesen vier Hauptlichtstufen ergeben sich, wenn zu Gunsten abgerundeter Zahlen ${}^{12}/_{88}$ anstatt ${}^{11}/_{88}$ und ${}^{52}/_{88}$ anstatt ${}^{53}/_{88}$ geschrieben wird, folgende Verhältniszahlen für die ganzzahligen Lichtstufen.

Tafel C

	Lichtkugel:		Schlagschattenkugel:	
Tafel C	+ 0 (h)	= 88	+ 0 (s)	= 12
	+ 1	= 74	+ 1 s	= 17
	+ 2	= 60	+ 2 s	= 22
	+ 3	= 46	+ 3 s	= 27
	± 4 (k)	= 32	± 4 (k)	= 32
	— 3	= 37	— 3	= 37
	— 2	= 42	— 2	= 42
	— 1	= 47	— 1	= 47
	— 0 (r)	= 52	— 0 (r)	= 52

Mit der Lichtstärke des dunkelsten Schlagschattentons gleich einem Zwölftel der Lichtstärke des hellsten Punktes ist $h = 1$ und $s = {}^1/_{12}$ zu setzen; es wird dann $k = {}^1/_3$, $r = {}^7/_{12}$, und es erscheinen die einfacheren und genau passenden Verhältniszahlen folgender zwei Reihen, welche später in erster Linie den Strichlagen und Maltönen der Schattierung zu Grunde gelegt werden sollen.

Tafel D

Lichtkugel:		Schlagschattenkugel:	
+ 0 (h)	= 48	+ 0 (s)	= 4
+ 1	= 40	+ 1 s	= 7
+ 2	= 32	+ 2 s	= 10
+ 3	= 24	+ 3 s	= 13
± 4 (k)	= 16	± 4 (k)	= 16
− 3	= 19	− 3	= 19
− 2	= 22	− 2	= 22
− 1	= 25	− 1	= 25
− 0 (r)	= 28	− 0 (r)	= 28

Die Zahlenreihen zeigen entsprechend der für die Reflexstärke getroffenen Annahme für − 0 *(r)* ganz oder annähernd die Mitte zwischen + 2 und + 3. Will man die oben erwähnte schwächere Reflexwirkung einführen, bei welcher der hellste Reflexpunkt nur bis zu der Lichtstärke des Lichtkreises + 3 aufsteigt, so tritt an die Stelle der oben angesetzten Proportion die folgende: $h - r : r - k = 3 : 1$; man erhält mit der weiteren Annahme $k = {}^1/_4$ die Werte $r = {}^7/_{16}$ und $s = {}^1/_{16}$ und damit folgende Verhältniszahlen:

Tafel E

Lichtkugel:		Schlagschattenkugel:	
+ 0 (h)	= 64	+ 0 (s)	= 4
+ 1	= 52	+ 1 s	= 7
+ 2	= 40	+ 2 s	= 10
+ 3	= 28	+ 3 s	= 13
± 4 (k)	= 16	± 4 (k)	= 16
− 3	= 19	− 3	= 19
− 2	= 22	− 2	= 22
− 1	= 25	− 1	= 25
− 0 (r)	= 28	− 0 (r)	= 28

Nach folgenden Zahlenreihen ist die Reflexwirkung zwischen den beiden zuvor angenommenen gewählt, und zwar mit $-0\,(r) = +2^2/_3$, dabei *s* nur ein Siebenzehntel von *h*:

Tafel F

Lichtkugel:		Schlagschattenkugel:	
+ 0 (h)	= 68	+ 0 (s)	= 4
+ 1	= 56	+ 1 s	= 8
+ 2	= 44	+ 2 s	= 12
+ 3	= 32	+ 3 s	= 16
± 4 (k)	= 20	± 4 (k)	= 20
− 3	= 24	− 3	= 24
− 2	= 28	− 2	= 28
− 1	= 32	− 1	= 32
− 0 (r)	= 36	− 0 (r)	= 36

Alle vier Annahmen für die Verhältniszahlenreihen sind berechtigt und noch andere, für welche die zwei grundlegenden Gleichungen ebenso zu verwerten wären, dürften getroffen werden. Die erste Reihe würde eine lichtere Schattierung mit starker Reflexwirkung, die zweite eine etwas kräftigere Schattierung mit derselben verhältnismässigen Reflexwirkung, die dritte und vierte eine abermals dunklere Schattierung mit geringeren Reflexwirkungen bedeuten, wie in der Photographie hellere und dunklere Abzüge von derselben Platte, stärkere und schwächere Reflexe bei verschiedenen Aufnahmen desselben Gegenstandes erscheinen können.

An diese Zahlen knüpft sich notwendig die Frage: „Was bedeutet es eigentlich, wenn zwei Lichtstufen sich verhalten wie 88 zu 46 oder wie 64 zu 19 u. s. w.? Die Lichtempfindung kennt ja keine Verhältniszahlen; sie gestattet nur das Urteil ‚hell und etwas weniger hell‘ oder ‚hell und dunkel‘; sie kann eine Anzahl von Lichtstufen zwar in eine steigende oder fallende Reihe stellen, aber nicht scharf bewerten.“ Trotz dieser Thatsache ist eine Antwort auf die gestellte Frage möglich, und zwar mit dem Hinweis auf das physikalische Gesetz, dass die Lichtstärken zweier normal beleuchteten Ebenen umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen von der Lichtquelle sind. Mit Hilfe dieses Gesetzes liessen sich ganz wohl um eine künstliche Lichtquelle herum dreizehn gleichfarbige Ebenen in verschiedenen, durch Rechnung zu bestimmenden Entfernungen aufstellen, deren Beleuchtungsstufen der einen oder anderen oben gegebenen Reihe von Verhältniszahlen genau entsprechen würden. Die Zahlenbewertung der Lichtstufen auf einem durch Zeichnung gegebenen Raumgebilde ist hienach, sobald die erwähnten drei Annahmen über die Verhältnisse der vier Hauptlichtstufen getroffen sind, immer möglich; auch lässt sich bestimmt sagen, was die Zahlen bedeuten.

Wiedergabe der Lichtstufen. 116

Weniger günstig steht es um den zweiten Teil der Aufgabe, um die Wiedergabe der durch Zahlen festgesetzten Lichtstufen durch Strichlagen oder Maltöne. Es ist fraglich, ob sie überhaupt streng richtig wiedergegeben werden können. Angenommen es sei für eine bestimmte Beleuchtungsstärke der Papierfläche die Reihe der Lichtstufen genau so aufgetragen, wie es jenen dreizehn um eine künstliche Lichtquelle aufgestellten Ebenen entspricht, das heisst die dreizehn verschieden dunkel bemalten oder schraffierten Ebenen in den hiefür berechneten Entfernungen von der künstlichen Lichtquelle aufgestellt, würden alle als gleich hell beurteilt werden, so dürften diese Abstufungen eben nur strenge Gültigkeit für die eine verwendete Lichtquelle, nicht auch für andere, nicht auch für Tagesbeleuchtung haben. Wahrscheinlich werden bei einer andern Beleuchtungsstärke die Verhältnisse der von den dreizehn gemalten oder schraffierten Papierebenen ausgesendeten Lichtmengen andere, also nicht mehr streng richtige werden. Im dunklen Zimmer dürfte eine bestimmte helle Fläche ein anderes Lichtmengenverhältnis gegenüber einer bestimmten dunkeln ergeben, als im Sonnenschein. Welche Beleuchtungsstärke der Papierfläche soll nun massgebend sein? Solange diese Frage sich nicht beantworten lässt, oder solange nicht sicher gestellt ist, dass die von einer nicht glänzenden Ebene unregelmässig reflektierte Lichtmenge bei jeder Beleuchtungsstärke denselben Bruchteil der empfangenen Lichtmenge darstellt, ist auch die Möglichkeit einer allgemeingültigen, streng richtigen Wiedergabe jener durch Zahlen ausgedrückten Lichtstufen mit Hilfe von Maltönen oder Strichlagen nicht sicher gestellt.

Dies ist aber noch die kleinere Schwierigkeit gegenüber der Unmöglichkeit, im Einzelfall des Schattierens die Probe mit den Entfernungen von einer Lichtquelle wirklich anzustellen und insbesondere mit Tagesbeleuchtung anzustellen. Dreizehn oder sechzehn als Proben aufgetragene Tuschtöne oder Strichlagen im dunklen Zimmer um ein Licht zu stellen, wäre eine viel zu weit greifende Einleitung der Arbeit, um so mehr als die Brauchbarkeit des Resultats für die Anschauung bei Tageslicht zweifelhaft wäre. Von einer strengen auf den absoluten Werten jener Zahlen fussenden Wiedergabe der Lichtstufen durch Maltöne oder Strichlagen kann auch aus diesem Grund nicht die Rede sein; nur Annäherungen sind möglich.

117. Schattierung mit Strichlagen.

Bei Schattierung mit Strichlagen kann man diese so wählen, dass das zwischen den Strichen übrig bleibende weisse Papier seinem Flächengehalt nach dieselben zwei arithmetischen Reihen bildet wie die Verhältniszahlen einer jener vier Tafeln (C bis F) für die Licht- und Schattenstufen. Die oben gegebene zweite Zahlenreihe z. B. (Taf. D) wird dann so wiedergegeben, dass die Lichtstufe $+0h$ durch das weisse Papier dargestellt ist, $+0s$ durch eine Strichlage oder Strichlagenkreuzung, welche nur $^{4}/_{48}$ vom weissen Papier übrig lässt, + 3 im Licht durch eine Strichlage, welche $^{24}/_{48}$ vom weissen Papier übrig lässt u. s. w. Wenn von einer Strichlage zur benachbarten die Fläche des weissen Papiers um einen Bruchteil n der Gesamtfläche abnimmt, also die dunkle der Striche um denselben Bruchteil n zunimmt, wenn ferner das weisse Papier einen Bruchteil a und die dunkle Strichfläche einen weit kleineren Bruchteil b des von aussen auf sie fallenden Lichtes zurückwirft, so nimmt die vom weissen Papier ausgehende Lichtmenge bei diesem Uebergang ab um $n\,a$ und die von der Strichfläche ausgehende Lichtmenge zu um $n\,b$; die Gesamtveränderung ist also eine Abnahme um $n\,(a - b)$. Da nun nach den aufgestellten Zahlenreihen n für alle Uebergänge von $+0\,(h)$ bis $\pm 4\,(k)$ gleich gross ist (z. B. bei der Tafel D = $^{8}/_{48}$), und ebenso für diejenigen von $-0\,(r)$ bis $+0\,(s)$ immer gleich gross ist (bei der Tafel D = $^{3}/_{48}$), so sind auch die Unterschiede der von den Strichlagen ausgehenden Lichtmengen gleich gross. Mit solchen Strichlagen wird also in der That erreicht, dass bei allen Beleuchtungsstärken des Papiers die dargestellten Lichtstufen in Beziehung auf die Unterschiede dieselben zwei arithmetischen Reihen bilden, wie die Glieder der zu Grunde liegenden zwei Zahlenreihen für die Lichtstufen im Licht und im Schatten. Nur von den hiebei erzielten geometrischen Verhältnissen der Glieder lässt sich nicht dasselbe behaupten, da diese Verhältnisse wie auch dasjenige der Werte a und b bei verschiedenen Beleuchtungsstärken des Papiers wechseln dürften. Nun sind aber die Endglieder jener Zahlenreihen (Tafeln C bis F) selbst willkürlich gewählt; sie könnten auch beliebig anders und mit gleichem Recht so gewählt worden sein, wie es bei einer bestimmten Tagesbeleuchtung den entstandenen Strichlagen entspricht; es würde also auf diesem Weg eine durchaus wohlbegründete Reihe von Strichlagetönen für die ganzzahligen Lichtstufen erreicht werden, wenn es möglich wäre, die zwei arithmetischen Reihen der bei der Schraffierung für die Licht- und Schattentöne übrig zu lassenden weissen Papierflächen streng richtig zu erzielen. (Für gekreuzte Strichlagen ist in dieser ganzen Erwägung vorausgesetzt, dass die Flächen der Strichkreuzungen nicht dunkler werden als die einfache Strichfläche, was nur bei sehr dunkler Strichfläche nahehin erfüllt ist.)

Es giebt Schraffierlineale, mit welchen durch Einstellen einer Druckschraube nach einer Skala die Abstände der Parallelstriche, von Mitte zu Mitte gemessen, genau nach einem verlangten Mass erhalten werden, und Reissfedern mit Teilscheibe, welche eine bestimmte Strichdicke auf Zwanzigstelsmillimeter genau liefern oder liefern sollen. Mit zwei solchen Instrumenten würde die Strichlage für jede einzelne Lichtstufe ziemlich genau der berechneten übrig zu lassenden weissen Papierfläche angepasst werden können. Nur ist zu beachten, dass die Reissfedern im längeren Gebrauch sich allmählich etwas erweitern und dann breitere Striche geben als die Teilscheibe anzeigt.

In dieser Weise könnte die Schattierung durchgeführt werden, ohne zur Feststellung der Lichtstufen der Zeichnung das Gefühl zu Hilfe zu nehmen. Es ist aber im Einzelfall ganz überflüssig, dieser Schätzung der Strichstärken dem Gefühl nach aus dem Wege zu gehen; sie führt weit rascher zum Ziel und giebt vielleicht Resultate, die dem Gefühl mehr zusagen, als die auf rechnerischem und mechanischem Weg erzielten. Man wird hiezu nach Festsetzung einer für alle Lichtstufenstreifen gleichbleibenden Strichweite vor Beginn der Arbeit Probeschraffierungen auf einem Nebenblatt ausführen und den Versuch so oft wiederholen, bis eine befriedigende Stetigkeit der Lichtstufen innerhalb der zuvor gewählten Grenzen des hellsten und dunkelsten Tons erzielt ist. Diesen letzten wird man nach dem Verhältnis und dem Dunkelheitsgrad der Schattenflächen gegenüber den Lichtflächen richten und bei Vorhandensein grosser dunkler Schattenflächen weit heller festsetzen, als wenn etwa bei wenig Schattenflächen die dunkleren Stufen des Schlagschattens gar nicht vertreten sind. Figur 112d ist ein Beispiel für den ersten Fall, Figur 109b für den zweiten, ein Versuch bei jener, die gleichzahligen Licht- und Schattenstufen wie bei dieser zu halten, ergab ein viel zu schwarzes Bild. Bei wichtigen Darstellungen erleichtert es die Beurteilung der Lichtstufen, wenn man die empfohlenen Probestrichlagen zu Lichtstufenstreifen eines Cylinders mit Schlagschattenpartien gestaltet.

Ob oder wie weit eine solche gefühlsmässig festgesetzte Reihe von Lichtstufentönen übereinstimmt mit einer durch Berechnung und jene beide Instrumente erhaltenen, wäre noch durch Versuche zu erproben.

Die Schraffierung kann entweder mit nur einer Strichlage für jede Lichtstufe oder mit gekreuzten Strichlagen für die dunkleren Töne durchgeführt werden. In den Figuren 109b und 111c ist das erste gewählt; die Strichweite ist in dem anderthalbmal grösseren Original der ersten Figur 0,8 mm, bei der zweiten 0,7 mm. Bei dem

gewundenen Säulenschaft war die Reihenfolge der Strichstärken etwa diese (die Zahlen sind Zehntelsmillimeter):

Kappenfläche + 0 . . . weisses Papier
Streifen + 0,7 . . . 0 (Einstellen der Teilscheibe auf 0 giebt einen feinen Strich)
„ + 1,5 . . . 1
„ + 2,5 . . . $2^1/_2$
„ + 3,5 . . . $3^1/_2$
„ — 3,5 . . . $4^1/_2$
„ — 2,5 . . . 4
„ — 1,5 . . . $3^1/_2$
„ — 0,7 . . . 3
„ + 3,5 s . . $5^1/_2$.

In Figur 112d erscheint in den Schlagschattentönen und im Streifen — 3,5 neben der stärkeren Horizontalstrichlage eine unter 45° geneigte feinere. Hier wäre, da die Schlagschattentöne fast vollzählig auftreten und sich bis 1,5 *s* erstrecken, die Abstufung mit einer Strichlage gar nicht oder nur mit weit grösserer Strichweite durchzuführen gewesen, da es fast unmöglich ist, mit einer einzigen Lage sehr breiter Striche, die nur sehr schmale Streifen weissen Papiers zwischen sich übrig lassen, einen gleichmässigen Ton zu erhalten, indem die unvermeidlichen Verschiebungen einzelner Striche um Zehntels- oder Zwanzigstelsmillimeter schon empfindlich stören. Richtiger wäre es, bei Kreuzstrichlagen auch die Reflextöne — 2,5 — 1,5 — 0,7 mit solchen zu behandeln und dafür die ersten Strichlagen dieser Töne entsprechend heller zu halten, wonach alle Lichttöne mit einer, alle Schattentöne mit zwei Strichlagen auftreten würden.

118. Schattierung mit Maltönen.

Eine mit den oben genannten Instrumenten streng richtig hergestellte Reihe von Strichlagen könnte mit Maltönen derselben Farbe treu nachgebildet werden, indem jeder solche, in grösserer Entfernung vom Auge neben der nachzubildenden Strichlage aufgestellt, genau denselben Eindruck machen müsste wie diese. So wäre es also auch für Maltöne nicht unmöglich, jene Zahlenreihen in Beziehung auf das Wesentliche, auf ihre Eigenschaft als arithmetischer Reihen, wiederzugeben und damit eine auf Ueberlegung gegründete, durch Rechnung abgeleitete, nicht nur gefühlsmässig gefundene Reihe von Maltönen aufzustellen, welche in beliebig vielen Einzelfällen als Vorbild für die Lichtstufen dienen könnte.

Näher scheint es zu liegen, die arithmetische Reihe der Maltöne durch wiederholtes Auftragen eines und desselben Tons zu erzielen. Aber dieser nächste Weg führt höchstens bei wenigen leichten Tönen und auch dann nur annähernd richtig. Es wird keine arithmetische Reihe der Lichtstärken erhalten, wenn man einen ersten Streifen mit einem bestimmten Malton einmal, einen zweiten zweimal, einen dritten dreimal u. s. w. überlegt; vielmehr wird die Abnahme der Lichtstärke mit jedem weiteren Ton arithmetisch kleiner, also die Töne um so weniger wirksam, je mehr derselben schon vorher aufgetragen wurden. Dabei ist die Verschiedenheit der Wirkungen früher und später aufgetragener Töne so gross, dass sie unmöglich übergangen werden kann; ein Ton bestimmter Stärke als zehnte Schichte aufgetragen vermindert z. B. die ursprüngliche Lichtstärke etwa dreimal weniger, als wenn er die erste Schichte bildet. Diese Thatsache beruht nicht etwa nur auf einem Gefühlsurteil, das eine wirklich vorhandene arithmetische Reihe nicht als solche erkennen würde, sondern sie wird durch die Probe mit den Entfernungen von einer künstlichen Lichtquelle bestätigt; es handelt sich also um ein physikalisches Gesetz, nicht um ein solches der menschlichen Lichtempfindung. Ohne dieses Gesetz müssten z. B. acht Maltöne, von denen der erste (bei einer bestimmten Beleuchtungsintensität) die Lichtstärke des weissen Papiers nur um ein Achtel vermindert, schon die Lichtstärke Null, und zehn solcher Töne sogar eine Lichtstärke unter Null erzielen können, während doch undenkbar ist, dass eine gut beleuchtete, selbst mit hundert schweren Tönen bemalte Fläche gar kein Licht mehr unregelmässig zurückwerfe.

Die Wirkung dieses Gesetzes scheint dadurch verstärkt zu werden, dass das Papier dem ersten Farbton mehr Farbteilchen entnehmen und festhalten kann als dem zweiten, diesem mehr als dem dritten u. s. w., indem seine Ansaugungsfähigkeit durch die aufgetragenen Farbschichten vermindert wird.

Diese Eigenschaft ist schon vorher bei verschiedenen Papieren stark verschieden; glatte, gutgeleimte Papiere saugen die Farbflüssigkeit weniger kräftig an und lassen einen aus derselben Schale gezogenen Farbton heller erscheinen als rauhe, feuchte Papierflächen oft weit heller als stark ausgetrocknete. Es scheint sogar, dass später aufgetragene Farbtöne früheren dunklen wieder Farbteilchen wegnehmen können; ein sehr dunkler Ton, noch wenig eingetrocknet, kann durch einen nachfolgenden sehr flüssigen hellen Ton wieder heller werden. Da ferner auch ein erster Farbton, flüssig und voll aufgetragen, nach dem Auftrocknen eine erheblich dunklere Lichtstufe darstellt als bei zurückhaltendem trockenem Malen, so ist nicht zu erwarten, dass die Wirkung eines früher oder später aufgetragenen Farbtons jemals streng durch Zahlen ausgedrückt werden kann.

C. F. A. Leroy („Die Stereotomie", übersetzt von E. F. Kauffmann, 1847, § 230) giebt an, „dass die verschiedenen Lichtgrade, welche den Werten von $c = {}^9/_{10}$ ${}^8/_{10}$ ${}^7/_{10}$. . . entsprechen, nicht genau erhalten werden durch ein wiederholtes Auftragen von 1 2 3 . . . unter sich identischer Tuschlagen auf eine und dieselbe Zone; das Gesetz, durch welches das Verhältnis zwischen den Werten von c und der Zahl n der Tuschlagen bestimmt wird, ist vielmehr dasjenige, welches zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen für eine nur wenig unter der Einheit genommene Grundzahl besteht". In Beziehung auf die Begründung dieses Gesetzes verweist Leroy auf eine nicht mehr zugängliche andere Schrift.*)

Nach den mit einer künstlichen Lichtquelle angestellten Versuchen von C. Riess (Schattierungskunde 1871, § 18) „ist das Verhältnis zwischen den Werten der Helligkeiten c und der Zahl der Tuschlagen n, durch welche jene

*) Dies erinnert an das Weber'sche oder Fechner'sche Gesetz der Psychophysik, dass in allen Sinnesgebieten Empfindungen sich verhalten wie die Logarithmen ihrer Reize. Aber schon das oben über die Wirkung von acht Maltönen Gesagte lässt eine Erklärung der Thatsachen ausschliesslich aus Gesetzen der menschlichen Empfindung nicht zu.

Helligkeiten erzeugt werden, sehr nahe ausgedrückt durch die Gleichung $c = \left(\frac{1}{1 + a \cdot n}\right)^2$, worin der Koeffizient a von der Stärke des einfachen Tones (Grundtones) abhängt, mit derselben in einfachem Verhältnis wächst und für einen Grundton, wie er beim Schattieren durch wiederholtes Auftragen gewöhnlich zur Anwendung kommt, zwischen 0,1 und 0,05 liegen mag".

Dieser veränderliche, zwischen weiten Grenzen zu schätzende Koeffizient würde offenbar eine genaue Festsetzung der Wirkung des einzelnen Maltons auch dann nicht gestatten, wenn die oben berührten Zufälligkeiten, glattes und rauhes Papier, trockenes und feuchtes Papier, trockenes und flüssiges Malen nicht von Einfluss wären. Doch ist schon die Annäherung, welche die Formel gestattet, für den vorliegenden Zweck schätzbar. Durch Annahme zweier verschiedener Werte für den Koeffizienten a hat Riess folgende zwei Reihen für die Abnahme der Lichtstärke durch wiederholtes Auftragen eines und desselben Tuschtons abgeleitet. Dabei ist für die erste Reihe ein Tuschton vorausgesetzt, der einmal aufgetragen die Lichtstärke des weissen Papiers um ein Siebentel vermindert, für die zweite ein solcher, der sie um ein Zehntel vermindert. (Bei einem Ton, der nur ein Fünfzigstel der Lichtstärke wegnimmt, ergab sich eine nahezu arithmetische Reihe der zehn ersten erzielten Lichtstufen; aber ein so heller Ton, der zehnmal aufgetragen erst etwa ein Fünftel der Lichtstärke wegnehmen würde, ist nicht verwertbar.) Wenn in den Riess'schen Aufstellungen und ihrer Verwertung immer von geometrischen Verhältnissen auf dem Papier aufgetragener Lichtstufentöne die Rede ist, so ist die Berechtigung hiezu nach dem früher Ausgeführten noch nicht sicher gestellt, da diese Verhältnisse mit der Beleuchtungsstärke des Papiers veränderlich sein dürften; doch handelt es sich hier ja überhaupt nur um Annäherungen. Die zwei Reihen sind die folgenden:

Tafel G

I)	Für n = 0	ist c = 1	für n = 13	ist c = 0,256
	„ n = 1	„ c = 0,866	„ n = 14	„ c = 0,237
	„ n = 2	„ c = 0,755	„ n = 15	„ c = 0,221
	„ n = 3	„ c = 0,666	„ n = 16	„ c = 0,206
	„ n = 4	„ c = 0,591	„ n = 17	„ c = 0,193
	„ n = 5	„ c = 0,528	„ n = 18	„ c = 0,181
	„ n = 6	„ c = 0,475	„ n = 19	„ c = 0,169
	„ n = 7	„ c = 0,429	„ n = 20	„ c = 0,160
	„ n = 8	„ c = 0,389	„ n = 30	„ c = 0,094
	„ n = 9	„ c = 0,355	„ n = 40	„ c = 0,062
	„ n = 10	„ c = 0,326	„ n = 50	„ c = 0,044
	„ n = 11	„ c = 0,299	„ n = 100	„ c = 0,014
	„ n = 12	„ c = 0,276	„ n = ∞	„ c = 0

Tafel H

II)	Für n = 0	ist c = 1	für n = 8	ist c = 0,488
	„ n = 1	„ c = 0,9	„ n = 9	„ c = 0,453
	„ n = 2	„ c = 0,814	„ n = 10	„ c = 0,422
	„ n = 3	„ c = 0,741	„ n = 11	„ c = 0,394
	„ n = 4	„ c = 0,676	„ n = 12	„ c = 0,369
	„ n = 5	„ c = 0,621	„ n = 13	„ c = 0,347
	„ n = 6	„ c = 0,570	„ n = 14	„ c = 0,327
	„ n = 7	„ c = 0,527	„ n = 15	„ c = 0,309

Für spätere Zwecke mögen mit Beachtung des Gesetzes der Abnahme, nach welchem die Differenzen für die Einschaltung von Zwischengliedern berechnet werden können, noch folgende Glieder angefügt sein:

Für n = 2,5	ist c = 0,776	für n = 9,5	ist c = 0,437
„ n = 4,5	„ c = 0,647		

Innerhalb der zehn ersten Glieder stimmt die Taf. H ganz befriedigend mit dem oben erwähnten von Leroy ausgesprochenen Gesetz überein; für die späteren Werte schliesst sich die Tafel G besser an dieses an; im ganzen unterstützen sich die Aufstellungen beider Verfasser so weit, als es bei der Unsicherheit aller Messungen unregelmässig zurückgeworfenen Lichtes erwartet werden kann.*)

*) Riess hat die Werte der ersten Reihe für n als Abscissen und die zugehörigen Werte von c als Ordinaten aufgetragen, wodurch die stetige Abnahme der Wirkung eines wiederholt aufgetragenen Tuschtons an einer Kurve zur Anschauung gebracht wurde. Mit Hilfe dieser Kurve hat er diejenigen Lichtstufenkreise der Kugel abzuleiten gesucht, für welche die Tuschtöne in arithmetischer Progression aufgetragen werden können. Er erhält hiedurch auf der Lichtseite der Kugel anstatt der vier gleichen Teile, in welche der zur Lichtrichtung parallele Halbmesser durch die Ebenen der Lichtstufenkreise geteilt ist, eine Einteilung mit den Entfernungen 1 0,438 0,2 und 0,066 vom Mittelpunkt. Die Ableitung enthält aber einen Fehlschluss, indem nach richtiger Feststellung der Linien für das Auftragen von 5 10 15 und 20 Tönen die 20 einfachen Töne als durch 4 fünffache, die 15 einfachen als durch 3 fünffache ersetzbar gedacht sind und dann angenommen wird, die auf beiden Wegen erzielten Lichtstufentöne seien gleich dunkel, während doch bei 4 Tönen die Abnahme der Wirkung des wiederholten Auftragens eine weit geringere sein muss als bei 20. Wenn einmal festgestellt ist, dass die 20 Tonwerte allmählich kleiner werden und zwar sehr stark, so hört jedes einfache geometrische Verhältnis auf. (Nur in ganz geringem Umfang, mit zwei oder drei anderthalbfachen oder doppelten Tönen wie in einigen der unten aufgestellten Tafeln, kann ein Ersatz der einfachen Töne stattfinden, ohne dass ein fühlbarer Fehler entsteht.)

Es ist auch einleuchtend, dass die Lage der neuen Linien veränderlich mit der Zahl der gewählten Aufträge sein müsste, und dass sie z. B. eine andere sein müsste, wenn die Streiflichtstufe mit 7 Tönen, als wenn sie mit 10 oder 15 Tönen aufgetragen werden sollte. Man hätte also verschiedene Normalkugeln je nach der Zahl der gewünschten Tonschichten aufzustellen, und die Linien wären zwar für die Tonschichten ganzzahlig, aber als Lichtstufen nicht mehr, sondern auf jeder andern Normalkugel mit andern Bruchzahlen für ihre Lichtstufen zu bezeichnen. (So stark ungleich, wie oben angegeben, können die Teile des Halbmessers eben nur bei den 20 Tonschichten für die Streiflichtstärke werden, die für die dunkelsten Schlagschatten 60 bis 80 Töne bedeuten würden.) Schon aus diesen Gründen empfiehlt es sich nicht, mit der Lage der Lichtstufenlinien Rücksicht auf die Zahl der aufzutragenden Tonschichten zu nehmen, und eine Notwendigkeit hiezu liegt nicht vor, denn auch bei Gleichteilung des Halbmessers ist eine genügend richtige Abstufung durch unveränderliche Tuschtöne mit Berücksichtigung ihrer abnehmenden Wirkung bei wiederholtem Auftragen zu erhalten, wie unten auf Seite 144 nachgewiesen ist.

Riess selber hat das in dieser Richtung erhaltene Resultat nicht weiter verfolgt und verwertet, sondern sich in einem anschliessenden Kapitel zur Ableitung einer zweiten, anders begründeten Abänderung der Lage der Lichtstufenlinien gewendet, die er endgültig beibehält, und in welcher die abnehmende Wirkung eines wiederholt aufgetragenen Maltons nicht berücksichtigt ist. Durch neue Versuche mit einer künstlichen Lichtquelle gelangt er zu dem Ergebnis, dass das in Art. 81 ausgesprochene Gesetz, das als das „Sinusgesetz" in der Physik allgemein anerkannt ist, in der Wirklichkeit nicht erfüllt sei, sondern dass bei kräftiger Beleuchtung die Lichtstufenlinien + 1 + 2 + 3 der Kugel mit ungleichen Abständen näher zur Schattengrenze rücken als nach dem Sinusgesetz, wogegen sie sich bei sehr schwacher Lichtintensität im entgegengesetzten Sinn, also gegen den hellsten Punkt verschieben. Bei starker Lichtintensität nimmt die Lichtstufe einer ursprünglich zum Lichtstrahl normalen und langsam sich drehenden Ebene anfangs minder stark ab als der Sinus ihres Winkels mit dem Lichtstrahl, dafür aber später um so stärker; bei sehr schwacher Lichtintensität ist es umgekehrt. Hienach wäre also die Lage der ganzzahligen Lichtstufenlinien stark veränderlich mit der Intensität der Beleuchtung und es müsste, um eine der vielen möglichen Normalkugeln zu erhalten, eine bestimmte Annahme in dieser Beziehung gemacht werden. Riess wählt diejenige Lichtintensität aus, bei welcher die Linie + 1 in Grundriss und Aufriss durch den Mittelpunkt des Kugelbildes geht, wonach die Lichtstärken der drei Grundebenen genau mit + 1 zu bezeichnen wären. Hiebei wird der zur Lichtrichtung parallele Halbmesser durch die Ebenen der

119. **Tonschichtenpläne für das Schattieren mit dem Pinsel.**

a) Für normale Reflexwirkung, Tafeln I, K und L.

Obwohl als Folge der stufenweise abnehmenden Wirkung eines Maltons bei wiederholtem Auftragen zu erwarten wäre, dass eine arithmetische Reihe von Lichtstufentönen mit einem unveränderlichen Ton nicht oder nur dadurch erreicht werden könne, dass dieser einmal satt und flüssig, ein andermal mit schwachgefülltem Pinsel aufgetragen werde, kann man doch die Lichtstufen der Tafel D (S. 138) samt denjenigen der Streifen + 0,7 durchaus befriedigend erhalten, ohne zu einer Verschiebung der Lichtstufenlinien zu greifen, indem man neben einem Lichtton 1 einen etwas stärkeren Schlagschattenton 1,5 einführt und die unganzzahligen, nachträglich eingeschalteten Lichtstufenstreifen 0,7 mit einem Halbton 0,5 behandelt, der dann auch zur Ergänzung einiger anderen Tonstufen benützt wird. Folgende Tafel (I) giebt die Reihenfolge der hiebei nötigen 12 Aufträge oder Tonschichten.

Tafel I

Tonschichte Nummer:	Kappe + 0 h mit Lichtst. + 0	Streifen + 0,7 ,, ,, + 0,3	,, + 1,5 ,, ,, + 1	,, + 2,5 ,, ,, + 2	,, + 3,5 ,, ,, + 3	,, — 3,5 ,, ,, ± 4	,, — 2,5 ,, ,, — 3	,, — 1,5 ,, ,, — 2	,, — 0,7 ,, ,, — 1	Kappe — 0 ,, ,, — 0,3	Streifen + 3,5 s ,, ,, + 3 s	,, + 2,5 s ,, ,, + 2 s	,, + 1,5 s ,, ,, + 1 s	,, + 0,7 s ,, ,, + 0,3 s	Kappe + 0 s ,, ,, + 0 s	Tonschichte aufzutragen:
I	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Von — 0 bis + 0 s u. bis ± 4
II	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,, — 0 ,, + 0 s ,, ,, + 3
III	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,, — 0 ,, + 0 s ,, ,, + 2
IV	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,, — 0 ,, + 0 s ,, ,, + 1
V	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	,, — 1 ,, + 0 s ,, ,, + 3
VI	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	,, — 2 ,, + 0 s ,, ,, ± 4
VII	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	,, — 3 ,, + 0 s ,, ,, ± 4
VIII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	,, ± 4 ,, + 0 s
IX	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,5	1,5	,, + 1 s ,, + 0 s
X	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,5	1,5	1,5	,, + 2 s ,, + 0 s
XI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,5	1,5	1,5	1,5	,, + 3 s ,, + 0 s
XII	.	0,5	.	0,5	0,5	.	.	.	0,5*)	.	.	.	.	.	0,5	Einzelstreifen mit Halbton
	0	0,5	1	2,5	4,5	7	6	5	4,5	4	8	9,5	11	12,5	13	Summe in einfachen Tönen
	Licht					Körperschatten					Schlagschatten					

*) Bei hellem Hintergrund bleibt für den Streifen — 0,7 die zwölfte Tonschichte 0,5 weg; die Summe wird dann 4 anstatt 4,5.

Alle drei Töne 0,5, 1 und 1,5 wird man schon vor dem Auftragen der Tonschichten zurichten und ins richtige Verhältnis zu einander setzen, indem man einen probeweise für 0,5 angenommenen Ton auf einer zweiten Probefläche zweimal, auf einer dritten dreimal aufträgt, und die zweite Probe, ganz wenig verstärkt, für den Ton 1,

Lichtstufenkreise vom hellsten Punkt aus (anstatt der Gleichteilung mit 1 0,75 0,5 0,25 0) in folgendem Verhältnis geteilt: 1 0,5787 0,2680 0,0688 0. Für die Lichtstufe + 0,5 ist noch ein Teilpunkt mit 0,7703 eingeschaltet. Die Lichtstufenkreise der Körperschattenhälfte liegen nicht symmetrisch zu denen der Lichthälfte, sondern zeigen folgende Abstände vom Mittelpunkt: 1 0,7467 0,3907 0,1070 0.

Unter anderem wird festgestellt, dass die Gleichteilung des Halbmessers durch die Ebenen der Lichtstufenkreise, wie sie aus dem Sinusgesetz hervorgeht, bei keiner Lichtintensität streng richtig sein könne und als Annäherung aufgefasst einer sehr geringen Lichtintensität entspreche, nämlich derjenigen, welche zwei Stearinkerzen in einer Entfernung von 1,62 m von der Kugel für diese erzeugen.

Mit der neuen Lage der Lichtstufenlinien soll die Schattierung in der Darstellung der Körper derjenigen der Wirklichkeit mehr angepasst werden, welche besonders bei Sonnenbeleuchtung erhebliche Unterschiede gegenüber der aus dem Sinusgesetz abgeleiteten darbietet. Schon oben (Seite 89) ist ausgesprochen worden, dass sich die helleren Lichtflächen in der Wirklichkeit mehr ausdehnen, in sich nur geringe Unterschiede zeigen und fast sprungweise in das Streiflicht übergehen; diese Merkmale, besonders deutlich bei Sonnenbeleuchtung, finden sich auch noch bei guter Tagesbeleuchtung ohne Sonnenschein, etwa durch ein grosses Fenster, in geringerem Mass. Mit dieser Thatsache sind die von Riess erhaltenen Resultate im Einklang, und es ist kaum zu bezweifeln, dass das Sinusgesetz ungenau oder zum mindesten auf eine bestimmte Beleuchtungsintensität beschränkt ist, so dass es eines allgemeineren Gesetzes bedarf, in welchem die Beziehung zwischen dem Lichtstrahlenwinkel und der Lichtstärke der beleuchteten Ebene mit der Beleuchtungsintensität veränderlich auftritt. Es wäre zu wünschen, dass die in dieser Richtung von Riess mit den einfachsten Hilfsmitteln angestellten Versuche mit Apparaten grösserer Vollkommenheit wiederholt und zur Aufstellung eines Gesetzes verwertet würden — wenn je ein solches aufgestellt werden *kann*, und die zu Tage tretenden, dem Sinusgesetz widersprechenden Erscheinungen nicht etwa die veränderlichen Folgen von Zufälligkeiten im Gefüge oder der Durchstrahlbarkeit der Oberflächen verschiedener Stoffe sind.

Aber auch bei Anerkennung aller Gründe, die zu jener Abänderung der ursprünglichen Gestalt der Normalkugel geführt haben, dürfte doch diese letzte vorzuziehen und selbst dann noch als zweckmässige Vereinfachung einer strengrichtigen festzuhalten sein, wenn einmal das Sinusgesetz umgestossen und durch ein anderes ersetzt werden sollte. Der Vorzug der *grösseren Einfachheit*, den sie darbietet, sollte nicht aufgegeben werden, solange kein dringender Grund dafür vorliegt, und nachdem Riess selber festgestellt hat, dass bei *einer* Beleuchtungsstärke die Gleichteilung

die dritte, etwas mehr verstärkt, für den Ton 1,5 gelten lässt und mit einem Ton nachbildet. Zur Bemessung der Verstärkungen kann folgende Betrachtung dienen:

Nach Tafel H würde sich die Wirkung eines ersten Tons zu der eines zweiten, zu der eines dritten verhalten wie (1 — 0,9) zu (0,9 — 0,814) zu (0,814 — 0,741) oder wie 0,1 zu 0,086 zu 0,073. Bei einem schwächeren Ton, wie 0,5, wäre nach dem früheren die Abnahme der Wirkung eine kleinere und annähernd vielleicht durch zwei Drittel der hier vorhandenen Unterschiede ausgedrückt, also durch das Verhältnis 0,1 zu 0,091 zu 0,083, so dass sich die drei Probetöne verhalten würden wie 1 zu (1 + 0,91) zu (1 + 0,91 + 0,83) oder wie 1 zu 1,91 zu 2,83 (anstatt wie 1 zu 2 zu 3). Der zweite Ton wäre also nur etwa im Verhältnis 1,91 zu 2, der dritte im Verhältnis 2,83 zu 3 zu verstärken.

Wenn bei Gebilden in grösserem Massstab die Streifen zwischen den ganzzahligen Lichtstufenlinien noch einmal geteilt und hiedurch die in Tafel B (Seite 136) aufgezählten Streifen und Lichtstufen eingeführt werden, so erweitert sich die Tafel I zu der folgenden (Tafel K).

Tafel K

Tonschichte Nummer:	Kappe + 0 h mit Lichtst. + 0	Streifen + 0,25 „ „ + 0,2	„ + 0,45 „ „ + 0,3	„ + 0,8 „ „ + 0,6	„ + 1,25 „ „ + 1	„ + 1,75 „ „ + 1,5	„ + 2,25 „ „ + 2	„ + 2,75 „ „ + 2,5	„ + 3,25 „ „ + 3	„ + 3,75 „ „ + 3,5	„ — 3,75 „ „ ± 4	„ — 3,25 „ „ — 3,5	„ — 2,75 „ „ — 3	„ — 2,25 „ „ — 2,5	„ — 1,75 „ „ — 2	„ — 1,25 „ „ — 1,5	„ — 0,8 „ „ — 1	„ — 0,45 „ „ — 0,6	Kappe — 0 „ „ — 0,3	Streifen + 3,75 s „ „ + 3,5 s	„ + 3,25 s „ „ + 3 s	„ + 2,75 s „ „ + 2,5 s	„ + 2,25 s „ „ + 2 s	„ + 1,75 s „ „ + 1,5 s	„ + 1,25 s „ „ + 1 s	„ + 0,8 s „ „ + 0,6 s	„ + 0,45 s „ „ + 0,3 s	„ + 0,25 s „ „ + 0,2 s	Kappe + 0 s „ „ + 0 s	Tonschichte aufzutragen:
I	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Von — 0 bis + 0 s u. bis ± 4
II	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	„ — 0 „ + 0 s „ „ + 3
III	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	„ — 0 „ + 0 s „ „ + 2
IV	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	„ — 0 „ + 0 s „ „ + 1
V	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	„ — 1,5 „ + 0 s „ „ + 2,5
VI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	„ — 2,5 „ + 0 s „ „ + 3,5
VII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	„ — 3,5 „ + 0 s „ „ + 3,5
VIII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	1	1	Einzelstreifen mit 1
IX	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,5	1,5	1,5	1,5	Von + 1 s bis + 0 s
X	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	„ + 2 s „ + 0 s
XI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	„ + 3 s „ + 0 s
XII	.	.	0,5	0,5	.	0,5	0,5	0,5	0,5	.	.	0,5	.	0,5	.	0,5	0,5	.	.	0,5	.	.	.	.	.	.	.	.	0,5	Einzelstreifen mit 0,5
XIII	.	0,2	.	0,2	.	0,2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,2	.	0,2	.	.	.	0,2	.	0,2	.	0,2	.	0,2	.	„ „ 0,2
	0	0,2	0,5	0,7	1	1,7	2,5	3,5	4,5	6	7	6,5	5	5,5	5	4,7	4,5	4,2	4	7,5	8	8,7	9,5	10,2	11	11,7	12,5	12,7	13	Summe in einfachen Tönen
	Licht										Körperschatten									Schlagschatten										

In dieser Tafel erscheinen Töne 0,2 also Fünftels- oder annähernd Viertelstöne. Durch Verdopplung der Zahlen sie zu beseitigen, ist aus zwei Gründen nicht zulässig. Zehn einfache Töne dürfen nicht durch zwanzig

des Halbmessers als Annäherung gerechtfertigt ist, nachdem ferner als Erfahrungsthatsache gelten kann, dass sie eine völlig befriedigende Modellierung der Gebilde erzielen lässt, liegt ein dringender Grund zur Aenderung nicht vor. Jede den oben zusammengefassten neuen Ergebnissen angepasste Normalkugeleinteilung entspricht ja auch nur einer einzigen Lichtintensität, wenn auch einer häufiger vorkommenden. Der grösseren Verbreitung der Lichtflächen, welche die Wirklichkeit gegenüber dem Sinusgesetz darzubieten scheint, kann auch bei Gleichteilung des Halbmessers Rechnung getragen werden; sie ist im früheren schon durch die Bewertung jedes Lichtstreifens nach seiner hellsten Grenzlinie soweit berücksichtigt, als der deutlichen Modellierung zuträglich ist, und durch einige der später folgenden Tonschichtenpläne in noch weitergehender Weise.

Das Streben nach einer möglichst vollständigen Nachbildung der bei starker Parallelbeleuchtung auftretenden Lichtstufen ist der Formendeutlichkeit nur nachteilig (vgl. S. 89). Die Gliederung der Kugel und der nach ihr schattierten Körper durch die Lichtstufenlinien ist bei Gleichteilung des Halbmessers gefälliger und für die Formendeutlichkeit der Gebilde günstiger als die Teilung in so stark ungleiche Teile, wie sie auf der Normalkugel nach Riess erscheinen. Diese bietet einerseits Häufung der Linien, andererseits grosse linienleere Stellen, und bei Einschaltung einer Lichtstufenlinie + 0,5 erscheint die ganze Einteilung gesetzlos. An den helleren Flächen lässt sie unter der Voraussetzung, dass die Lichtstufen als Streifen gleicher Helle aufgetragen werden, wie es fast immer geschieht, die Krümmung der Fläche viel zu wenig fühlen, weil dort die Uebergänge von einer Lichtstufe zur anderen, aus welchen allein auf die Krümmung geschlossen wird, einander zu fern liegen. Wo die Lichtstufenlinien auf grosse Flächen ausbleiben, da bleibt auch die Modellierung auf grosse Flächen aus. Schon bei Darstellungen in verhältnismässig kleinem Massstab werden die linienleeren Stellen bald so gross, dass Zwischenlinien 1,5 und 2,5 eingeschaltet werden müssen; solche sind also bei der Ungleichteilung weit früher notwendig als bei der Gleichteilung. Die Streifen + 3,5 und — 3,5 werden bei jener so schmal, dass sie Einschaltungen meist nicht gestatten und schon ohne solche schwer zu malen und fast unmöglich durch Strichlagen zu behandeln sind. Die unsymmetrische Lage der Schattenkreise gegen die Lichtkreise hat zur Folge, dass die Hohlkugel nicht dieselben Linien zeigt wie die Rückseite der Vollkugel, und dass einem Punkt mit der Lichtstufe + n nicht am andern Ende seines Durchmessers ein Punkt mit der Lichtstufe — n entspricht; es kann also eine Berührungsebene nicht beliebig an die Licht- oder Schattenseite der Kugel gelegt werden, um eine Lichtstufe zu erhalten. Eine Ebene hat nicht mehr dieselbe Zahl für ihre Lichtstufen auf Vorderseite und Rückseite. Noch andere Vereinfachungen fallen weg; für die Drehungsflächen in Art. 93 (Fig. 93 b) wären z. B. 24 verschiedene Strahlenbüschel anstatt der 6 notwendig. Diese Gründe dürften für die Beibehaltung der Gleichteilung reichlich genügen.

doppelte ersetzt werden, weil mit diesen letzten die abnehmende Wirkung späterer Töne sich stärker äussert, also nicht derselbe Grad der Dunkelheit erzielt wird (nur in kleinem Umfang, wie oben in der Tafel I und K durch Einführen der drei Schichten mit 1,5 Tonstärke, ist ein solcher Ersatz zulässig). Ausserdem würde mancher Streifen zwanzig und mehr Mal zu übermalen sein.

Zur Beantwortung der Frage, wie weit die aus den zwölf Tonschichten der Tafel I erhaltenen Lichtstufentöne mit der in der Tafel D (Seite 138) verlangten arithmetischen Reihe im Einklang sind, führt folgende Betrachtung. Nach der zweiten von Riess aufgestellten Zahlenreihe (Tafel H, Seite 141) drücken 7 Tonschichten, von welchen eine einzige die Lichtstärke Eins des weissen Papiers um ein Zehntel vermindert, diese Lichtstärke auf 0,527 herab. Wenn nun die Tafel D auf eine zur Vergleichung mit dieser Zahlenreihe brauchbare Form gebracht werden soll, so muss das erste Glied der Tafel D dem ersten Glied der Zahlenreihe H gleichgesetzt werden und das mit 7 Tonschichten als Lichtstufe ± 4 herzustellende Glied der Tafel D genau dem Glied der Zahlenreihe H für 7 Tonschichten entsprechen; es wird sich dann fragen, ob auch die übrigen Glieder übereinstimmen. Der Zahlenwert + 0 h = 48 der Tafel D ist also durch eins, der Zahlenwert ± 4 = 16 der Tafel D durch 0,527 zu ersetzen. Einer der 48 Teile der Tafel B ist gleich $^1/_{32}$ (1 — 0,527) oder 0,01478, die Anfangsdifferenzen mit 8 Teilen sind gleich 8 mal 0,01478 oder 0,11824, die übrigen mit 3 Teilen gleich 3 mal 0,01478 oder 0,04434 zu setzen. Hieraus ergiebt sich folgende Gegenüberstellung, bei welcher die unganzzahligen Lichtstufen nicht in Betracht zu ziehen waren.

Streifen:	mit Lichtstufe:	erhält Tonschichten:	und damit nach Taf. H eine Lichtstärke:	sollte nach Taf. D als Lichtstärke erhalten:	wird also:
+ 0 h	+ 0 h	0	1	1	
+ 1,5	+ 1	1	0,900	0,882	um 0,018 zu hell
+ 2,5	+ 2	2,5	0,776	0,764	„ 0,012 „ „
+ 3,5	+ 3	4,5	0,647	0,645	„ 0,002 „ „
— 3,5	± 4	7	0,527	0,527	
— 2,5	— 3	6	0,570	0,571	
— 1,5	— 2	5	0,621	0,616	
— 0,7	— 1	4,5 *)	0,647	0,660	„ 0,013 „ dunkel
+ 3,5 s	+ 3 s	8	0,488	0,483	
+ 2,5 s	+ 2 s	9,5	0,437	0,438	
+ 1,5 s	+ 1 s	11	0,394	0,394	
+ 0 s	+ 0 s	13	0,347	0,350	

*) Streifen — 0,7 erhält bei hellem Hintergrund nur 4 Tonschichten mit Lichtstärke 0,676 und wird dann um 0,016 zu hell.

Diese Gegenüberstellung zeigt nur sehr kleine Differenzen, die neben dem unvermeidlichen weit grösseren Einfluss der oben berührten Zufälligkeiten im Zustand des Papiers, im Grad der Pinselfüllung u. s. w. verschwinden, wonach die 12 Tonschichten eine so vollständige Wiedergabe der Zahlenwerte aus Tafel D erzielen, als sie überhaupt verlangt werden kann. Dabei ist hervorzuheben, dass Streifen + 1,5 um 18 Tausendstel zu hell, Streifen + 2,5 um 12 Tausendstel zu hell, Streifen + 3,5 nur noch um 7 Tausendstel zu hell ist, wonach gerade die lichteren Töne ein wenig zu hell sind, der Ueberschuss aber ganz gesetzmässig abnimmt und verschwindet. Diese Thatsache kann nur erwünscht sein, indem sie einen weiteren Beitrag dazu liefert, die helleren Lichttöne im ganzen um eine Spur heller zu erhalten und dadurch die Schattierung der Wirklichkeit noch einen kleinen Schritt mehr anzunähern, ohne zu einer Verschiebung der Lichtstufenlinien greifen zu müssen (vgl. die Anmerkung auf Seite 142 und die Begründung der Tafel U, Seite 146).

Streifen — 0,7, der gewöhnlich als äusserster Reflextonstreifen den Umriss bildet, ist mit 4,5 Tonschichten um 0,013 zu dunkel, mit 4 Tonschichten um 0,016 zu hell. Man wird daher mit Rücksicht auf die Einwirkung des Hintergrundes (vgl. S. 137) bei dunklerem Hintergrund die 4,5 Tonschichten, bei hellerem die 4 Tonschichten gelten lassen; in beiden Fällen wird die kleine Abweichung von der berechneten Lichtstufe in Verbindung mit dem Gegensatz zum Hintergrund nur förderlich sein. Wo eine Lichtstufe — 0 vorkommt, welche die Tonschichtenzahl 4 zu erhalten hat, muss für den Streifen — 0,7 die Zahl 4,5 bleiben.

Für die Lichtstufe ± 4 können offenbar weniger als 7 oder allenfalls 6 einfache Tonschichten niemals genügen. Die Lichtstärke + 1 kann nicht weniger als einen Ton erhalten, und wenn die Schritte zwischen den Reflextönen durch einen Ton erzielt werden, so können diejenigen zwischen den Lichttönen nicht weniger als zwei Töne erfordern. Die Lichtstufen ergeben sich also nach Tafel I (unter der Voraussetzung, dass im wesentlichen ein einfacher Farbton wiederholt aufgetragen werden soll) zugleich mit dem geringsten Arbeitsaufwand. Diesem Zweck dient auch die Verstärkung des Tons auf 1,5 in den drei letzten Tonschichten, ohne welche 13 oder 14 Aufträge nötig wären.

In ähnlicher Weise wie aus Tafel D mit Benützung der Tafel H die Tafel I abgeleitet ist, liessen sich auch aus den Tafeln C, E, F Lichtstufenpläne ableiten und dadurch andere Reflex- und Schlagschattenwirkungen erzielen. Doch ist hier ein näherer Weg hiezu gewählt; die Lichtstufenzahlen sind unter Beibehaltung einer gesetzmässigen Reihe nach Schätzung geändert. Zunächst ist in folgender Tafel L das Ergebnis der Tafel I in einer Form wiederholt, welche die Uebergänge bei beleuchteten und im Schlagschatten befindlichen Körpern leichter verfolgen und vergleichen lässt.

Tafel L

Licht und Körperschatten					Schlagschatten und Körperschatten				
Kappe	+ 0 h	erhält	0	Töne	Kappe	+ 0 s	erhält	13	Töne
Streifen	+ 0,7	„	0,5	„	Streifen	+ 0,7 s	„	12,5	„
„	+ 1,5	„	1	Ton	„	+ 1,5 s	„	11	„
„	+ 2,5	„	2,5	Töne	„	+ 2,5 s	„	9,5	„
„	+ 3,5	„	4,5	„	„	+ 3,5 s	„	8	„
„	— 3,5	„	7	„	„	— 3,5	„	7	„
„	— 2,5	„	6	„	„	— 2,5	„	6	„
„	— 1,5	„	5	„	„	— 1,5	„	5	„
„	— 0,7	„	4,5	„	„	— 0,7	„	4,5	„
Kappe	— 0 r	„	4	„	Kappe	— 0 r	„	4	„

b) Tonschichtenpläne für veränderte Reflex- und Schlagschattenwirkung, Tafeln M, N und O.

Die auf Körper- und Schlagschatten gerichteten Zahlen der Tafel L gestatten unmittelbar die Veränderungen, welche einer andern Reflex- und Schlagschattenwirkung entsprechen. Sie können nicht viel von dem auf dem zuerst angedeuteten Weg erhältlichen verschieden sein.

Schwächere Schlagschatten in Verbindung mit einer minder starken Reflexerhellung können gewählt werden im Wunsch nach einer ruhigeren Haltung der ganzen Schattierung, welche die Schattenflächen als in sich nur wenig gegliederte Masse den Lichtflächen entgegensetzen will. Auch grosse Ausdehnung der Schlagschattenfläche gegenüber der Lichtfläche kann ein Grund sein, die Schlagschatten heller zu halten, um kein zu dunkles Bild zu bekommen. Dabei kann die Reflexwirkung sowohl der Tafel L als der Tafel M entnommen sein.

Sehr starke Schlagschatten in Verbindung mit schwacher Reflexerhellung wären etwa zu wählen bei Darstellungen auf sehr dunklem Hintergrund, in welchen die Schlagschattenflächen nur auf kleine vereinzelt stehende Flächenteile beschränkt sind. Der Gegensatz zum Hintergrund lässt die schwache Reflexerhellung weit stärker erscheinen.

Hellere Reflexe als diejenigen der Tafel L kann ein sehr lichter Hintergrund erfordern, der sie infolge des Gegensatzes minder hell aussehen lässt als sie sind, oder auch die Beschränkung der Reflextöne auf sehr schmale Streifen.

In allen Fällen kann der Grundton selbst noch sehr verschieden stark gewählt werden, z. B. bei dunklem Hintergrund stärker als bei hellem; bei Körpern, welche durchscheinenden Stoff oder sehr lichte Körperfarbe zeigen sollen, weit heller und in Verbindung mit milderen Schlagschatten. Allen angedeuteten besonderen Fällen ist im folgenden durch weitere Tafeln für die Tonschichten Rechnung getragen.

Schwächere Schlagschatten in Verbindung mit minder starker Reflexerhellung liefert Tafel M.

Tafel M

Licht und Körperschatten				Schlagschatten			
Kappe	+ o h	erhält	o Töne	Kappe	+ o s	erhält	11 Töne
Streifen	+ 0,7	„	0,5 „	Streifen	+ 0,7 s	„	10,5 „
„	+ 1,5	„	1 Ton	„	+ 1,5 s	„	10 „
„	+ 2,5	„	2,5 Töne	„	+ 2,5 s	„	9 „
„	+ 3,5	„	4,5 „	„	+ 3,5 s	„	8 „
„	— 3,5	„	7 „	„	— 3,5	„	7 „
„	— 2,5	„	6,5 „	„	— 2,5	„	6,5 „
„	— 1,5	„	6 „	„	— 1,5	„	6 „
„	— 0,7	„	5,5 „	„	— 0,7	„	5,5 „
Kappe	— o	„	5 „	Kappe	— o	„	5 „

Tafel N. Abänderung der Tafel L für sehr starke Schlagschatten bei gleichbleibenden Licht- und Reflextönen:

— 3,5 erhält 7 Töne, + 3,5 s erhält 9 Töne, + 2,5 s erhält 11 Töne, + 1,5 s erhält 13 Töne, + 0,7 s erhält 14 Töne, + o s erhält 15 Töne.

Tafel O. Abänderung der Tafel L für sehr starke Reflexerhellung bei gleichbleibenden Licht- und Schlagschattentönen:

— 3,5 erhält 7 Töne, — 2,5 erhält 6 Töne, — 1,5 erhält 4,5 Töne, — 0,7 erhält 3 Töne.

c) Tonschichtenpläne mit Beschränkung auf einen unveränderlichen Grundton, Tafeln P und R.

Nach den oben aufgestellten Tafeln sind 3 oder 4 Maltöne notwendig, wenn auch im Wesentlichen ein Ton die Schattierung erzeugt. Es kann gewünscht werden, die Schattierung durchaus mit einem Ton durchzuführen, um der Beurteilung durch das Gefühl, solange es noch nicht ausgebildet ist, möglichst wenig überlassen zu müssen, und in der That wird am häufigsten in dieser Weise schattiert. Eine Untersuchung mit Hilfe der Tafeln G und H lehrt jedoch, dass es unmöglich ist, mit einem einzigen unveränderlichen Ton die Lichtstufen nach den Zahlenwerten der Tafel D samt derjenigen des Streifens + 0,7 im Licht befriedigend zu erzielen, ohne zu einer zu grossen Zahl von Tonschichten greifen zu müssen. Der genannte Streifen müsste unvermeidlich einen Ton, daher der Streifen + 1,5 zwei und der Streifen — 3,5 mit dem Streiflicht schon etwa 18 Töne erhalten, was für die dunkelsten Schlagschatten über 30 bedeuten würde. Also bedarf wenigstens die nachträglich eingeschaltete unganzzahlige Lichtstufe einer besonderen Behandlung.

Unter dieser Voraussetzung geben die folgenden Tonschichtenpläne P und R befriedigende Zahlenwertreihen.

Tafel P

Auf die ganze Fläche mit Ausnahme der Kappe + o im Licht wird ein leichter, etwa mit 0,4 zu bewertender Ton gelegt, der später den Streifen + 0,7 für sich allein bildet und zugleich die ohnehin erforderliche Einfeuchtung des Papiers erzielt; hierauf werden mit dem unveränderlichen Grundton 1 folgende Tonschichten gebildet.

Licht und Körperschatten				Schlagschatten und Körperschatten			
Kappe	+ o h	erhält	o Töne	Kappe	+ o s	erhält	12 Töne
Streifen	+ 0,7	„	o „	Streifen	+ 0,7 s	„	11 „
„	+ 1,5	„	1 Ton	„	+ 1,5 s	„	10 „
„	+ 2,5	„	2 Töne	„	+ 2,5 s	„	9 „
„	+ 3,5	„	4 „	„	+ 3,5 s	„	8 „
„	— 3,5	„	7 „	„	— 3,5	„	7 „
„	— 2,5	„	6 „	„	— 2,5	„	6 „
„	— 1,5	„	5 „	„	— 1,5	„	5 „
„	— 0,7	„	4 „	„	— 0,7	„	4 „

Um diese Tonschichtenzahlen zu erhalten, benützt man zunächst die 8 ersten Horizontalreihen der Tafel I unverändert; hierauf erscheinen als Tonschichte IX die 4 letzten Vertikalreihen je mit 1, als Tonschichte X die 3 letzten, als XI die 2 letzten, als XII die letzte.

Tafel R

Auf die Streifen + 0,7 und + 1,5 im Licht wird zuerst ein leichter, etwa mit 0,5 zu bewertender Ton gelegt; dann sind mit dem Grundton 1 folgende Tonschichten zu bilden.

Licht und Körperschatten				Schlagschatten und Körperschatten			
Kappe	+ o h	erhält	o Töne	Kappe	+ o s	erhält	13 Töne
Streifen	+ 0,7	„	o „	Streifen	+ 0,7 s	„	12 „
„	+ 1,5	„	1 Ton	„	+ 1,5 s	„	11 „
„	+ 2,5	„	3 Töne	„	+ 2,5 s	„	10 „
„	+ 3,5	„	5 „	„	+ 3,5 s	„	9 „
„	— 3,5	„	8 „	„	— 3,5	„	8 „
„	— 2,5	„	7 „	„	— 2,5	„	7 „
„	— 1,5	„	6 „	„	— 1,5	„	6 „
„	— 0,7	„	5 „	„	— 0,7	„	5 „
Kappe	— o r	„	4 „	Kappe	— o r	„	4 „

d) Tonschichtenpläne mit möglichst wenigen Tonschichten, Tafeln S und T.

Man könnte die Zahl der 12 oder 13 Tonschichten durch Einführungen von Doppeltönen oder sogar dreifachen Tönen herabzudrücken suchen. Bei Darstellungen in klei-

nem Massstab, bei denen ohnehin die gefühlsmässige Schätzung der Tonstärken mehr einzutreten hat, wird man hiedurch in der That Arbeit sparen können, ohne dem Verhältnis der Lichtstufen zu schaden; das weniger häufige Ueberlegen der Fläche mit Maltönen wird in diesem Fall sogar günstiger sein. Für grösseren Massstab ist jedoch diese Abkürzung kaum je ein Gewinn, da das Einschalten richtiger einfacher Töne zur Herstellung der Uebergänge der von den Doppeltönen erzeugten Stufen schwierig ist. Ein Wasserfarbton kann immer erst beurteilt werden, nachdem er aufgetrocknet ist, und er findet sich im vorliegenden Fall gewöhnlich zu dunkel oder zu hell, so dass der erhaltene Uebergangston sich der stetigen Reihe nicht einpasst und Nachbesserungen entweder für sich selbst oder für die Nachbarstreifen fordert.

Ein für kleineren Massstab der Darstellungen geeigneter Tonschichtenplan mit Doppeltönen, der sich der grösseren Ausdehnung der Lichtfläche vom hellsten Punkt aus noch etwas mehr anschliesst als die früheren, ist in folgender Tafel S gegeben. Es erscheinen hier im Maximum acht Tonschichten; die Licht- und Reflextöne sind nur bis zu drei- und viermal zu überlegen.

Tafel S

Nr.	+ 0	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,5	+ 3,5	— 3,5	— 2,5	— 1,5	— 0,7	+ 3,5 s	+ 2,5 s	+ 1,5 s	+ 0,7 s	+ 0 s
I	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	1	1	.	1
II	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
III	.	.	.	.	.	2	2	.	.	2	2	2	2	2
IV	.	.	.	.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2
VI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2
VII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	2	2
VIII	.	0,5	.	.	.	.	.	.	.	.	0,5	.	.	.
	0	0,5	1	2	4	6	5	4	3	7	8,5	10	11	12

In folgender Tafel T ist die Zahl der Tonschichten auf 5 herabgedrückt, indem ein sechsfacher Ton für Streiflicht und Schlagschatten den doppelten und einfachen vorangestellt ist.

Tafel T

Nr.	+ 0	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,5	+ 3,5	— 3,5	— 2,5	— 1,5	— 0,7	+ 3,5 s	+ 2,5 s	+ 1,5 s	+ 0,7 s	+ 0 s
I	.	.	.	.	.	6	.	.	.	6	6	6	6	6
II	.	.	.	2	2	.	2	2	2	.	2	2	2	2
III	.	.	.	.	2	.	2	2	.	.	.	2	2	2
IV	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	1
V	.	0,5	.	.	.	.	.	.	.	.	0,5	.	.	0,5
	0	0,5	1	2	4	6	5	4	3	7	8,5	10	11	11,5

e) Tonschichtenplan mit Annäherung an die Sonnenbeleuchtung, Tafel U.

Nach Seite 89 ist die Schattierung der Raumgebilde bei Sonnenbeleuchtung von der im früheren abgeleiteten dadurch unterschieden, dass die hellere Lichtfläche sich im ganzen weiter ausdehnt, in sich weniger veränderlich ist und mit einer schmalen Uebergangszone fast sprungweise in das Streiflicht führt; die Reflexe sind bei Fehlen zufälliger Reflexlichtquellen nur wenig erhellt.*) Auch noch bei minder starker Parallelbeleuchtung sind diese unterscheidenden Merkmale der Schattierung der Wirklichkeit zu beobachten, wenn auch in weit geringerem Grad. Es ist zu wiederholen, dass sie in der Darstellung nachgebildet der Formendeutlichkeit und guten Modellierung der Gebilde minder zuträglich sind, als die aus dem Sinusgesetz abgeleitete Schattierung, wofür der zu vermutende Grund in der Anmerkung auf Seite 143 ausgesprochen ist. Wenn jedoch im Streben nach der Nachbildung der Wirklichkeit, etwa für mehr künstlerische Zwecke, eine solche mehr mit dem Gegensatz als mit Uebergängen wirkende Schattierung gewählt werden will, so dürfte etwa folgender Tonschichtenplan (Tafel U) hiezu geeignet sein. Schon bei kleinerem Massstab ist eine Zwischenstufenlinie + 3,5 einzuführen.

Tafel U

Nr.	+ 0	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,5	+ 3,25	+ 3,75	— 3,5	— 2,5	— 1,5	— 0,7	+ 3,75 s	+ 3,25 s	+ 2,5 s	+ 1,5 s	+ 0,7 s	+ 0 s	
I	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
II	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
III	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
IV	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
V	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
VI	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	
VII	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1	
VIII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	2	2	2	Anstatt 2
IX	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	2	auch wohl
X	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	nur 1,8 od. 1,5
XI	.	0,5	.	.	0,5	.	.	.	0,5	.	.	.	.	.	.	.	
	0	0,5	1	2	3,5	5	7	6	5,5	5	8	9	10	11	12	13	

Mit der Wahl des Doppeltones 2 hat man ein Mittel, die Schlagschatten etwas minder dunkel zu erhalten, was noch mehr der Wirklichkeit sich anschliesst.

Von allen Tonschichtenplänen dürfte derjenige der Tafel I mit dem in Tafel L zusammengefassten Resultat in den meisten Fällen der beste sein, und für das Schattieren mit einem unveränderlichen Ton derjenige der Tafel P. Die früher genannten Zufälligkeiten im Zustand des Papiers, in der Pinselfüllung u. s. w. dürften jedoch nur selten gestatten, das ausschliesslich mit den Tonschichten dieser oder der andern Tafeln erzielte Bild ganz unverändert zu lassen; kleine Nachbesserungen werden sich meist als notwendig erweisen. In Beziehung auf die in den vier Lichtdrucktafeln erscheinenden Lichtstufen ist daran zu erinnern, dass die Wiedergabe einer getuschten Zeichnung durch Photographie und Lichtdruck das Verhältnis der Maltöne zuweilen etwas verändert.

*) Aus dieser Thatsache ist es wohl zu erklären, dass die Schattierung ohne Lichtstufen, ausschliesslich mit einem unveränderlichen Körperschattenton, Schlagschattenton, auch wohl Lichtton, meist für sich allein schon eine ganz gute Anschauung der Formen eines in nicht zu grossem Massstab dargestellten Körpers zu geben vermag. Ein so einfach schattiertes Bild erweckt die Vorstellung der bei starker Sonnenbeleuchtung auftretenden Schattierung und damit der Körperformen. Schon in mässiger Entfernung gesehen, macht bei solcher Beleuchtung der Raumgebilde die Uebergangszone von Licht zu Schatten fast den Eindruck einer scharfen Linie, wie sie bei jener Darstellungsweise gezeichnet wird. Als bezeichnende Beispiele für eine mit diesen einfachsten Mitteln erzielte gute Anschauung der Formen können etwa die Figuren 30b, 71c, 70a und 73 gelten.

120. Grosse ebene Flächen.

Wo grosse ebene Flächen auftreten, wird man sich auf diesen das stufenweise Erzeugen der Lichtstufen meist besser durch einen einmal aufgetragenen stärkeren Ton ersparen. Bei der Säulenordnung auf der vierten Lichtdrucktafel und der Balustrade auf der zweiten lag es nahe, zuerst die Drehungsflächen durch wiederholt aufgetragene Töne in der oben beschriebenen Weise zu schattieren und zuzusehen, welche Stärke des Tons sich hiebei für die Lichtstufen von Licht und Schlagschatten auf den vertikalen Ebenen ergab; der hiebei erscheinende Lichtton + 1,7 konnte ganz wohl mit einer Tonschichte, die Schlagschattentöne wenigstens mit zweien oder dreien erzeugt werden. Auf für anders gerichtete grosse Ebenen ist dasselbe Verfahren als arbeitsparend zu empfehlen.

121. Luftperspektive.

Bei Darstellungen eben begrenzter Körper ist eine Andeutung von Luftperspektive der Wirkung und Anschaulichkeit der Bilder meist förderlich. Sie besteht darin, dass in den ferner liegenden Teilen des räumlich vor dem Auge stehend gedachten Körpers die hellsten Lichtstufen etwas weniger hell, die dunkleren etwas weniger dunkel gehalten, also die Gegensätze gemildert und die stärksten Kontraste den meist gegen das Auge vortretenden Partien vorbehalten werden. Auf dem Sternikosaeder der ersten Lichtdrucktafel waren z. B. die zwei Spitzen links oben und ganz oben am Umriss in Licht und Schatten etwas zu dämpfen, auf der vordersten Spitze dagegen das weisse Papier als Lichtfläche festzuhalten und der Schatten kräftiger daneben zu setzen, als er sonst auf derselben Ebene erscheint.

Körper mit gekrümmten Flächen bedürfen dieses Hilfsmittels seltener, indem hier meist Auswölbungen den Umriss bilden und die Abnahme der Lichtstufe unmittelbar den Eindruck des Zurücktretens und der Verkürzung der Fläche erzeugt.

122. Winke für das Zeichnen, Malen und Schraffieren.

Die Umrisslinien und Kanten des darzustellenden Gegenstandes werden für das Schattieren mit den feineren Lichtstufen am besten nur in Bleistift oder bei kleinerem Massstabe mit blassem Tusch gezeichnet, die Lichtstufenlinien entweder nur leicht in Bleistift oder mit der Feder sehr blass in dem für das Malen gewählten Farbton ausgezogen.

Zum Auftragen der Lichtstufen mit dem Pinsel eignen sich alle nicht zu lebhaften Wasserfarben, insbesondere Tusch für sich allein oder gemischt mit Karmin, preussisch Blau oder Neutraltinte, ferner Sepia als natürliche oder schon in der Farbtafel mit Karmin gemengte (sogenannte warme) oder mit Rotgelb gemengte (kolorierte) oder erst in der Farbenschale mit Karmin oder gebrannter Terra di Siena zu mengende Sepia, endlich Neutraltinte entweder ins Blaue oder ins Rötliche spielend, auch wohl erst in der Farbenschale gemischt mit preussisch Blau oder Karmin. Die erst in der Farbenschale vorzunehmenden Mischungen bringen die Gefahr mit sich, bei neuem Bereiten das alte Verhältnis beider Farben nicht genau wiederzufinden. Bei Mischungen gerinnt auch die Farbflüssigkeit leichter als bei Verwendung einer einzigen Farbtube oder -tafel.

Zum Malen mit Wasserfarben eignet sich etwas rauhes, wenig geleimtes Papier, insbesondere das englische Whatmanpapier; auf glattem, stark geleimtem Papier ist es weit schwieriger, ja zuweilen auch dem Geübten fast unmöglich, klare, fleckenlose Töne zu erhalten. (Bei Vervielfältigung einer gemalten Darstellung durch Photographie oder Lichtdruck ist übrigens rauhes Gefüge des Papiers dem Lichtbild nicht zuträglich.) Bei dunkleren Tönen ist ein vorhergehendes Einfeuchten der Fläche durch Auftragen reinen Wassers mit dem Pinsel, nach dessen Auftrocknen der Ton sofort aufzulegen ist, als ein Hilfsmittel zur Vermeidung von Wolken und Flecken sehr zu empfehlen.

Flüssiges Malen, das heisst Malen mit starkgefülltem Pinsel, bringt die Farbtöne ansprechender, voller, durchsichtiger zur Erscheinung; bei zu trockenem Auftragen ist nicht nur die Gefahr der Streifen- und Fleckenbildung grösser, sondern die Fläche sieht auch leicht unscheinbar und wie bestäubt aus. Doch drängt beim flüssigen Malen die auftrocknende Farbe stark gegen ihren Rand, so dass dieser besonders nach Auftragen mehrerer Töne leicht eine schwarze und unreine Linie bildet. Man vermindert diesen Uebelstand einigermassen, indem man mit den später aufzutragenden Tönen sich ein wenig vom Rand entfernt hält; übrigens lassen sich auch die schon schwarz gewordenen Randlinien wieder reinigen, indem man sie mit dem spitzigen Pinsel leicht mit Wasser einfeuchtet und dieses beim beginnenden Auftrocknen mit Fliesspapier, das durch Streichen mit dem Fingernagel oder Falzbein aufgepresst wird, wieder aufsaugt.

Es ist zu empfehlen, nach je drei oder vier Tonschichten, wenn sie gut ins Papier eingetrocknet sind, und ebenso bei jedem Wiederbeginn der unterbrochenen Arbeit, die gemalte Fläche mit dem Schwamm oder einem grossen Pinsel satt einzufeuchten, sowohl um die vorgenannten Ränder zu beseitigen, als die gewöhnlich vorhandenen Unregelmässigkeiten der Tonschichten auszugleichen. Dieses Einfeuchten, das auch das Auflegen der nachfolgenden Töne erleichtert, soll jedoch kein vollständiges Waschen sein, sondern möglichst ohne Aufdrücken von Schwamm oder Pinsel vorgenommen werden. Wenn es die Töne erheblich abschwächt, so erhält man leicht eine stumpfe, kraftlose Schattierung.

Hier ist zu wiederholen, dass bei flüssigem Malen die Töne etwas dunkler zum Vorschein kommen als bei minder stark gefülltem Pinsel, so dass man mit dem mehr oder minder flüssigen Malen innerhalb enger Grenzen ein weiteres Hilfsmittel hat, die Abstufung der Farbtöne zu beeinflussen und noch häufiger sie unfreiwillig beeinflusst. Von noch grösserer Wirkung in dieser Rich-

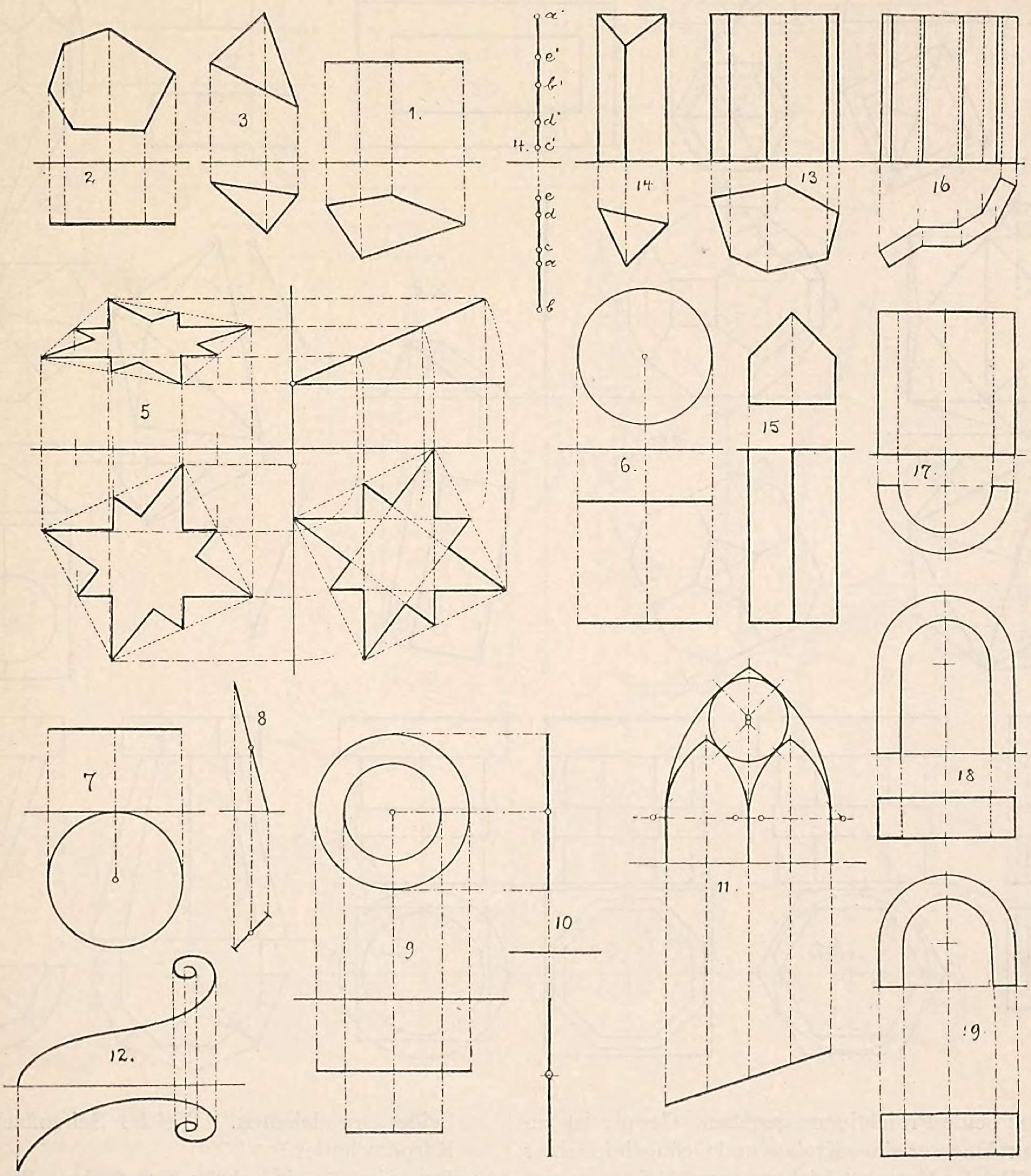
tung ist aber der mehr oder minder trockene Zustand des Papiers. Auf feuchter Papierfläche kommt ein Ton viel heller als auf stark ausgetrockneter, da diese die Farbflüssigkeit begieriger und reichlicher ansaugt. Ist also ein Ton kaum aufgetrocknet, wenn man den folgenden auflegt, so wirkt dieser weit schwächer; er scheint oft vom vorhergehenden fast ebensoviel wieder wegzunehmen als er selber hinzubringt; wenn aber ein Ton erst andern Tags aufgelegt wird, so wirkt er schon mit geringerer Stärke sehr lebhaft. Daher ist der mehr oder minder trockene Zustand des Papiers bei jeder Wahl der Tonstärke wohl zu beachten; daher hat ein oftmaliges oder längeres Unterbrechen der Arbeit des Farbtonauftragens meistens zur Folge, dass man nicht ohne einiges Nachbessern zum Ziel kommt.

Für das Schattieren mit Strichlagen ist glattes, gutgeleimtes, kräftiges, sorgfältig aufgespanntes Papier, tiefschwarzer Tusch und eine gutgeschliffene Reissfeder notwendig. Bei Verwendung eines Schraffierlineals soll um die Zeichnung herum reichlich Papierfläche vorhanden sein, da die Bewegung des Apparats durch die geringste Unebenheit gehemmt und dadurch die Strichweite beeinflusst oder sogar eine Drehung der Strichrichtung hervorgerufen wird. Die Lichtstufenlinien sind gewöhnlich nur mit Bleistift vorzuzeichnen; bei Darstellungen in kleinerem Massstab kann das Ausziehen mit der Feder der grösseren Klarheit wegen günstiger sein.

Auftragen der Lichtstufen mit je einem Ton. 123.

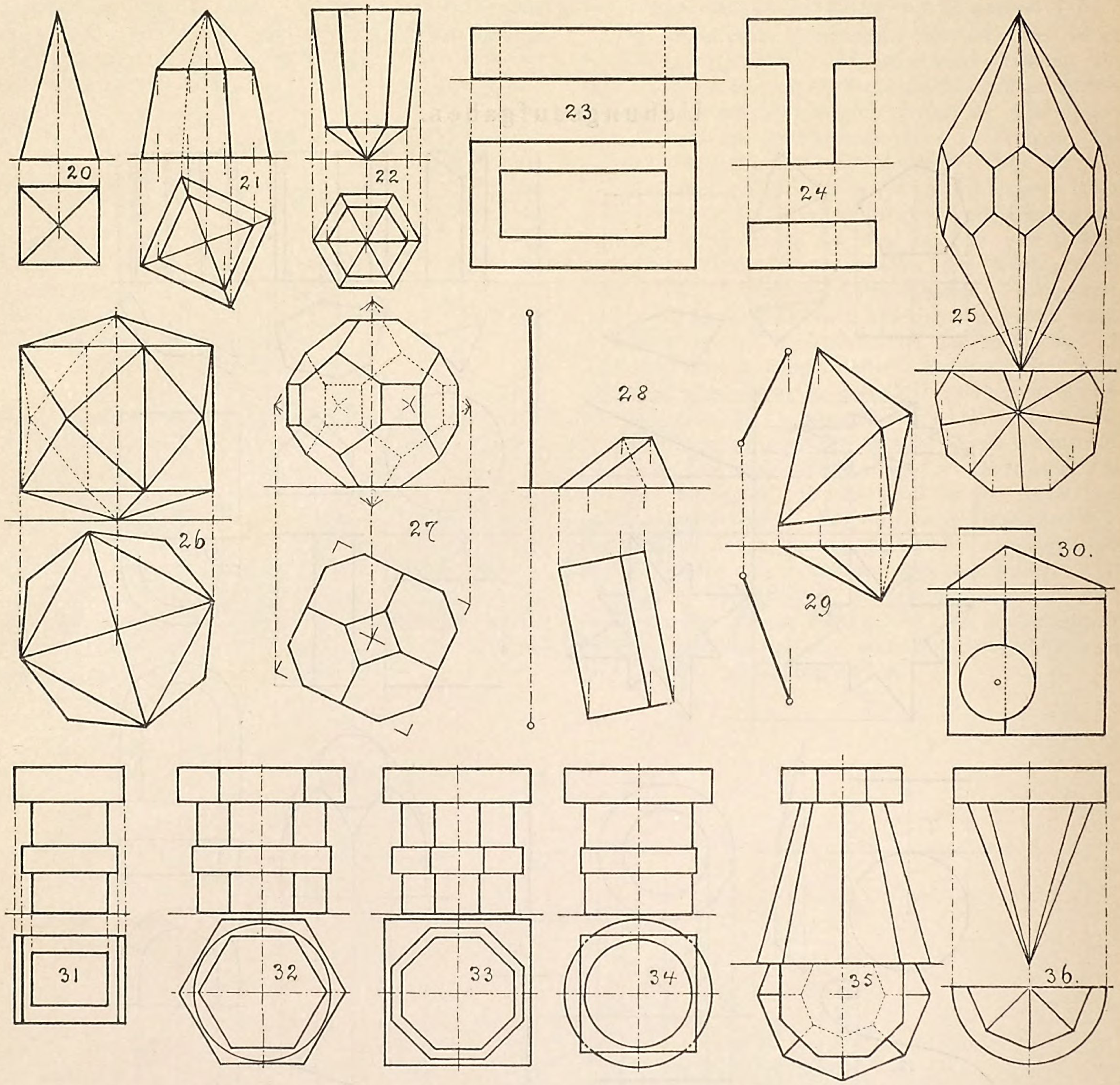
Die beschriebene Schattierung mit Lichtstufen ist ein vorzügliches Hilfsmittel, die ästhetische Wirkung auszuführender Gebilde mit mathematisch bestimmten Flächen zu erproben und schwieriger vorstellbare Raumformen ohne Modelle der Anschauung näher zu bringen. Ihre Vorzüge könnten sowohl nach ihrem Wert für das praktische Schaffen, als auch für den auf mathematische Raumgebilde zielenden Unterricht in grösserem Umfang ausgenützt werden, wenn für den Fall der gleichzeitigen Herstellung vieler Lichtstufenbilder das Auftragen der Maltöne auf kleineren Arbeitsverbrauch herabgedrückt und von all den Zufälligkeiten und Gefahren befreit würde, die beim Malen mit Wasserfarbtönen das Resultat so leicht verändern oder in Frage stellen. Es dürfte nun in der That nicht schwer sein, in einem Malverfahren mit deckenden Farbtönen die 15, genauer betrachtet 13 Lichtstufen ein- für allemal in grösseren Mengen derart herzustellen, dass jede Lichtstufe durch einmaliges Auftragen ihres Farbtons fleckenlos, deckend und immer unverändert richtig erhalten würde. Für Formen in grösserem Massstab, welche neben den 13 Grundtönen noch diejenigen für die in Art. 114 erwähnten Zwischenstreifen + 1,75 + 2,75 u. s. w. erfordern, würden die Zwischentöne je durch Mischen gleicher Mengen der zwei nächstliegenden Farbtöne erhalten, so man auch für solche Formen mit den 13 Tönen ausreichen könnte.

Uebungsaufgaben.

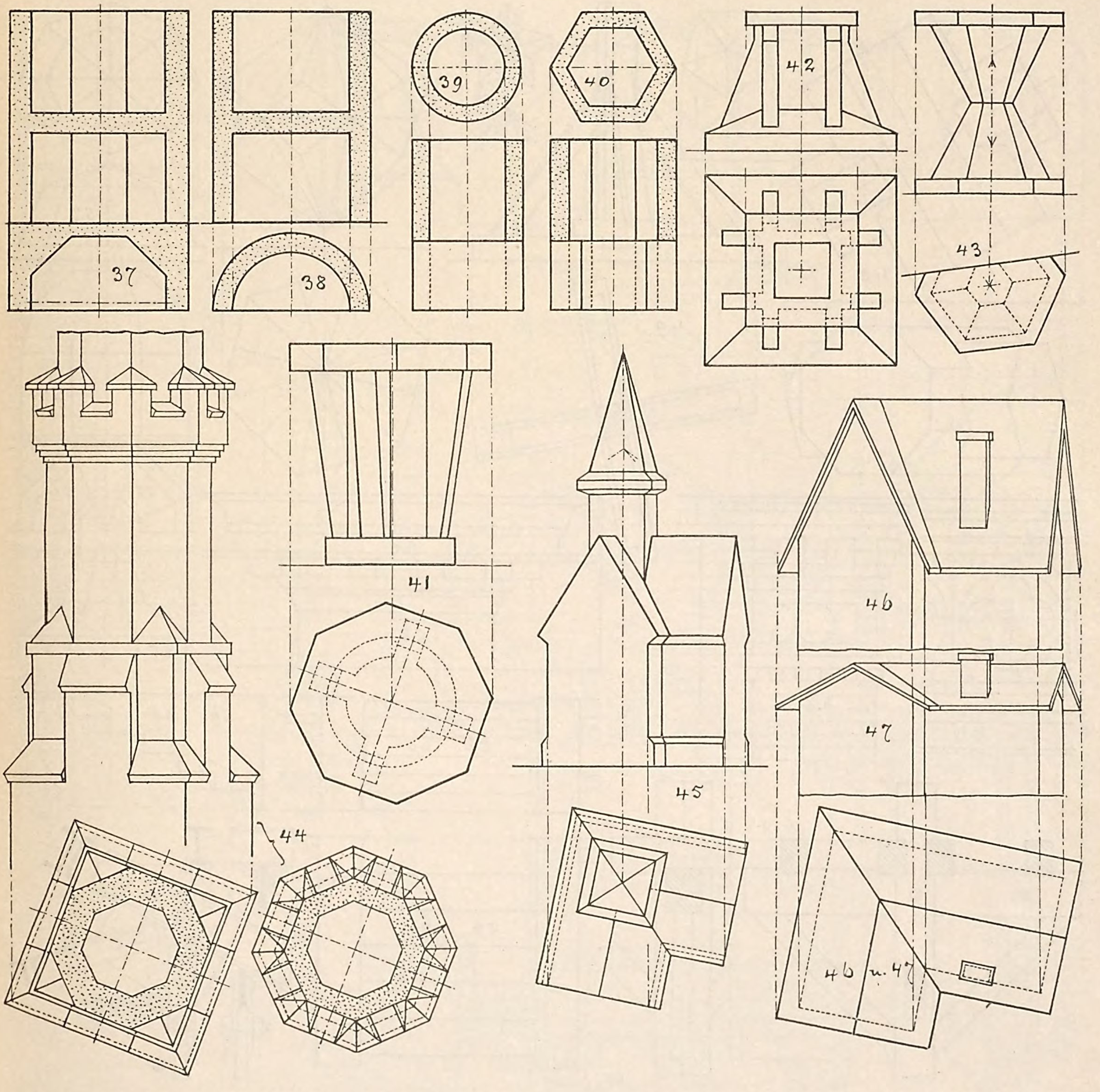


Zu II. Schlagschatten auf den Grundebenen und Selbstschatten von Körpern mit ebenen Flächen.

1. Ein horizontalliegendes Vieleck wirft einen Schlagschatten auf die vertikale Grundebene. Welche Fläche des Vielecks, wenn es als dünne Platte aufgefasst wird, ist im Licht und welche im Körperschatten?
2. Ein Vieleck, dessen Ebene der Vertikalebene parallel ist, wirft einen Schlagschatten auf beide Grundebenen.
3. Ein schiefliegendes Dreieck wirft einen Schlagschatten auf die Vertikalebene. Sind die Projektionen im Licht oder im Körperschatten?
4. Ein Vieleck, dessen Ebene senkrecht zum Grundschnitt steht, wirft einen Schlagschatten auf beide Grundebenen.
5. Ein sternförmiges Vieleck, dessen geneigte Ebene dem Grundschnitt parallel ist, wirft seinen Schlagschatten auf beide Grundebenen. Welche Fläche des als Platte gedachten Vielecks ist im Licht und welche im Körperschatten? Was folgt aus der Antwort für die Projektionen?
6. Zwei Kreise, deren Ebenen der Vertikalebene parallel sind, werfen ihre Schlagschatten auf beide Grundebenen, beziehungsweise die Horizontalebene allein.
7. Ein horizontaler Kreis wirft seinen Schlagschatten auf beide Grundebenen.



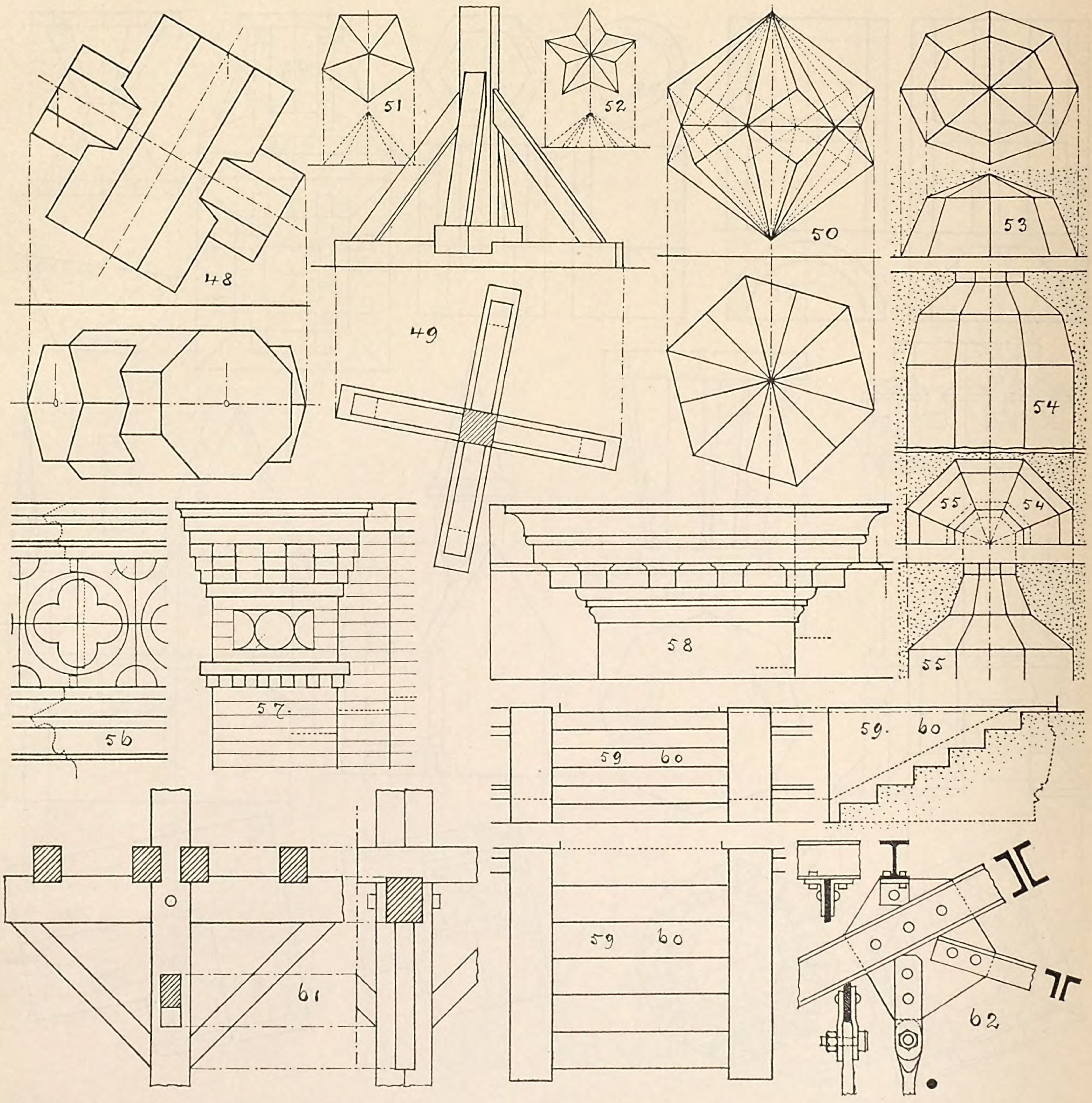
8. Die durch beide Projektionen gegebene Gerade ist zugleich Durchmesser eines Kreises und Gefällslinie seiner Ebene. Welche Horizontalrichtung und Neigung muss diese Gerade haben, wenn der Schatten des Kreises auf der Horizontalebene wieder ein Kreis werden soll?
9. Zwei der Vertikalebene parallele Kreise beschatten die Grundebene und sich selbst.
10. Ein zum Grundschnitt normalstehender Kreis wirft seinen Schlagschatten auf beide Grundebenen.
11. Ein Stabwerk, das eine vertikalstehende ebene Figur bildet, und dessen Stäbe nur als Linien gedacht sind, wirft seinen Schlagschatten auf die Horizontalebene.
12. Eine gewundene Kurve wirft ihren Schlagschatten auf beide Grundebenen.
13. Ein vertikales Prisma wirft seinen Schlagschatten auf beide Grundebenen. Welche Seitenflächen sind im Körperschatten?
14. Dasselbe für ein schräg abgedecktes Prisma.
15. Prisma senkrecht zur Vertikalebene.
16. Vertikales Prisma. Zunächst sind nur die Flächen mit Selbstschatten und die Schlagschattengrenzen auf der Grundebene festzustellen. Später kann die Figur auch als Beispiel für Selbstbeschattung gelten.
17. Eine vertikale halbcylindrische Röhre.
18. Ein halbcylindrisches Bogenstück mit rechteckigem Querschnitt auf zwei reckteckigen Stützen, parallel zur Vertikalebene stehend, beschattet die Vertikalebene.
19. Dasselbe Rohrstück beschattet die Horizontalebene.
20. Eine quadratische Pyramide beschattet beide Grundebenen.



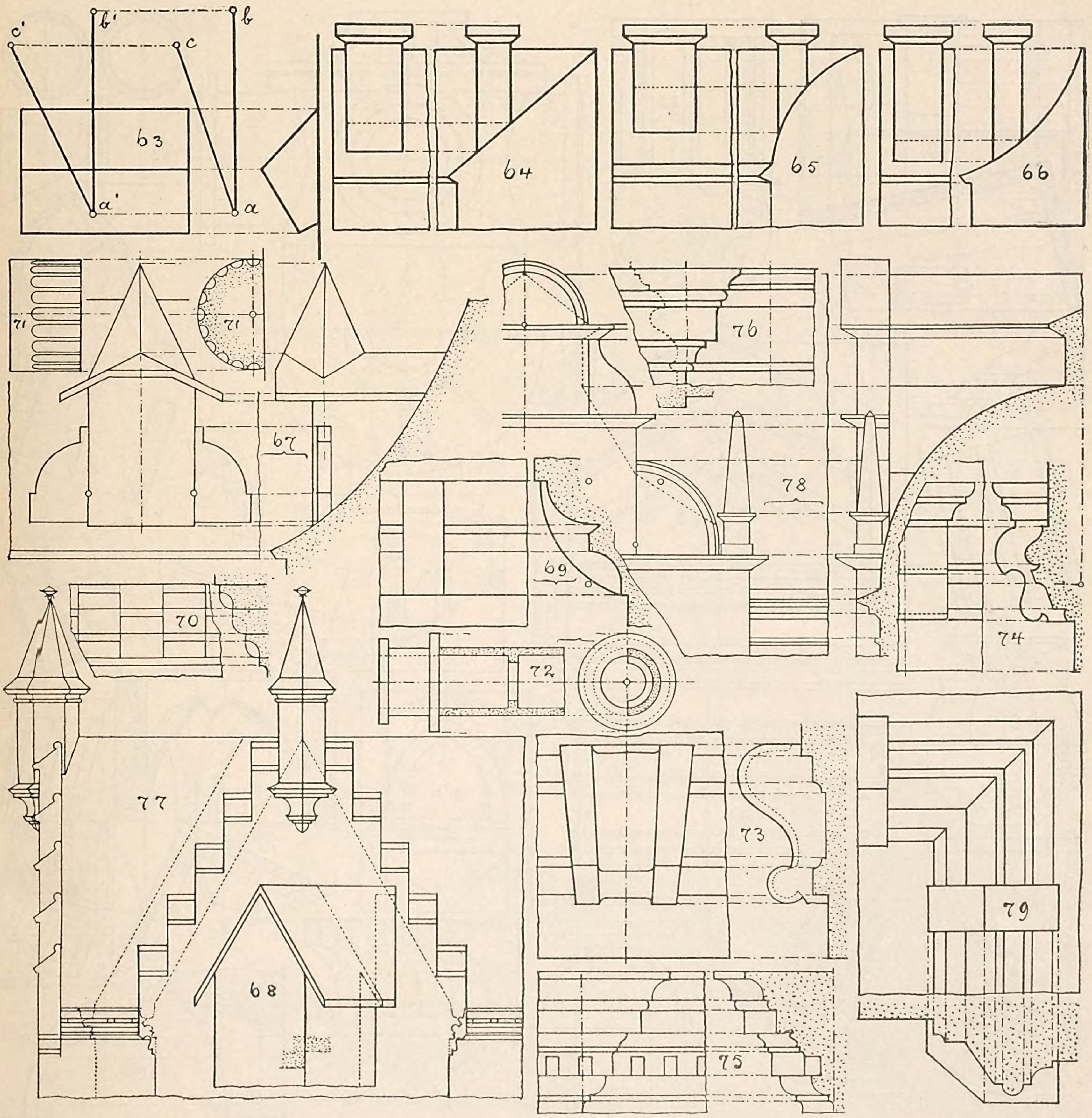
21. Ein quadratischer Obelisk. Man verfolge bei diesem und den andern Beispielen die Reihe der Kanten, die das „Streifpolygon“ oder die Körperschattengrenze bilden.
22. Ein regelmässig sechsseitiger Obelisk auf der Spitze stehend; Grundriss als Ansicht von unten zu schattieren.
23 und 24. Quaderformen zusammengestellt.
25. Körper aus Verbindung eines Prismas und zweier Pyramiden mit vertikaler Achse, im Grundriss regelmässig neunseitig.
26. Würfel mit flachen Pyramiden auf den Seitenflächen, Krystallform.
27. Rautenzwölfflach mit quadratisch abgestumpften Ecken, Krystallform. Um das Rautenzwölfflach in der gewählten Stellung zu erhalten, zeichnet man als Grundriss ein Quadrat mit beiden Mittellinien. Die Diagonale dieses Quadrats erscheint im Aufriss als ganze Höhe des Körpers; sie wird durch die drei Horizontallinien, auf welchen die Eckpunkte des Körpers im Aufriss liegen, in vier gleiche Teile geteilt. Aus diesen Horizontallinien und den Höhenloten der Grundrisspunkte ergeben sich die Aufrisspunkte der Ecken.

Zu III. Schlagschatten auf eben begrenzten Körpern.

28. Eine vertikale Gerade beschattet ein horizontales Prisma.
29. Eine geneigte Gerade beschattet eine aus der Vertikalebene vortretende Pyramide.
30. Ein horizontaler Kreis beschattet ein horizontales Prisma.
31. Rechteckiger Pfeiler, beschattet durch horizontale rechteckige Platten.



32. Sechseckiger Pfeiler, beschattet durch eine sechseckige und eine kreisrunde Platte.
33. Achteckiger Pfeiler, Platten quadratisch und achteckig.
34. Runder Pfeiler, Platten rund und quadratisch.
35. Achtseitige Pyramide, beschattet durch eine gedrehte achteckige Platte.
36. Auf der Spitze stehende Pyramide, beschattet durch eine kreisrunde Platte.
37. Prismatischer Hohlkörper mit Selbstbeschattung.
38. Cylindrischer Hohlkörper mit Selbstbeschattung und Beschattung der Grundebenen. (Hierzu auch 17.)
39. Kreisröhre normal zur Vertikalebene, teils voll, teils halbcylindrisch.
40. Sechseckige Röhre normal zur Vertikalebene, teils voll, teils mit ausgebrochener oberer Hälfte.
41. Cylindrisches Gussstück mit Verstärkungsrippen (Säulenuntersatz) in umgekehrter Stellung (auch die Schatten auf den Grundebenen zu suchen).
42. Quadratischer Säulenuntersatz mit Rippen in gerader Stellung. Das Quadrat kann auch schräg zum Grundschnitt gestellt werden.
43. Ein Körper aus Prismen und Pyramiden an einer schrägstehenden Wand beschattet sich selbst und die Wand.
44. Uebergang vom quadratischen zum achtseitigen Querschnitt an einem Kamin. Der Grundriss links ist ein Horizontalschnitt in halber Höhe; derjenige rechts ist über den Zinnen durchgeführt. (Von einer Pumpstation am Kaiser Wilhelms-Kanal.)
45. Bauwerk mit Selbstbeschattung von Wand- und Dachflächen.

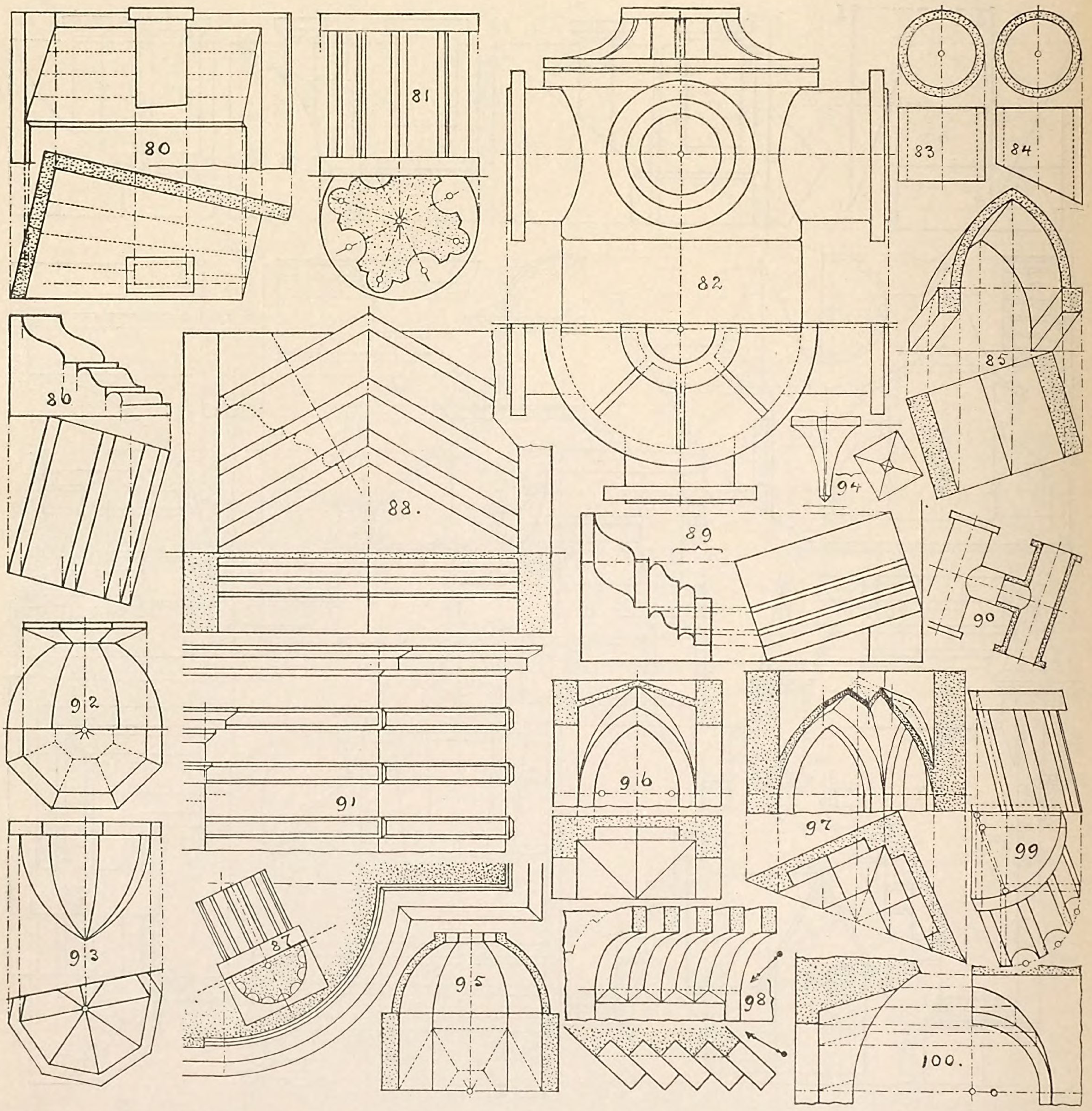


46 und 47. Selbstbeschattung von Wand- und Dachflächen. Der Grundriss ist gemeinschaftlich für beide Aufrisse; in 46 erscheint ein Schlagschatten der vorderen Firstlinie auf dem Dach, in 47 nicht, wodurch auch die Schlagschatten auf der Wand andre werden.

48. Durchdringung eines achtseitigen und eines sechsseitigen Prismas mit Selbstbeschattung.

49. Pfosten mit Schwellenkreuz und Verbügung, Selbstbeschattung und Schlagschatten auf den Grundebenen darbietend.

50. Durchdringung zweier Würfel mit gemeinschaftlicher vertikalstehender Diagonale (Zwillingskrystallform). Der Grundriss des Körpers ist ein regelmässiges Sechseck mit den Radien nach den Ecken und Seitenmitten. Zwei aneinanderliegende Sechseckseiten mit den zwei Radien, die ihnen parallel sind, bilden einen Rhombus, der die Projektion einer Würfelseite darstellt. Die längere Diagonale dieses Rhombus erscheint als Projektion der horizontalen Diagonale dieser Würfelseite in wahrer Grösse. Die im Aufriss vertikal in wahrer Grösse auftretende Würfeldiagonale lässt sich aus jener horizontalen Diagonale ableiten; denn am Würfel bilden eine Würfeldiagonale, eine Seitendiagonale und eine Würfelseite ein rechtwinkliges Dreieck; in diesem Dreieck ist die längere Kathete bekannt und die kürzere verhält sich zu ihr wie die Quadratseite zur Diagonale des Quadrats. Die hieraus erhaltene vertikalstehende Würfeldiagonale ist in 3 gleiche Teile zu teilen. Die Horizontallinien durch

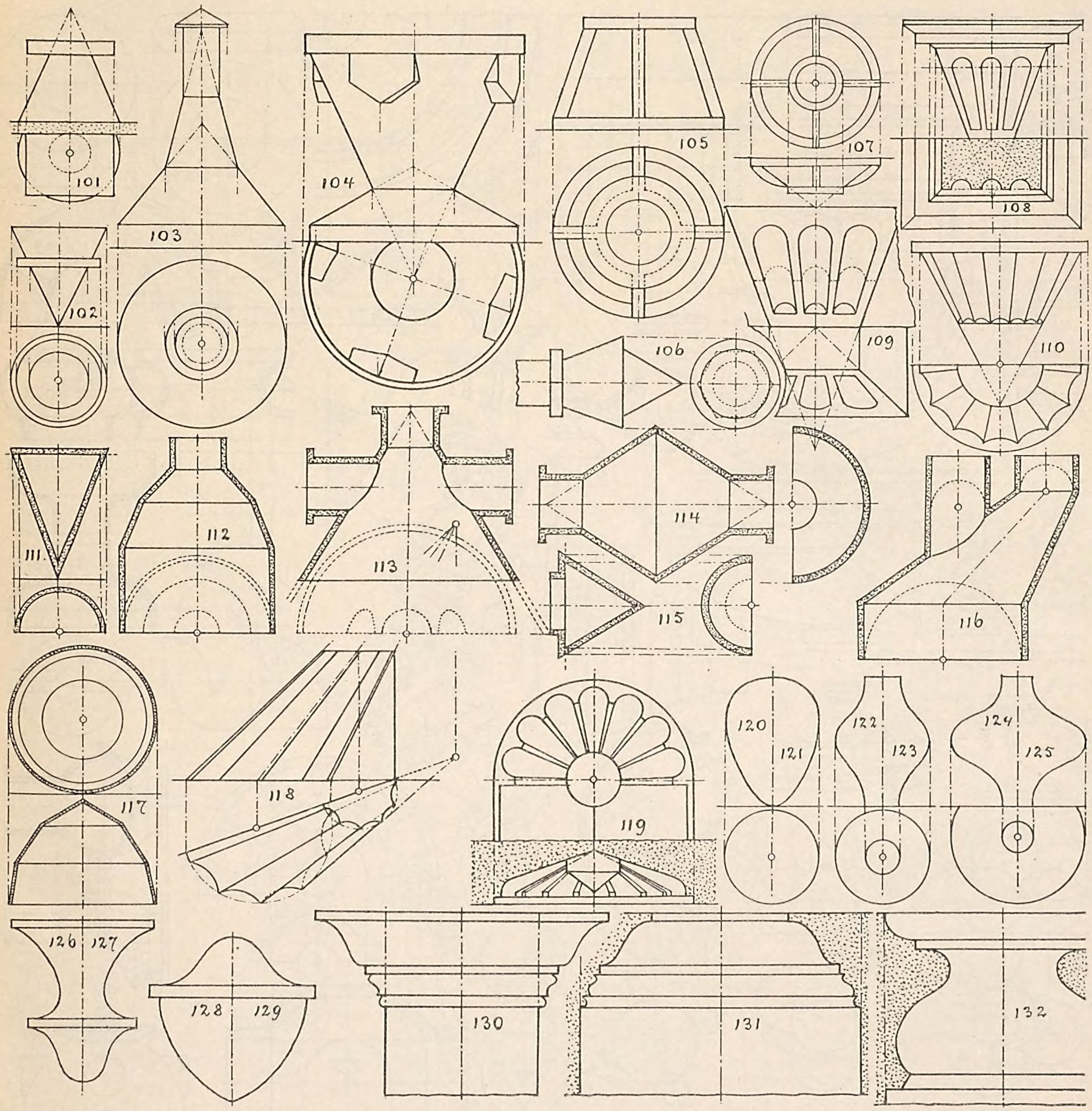


die Teilpunkte und die Höhenlote der Grundrisspunkte liefern die Aufrisspunkte für die vortretenden Ecken. Die übrigen Eckpunkte liegen in der Hälfte der Höhe.

51. Fünfseitige in die Vertikalebene vertiefte Pyramide mit Selbstbeschattung.
52. Fünfseitiger Stern, in die Vertikalebene vertieft.
53. Achtseitige Obeliskenform, vertieft in die Vertikalebene.
54. Kuppel mit ebenen Flächen und Scheitelöffnung im Höhenschnitt.
55. Trichterförmige Decke mit Scheitelöffnung im Höhenschnitt; der Grundriss zu 54 gilt mit der punktierten Abänderung auch für 55.

Zu Art. 13. Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss.

56. Gesims mit Brüstung. Die einpunktierte Linie zeigt das Vor- und Zurücktreten der Flächen.
57. Pfeiler mit Krönungsgesims aus Backsteinen. Die Ecklinie selbst macht das Vor- und Zurücktreten der Gesimsteile ersichtlich; für dasjenige der Wandflächen gilt die einpunktierte Staffellinie.
58. Konsolengesims in Haustein. Die Wandfläche ist seitlich weiter auszudehnen, um den ganzen Schlagschatten des Gesimses aufnehmen zu können.
59. Treppe mit horizontal abgedeckter Wange. Zum Eintragen der Schattengrenzen in eine jede der Figuren sind die andern Figuren nur zum Abstechen von Massen,



nicht auch zum Ziehen von Konstruktionslinien zu benützen. (Bei Bestimmung der Schattengrenzen im Grundriss wird also hier der Aufriss nur gedacht.)

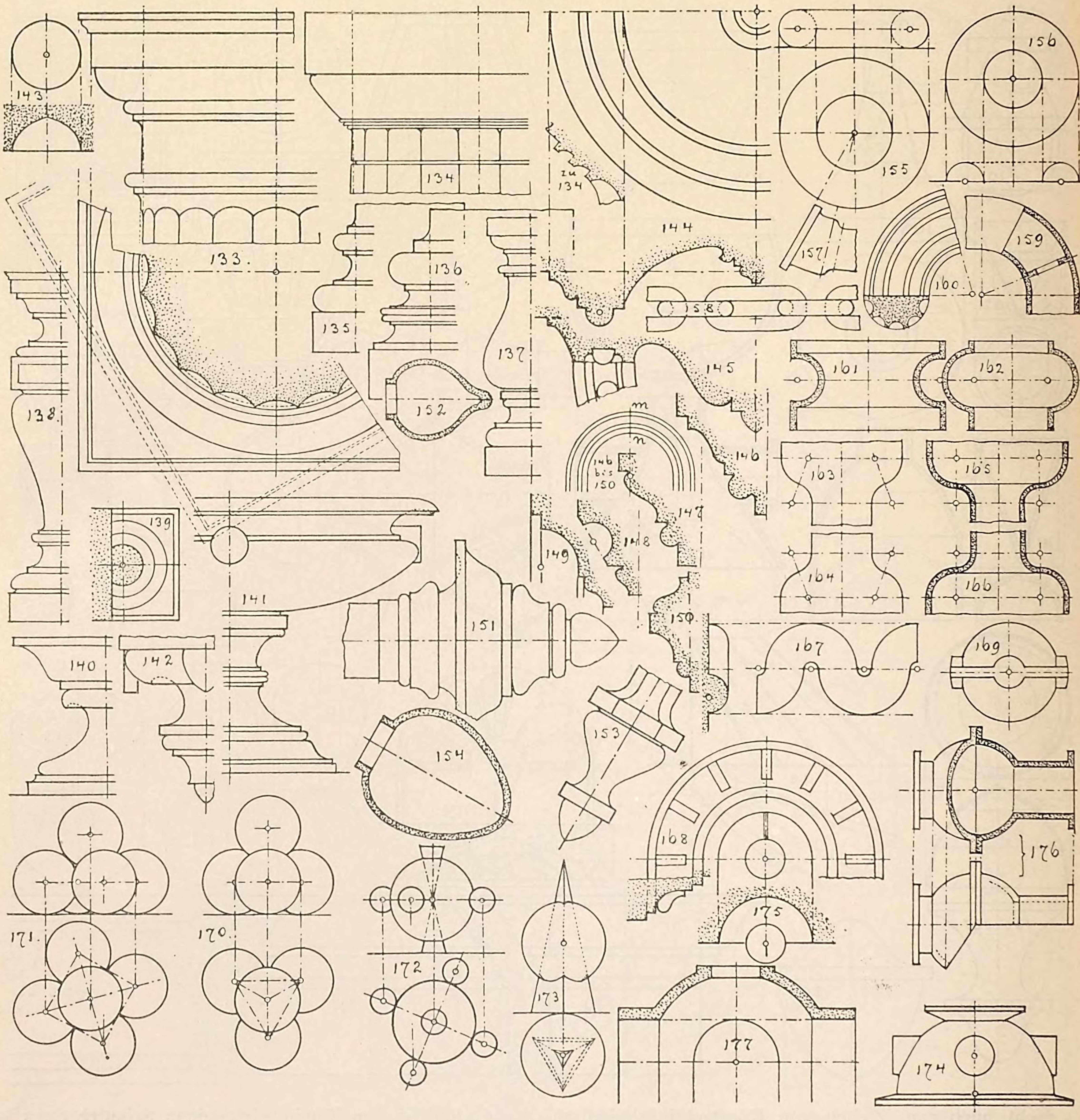
60. Dieselbe Treppe mit der punktiert eingezeichneten schrägen Abdeckung der Wange.
61. Knotenpunkt einer Deckenkonstruktion mit Holzbalken und Unterzügen.
62. Knotenpunkt eines eisernen Dachbinders.

Zu IV. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen parallel zum Grundschnitt.

63. Eine vertikale Gerade *a b a' b'* und eine geneigte *a c a' c'* werfen ihre Schlagschatten auf ein zum Grundschnitt paralleles Prisma und auf die Vertikalebene.

64, 65 und 66. Ein Kamin wirft seinen Schatten auf eine in der Längenansicht erscheinende ebene, konvexcylindrische und konkavcylindrische Dachfläche. Aufriss und Seitenprojektion sind weiter auseinanderzurücken, um dem Schlagschatten Raum zu geben.

67. Eine Lukarne beschattet sich selbst und eine konkave Dachfläche.
68. Selbstbeschattung von Wand- und Dachflächen in Vorder- und Längenansicht.
69. Selbstbeschattung eines durch Kragsteine geteilten Gesimses.
70. Formsteingesims mit schachbrettartiger Gliederung durch Viertelstäbe und Kehlen.
71. Kannelierter Säulenschaft, parallel zum Grundschnitt



liegend. Die Kanäle endigen mit viertelskugelförmigen Flächen, wodurch die Aufgabe über den Rahmen der Kapitel I bis IV hinausgeht. Doch lässt sich die Endigung durch eine gerade mit Ebenen senkrecht zur Säulenachse ersetzen.

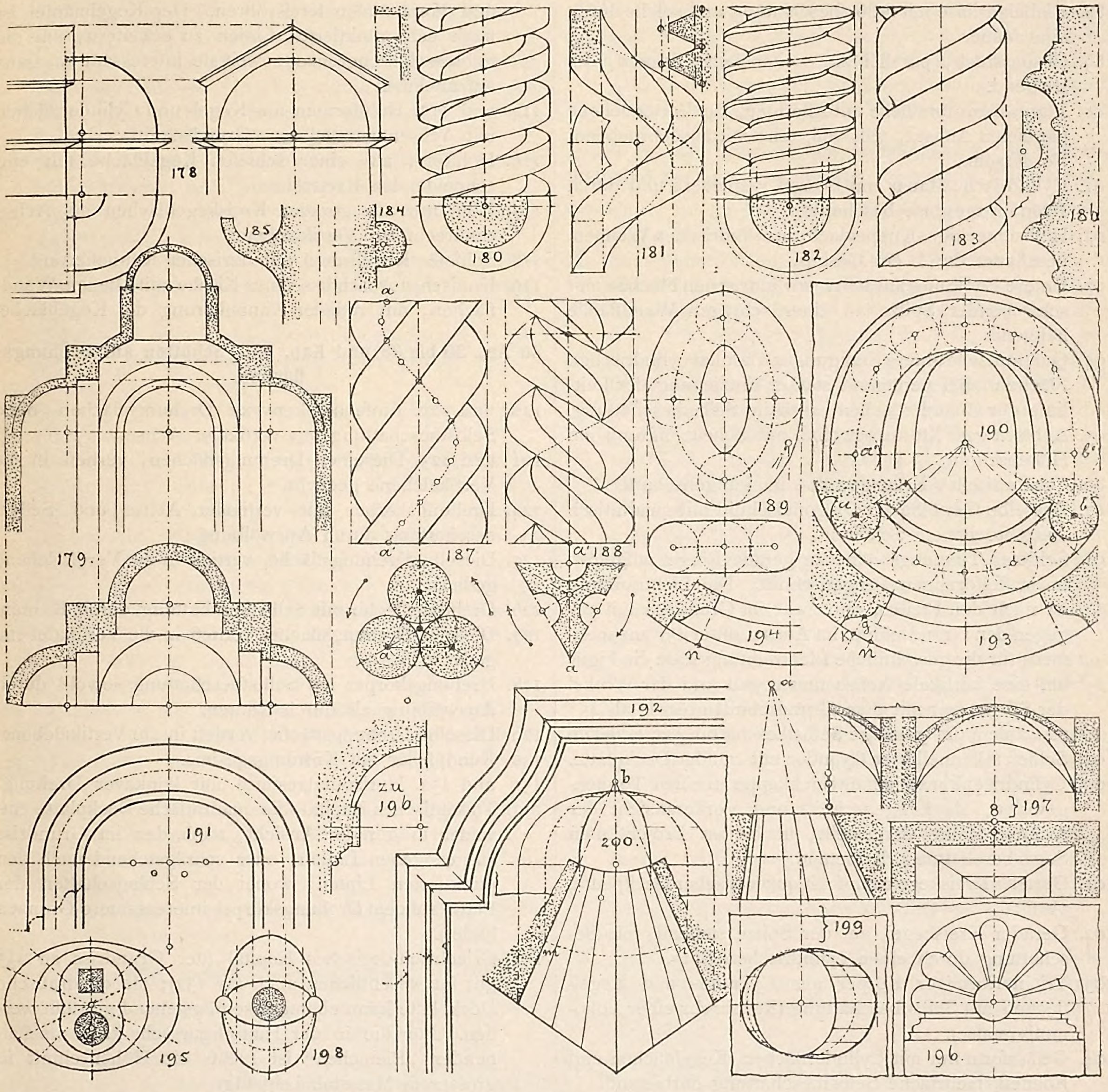
72. Gerade Kreisröhre, zum Teil voll, zum Teil mit Ausbrechen der vorderen Hälfte.

73 und 74. Schlusssteine auf horizontalen Rahmengesimsen.

75. Gesimsverkröpfung.

76. Zusammenschneiden eines Fussgesimses mit einem Krönungsgesims. Aus Mangel an Raum ist die Seitenprojektion durch Einpunktieren des Fussgesimsprofils in den Aufriss ersetzt und ein Grundriss der unter den Gesimsen stehenden Wandflächen beigefügt.

77. Zwei Stufengiebel, eine ebene Dachfläche mit Querdach beschattend. Die Seitenprojektion ist auch hier ersetzt durch die links im Aufriss einpunktierte vertikale und geneigte Linie. Soweit diese Linie entfernt ist von dem Seitengiebel, soweit ist der vordere Giebel von der in der Längenansicht erscheinenden Wand- und Dachfläche entfernt, so dass der Seitengiebel zugleich als Seitenprojektion des vorderen benützt werden kann. Hinter dem vorderen Giebel sind die Querdachflächen einpunktiert, so dass auch der vordere Giebel mit diesen punktierten Linien als Seitenprojektion



des Seitengiebels bei Bestimmung der von diesem geworfenen Schatten dienen kann.

78. Ein Giebel mit geschweiften Randlinien beschattet eine cylindrische Dachfläche.

79. Ein Rahmengesims beschattet sich selbst und ist durch vortretende prismatische Steine beschattet.

Zu Art. 29. Die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen angewendet auf Regelflächen.

80. Eine Mauer und ein Kamin werfen Schlagschatten auf eine windschiefe Dachfläche.

Zu VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

81. Ein vertikalcylindrischer starkgegliederter Pfeiler durch eine runde Deckplatte beschattet.

82. Cylindrischer Behälter mit Flantschenrohransätzen, mehrfache Selbstbeschattung darbietend (nach einem „Teilkasten“ aus dem Musterbuch der Eisengiesserei Wasseralfingen, das rechtseitige Rohr der Schatten wegen etwas verlängert).

83. Gerade cylindrische Röhre senkrecht zur Vertikalebene. Die Grenzen der Selbstbeschattung sind im Grundriss punktiert einzuzeichnen.

84. Dieselbe Röhre schräg abgeschnitten.

85. Spitzbogiges Tonnengewölbe, zugleich schräg und ansteigend.

86. Gesimsstück, schräg zum Grundschnitt horizontalliegend.

87. Kannelierte Säulentrommel mit quadratischer Deckplatte, schräg zum Grundschnitt horizontalliegend.

88. Giebelgesimse mit Selbstbeschattung und solche durch eine Mauer.
89. Gesimsstück, parallel zur Seitenebene liegend, ansteigend.
90. Flantschenrohrstücke mit schrägen, zur Vertikalebene parallelen Achsen, teils voll, teils mit ausgebrochener Vorderseite.
91. Cylindrische Mauer mit Bossen gegliedert und durch Krönungsgesimse beschattet.
92. Halbachteckiges Kuppeldach mit cylindrischen Walmen, beschattet durch ein Gesims.
93. Untere Endigung aus konvexcylindrischen Flächen, mit schwebender Spitze an einer schrägen Wandfläche hängend.
94. Quadratische untere Endigung aus konkavcylindrischen Flächen. Bei genügend starker Einziehung der Leitlinie der Cylinderflächen erscheint Selbstbeschattung.
95. Achtseitiges Klostergewölbe mit Scheitelöffnung im Höhenschnitt.
96. Quadratisches Kreuzgewölbe im Längenschnitt.
97. Dasselbe Gewölbe im Diagonalschnitt mit quadratisch ausgebrochenem Scheitel.
98. Schiefes Tonnengewölbe in gerade Ringe aufgelöst, im staffelförmigen Längenschnitt. Die Lichtrichtung ist nach den Pfeilen, und zwar im Grundriss mit 30^0 gegen den Grundschnitt, im Aufriss unter 45^0 anzunehmen; für die gewöhnliche Lichtrichtung wäre die Figur um eine vertikale Achse umzulegen und der Winkel der Stirnmauer mit dem Grundschnitt grösser als 45^0 zu wählen, um günstige Selbstbeschattung zu erzielen.
99. Schiefer kannelierter Cylinder mit runder Deckplatte.
100. Cylindrische ansteigende Stichkappe an einem Tonnengewölbe, als Längenschnitt und Vorderansicht der rechten Hälfte dargestellt, in beiden Projektionen Selbstbeschattung darbietend.
101. Gerader Kreiskegelrumpf mit quadratischer Deckplatte, vertikal.
102. Gerader Kreiskegel, auf der Spitze stehend, mit Beschattung durch einen cylindrischen Ring.
103. Trichterförmiger Körper aus Cylinder- und Kegelflächen mit Selbstbeschattung (Rauchrohr einer Lokomotivremise).
104. Gefässform nur mit Cylinderflächen, Kegelflächen und Ebenen, mehrfache Selbstbeschattung darbietend.
105. Konischer Säulenuntersatz mit Rippen.
106. Seitliche Endform einer Rundstange, gebildet aus geraden Kreiskegeln mit Achse parallel zum Grundschnitt.
107. Konische Zugankerscheibe mit Rippen an vertikaler Wand.
108. Konsole mit halbrunden konvergierenden Kanälen auf ebengeneigter Stirnfläche.
109. Dieselbe Kannelierung ohne Beschattung der oberen Endigung.
110. Konsole in Kegelform mit dorischer Kannelierung.
111. Gerader hohler Kreiskegel, auf der Spitze stehend, im Höhenschnitt.
112. Hohlform aus Kegel- und Cylinderflächen mit vertikaler Achse.
113. Konische Hohlform mit einschneidenden vertikalen und horizontalen Kreisröhren. Der Kegelmantel ist nach den punktierten Linien zu erweitern, um die Schlagschattengrenze, soweit sie interessant ist, ganz aufzunehmen.
114 und 115. Hohlformen aus Kegel- und Cylinderflächen mit Achsen parallel zum Grundschnitt.
116. Hohlform aus einer schiefen Kegelfläche mit einschneidenden Kreisröhren.
117. Hohlform aus geraden Kreiskegelflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene.
118. Schiefer Kegelrumpf mit dorischer Kannelierung.
119. Konischer Abschluss einer Nische mit ebenen Wandflächen, mit radialer Kannelierung der Kegelfläche.

Zu Art. 30 bis 38 und Kap. VII. Schatten auf Drehungsflächen.

120 und 122. Einfache konvexe Drehungsflächen ohne Selbstbeschattung mit vertikaler Achse.
121 und 123. Dieselben Drehungsflächen, vertieft in die Vertikalebene gedacht.
124. Drehungskörper mit vertikaler Achse und Selbstbeschattung durch Auswölbung.
125. Dieselbe Drehungsfläche, vertieft in die Vertikalebene gedacht.
126. Drehungsfläche mit Selbstbeschattung durch Kanten.
127. Dieselbe Drehungsfläche, vertieft in die Vertikalebene gedacht.
128. Drehungskörper mit Selbstbeschattung sowohl durch Auswölbung als durch Kanten.
129. Dieselbe Drehungsfläche, vertieft in die Vertikalebene.
130. Rundpfeiler mit Krönungsgesims.
131 und 132. Horizontalgesimse mit konkaver Drehung.
133. Toskanisches Kapitäl (die quadratische Deckplatte entweder in gerader Ansicht, nach den im Grundriss ausgezogenen Linien, oder schrägstehend nach den punktierten Linien, wobei der Schlagschatten der Platte auf dem Drehungskörper interessantere Grenzen bildet).
134. Griechisch-dorisches Kapitäl (der Grundriss zu 133 gilt im wesentlichen auch für 134); die quadratische Deckplatte kann ebenfalls schrägstehend gewählt werden. Für die in der Hauptfigur sehr klein erscheinenden „Riemchen" ist rechts ein Höhenschnitt in grösserem Massstab beigefügt.
135. Attisch-jonische Säulenbasis (in der durch die Renaissance veränderten Form); die Fussplatte quadratisch.
136. Rein jonische Säulenbasis.
137 und 138. Balusterformen (Fussplatten und Deckplatten quadratisch; bei 138 auch eine quadratische Zwischenplatte mit Füllung; das übrige Drehungsfläche).
139. Grundriss für die Balusterformen 137 und 138, wobei sie als „Dreiviertelsbaluster" an ein rechteckiges Postament angesetzt sind, das einen Schlagschatten auf sie wirft.
140, 141, 142. Drehungskörper mit vertikaler Achse.
143. Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, in diese vertieft.
144, 145. Rosetten an vertikaler Wand (Drehungsflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene).

146, 147, 148, 149, 150. Archivolten- oder Steinbogengesimse. Die 5 Gesimsprofile gehören zu dem beigezeichneten Halbkreis und bedeuten Höhenschnitte nach der Linie *mn*. Die Bogenlinie kann anstatt des Halbkreises auch ein Segmentbogen und zu 148 ein Spitzbogen oder gotischer Bogen sein.

151. Seitliche Endigung einer Rundstange (Drehungsfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt).

152. Hohlkörper im Längenschnitt (Drehungsfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt).

153. Endigung eines regelmässig sechsseitigen Stabs (Drehungsfläche mit schiefer, zur Vertikalebene paralleler Achse).

154. Hohlkörper im Längenschnitt (Drehungsfläche mit schiefer, zur Vertikalebene paralleler Achse).

155. Horizontaler Wulstring, konvex.

156. Halbe Wulstringfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, in diese vertieft.

157. Endigung eines bogenförmigen Muffenrohrs (Beschattung einer Wulstfläche durch eine Cylinderfläche und durch eine Verbindung zweier andrer Wulstflächen (es ist eine strenge und eine nur annähernd genaue Lösung möglich; die erste ist schwierig).

158. Kette mit wulstförmigen Gliedern, die abwechselnd länger und kürzer sind und einander beschatten.

159. Bogenrohr, teils voll, teils mit ausgebrochener vorderer Hälfte; in dieser eine Verengerung.

160. Kannelierte Wulstfläche.

161. Wulstfläche mit konvexem Meridianschnitt und konkaver Drehung, eine Hohlcylinderfläche beschattend.

162. Wulstfläche mit konkavem Meridianschnitt und konkaver Drehung.

163 und 164. Verbindung zweier konvexer Wulstflächen.

165 und 166. Verbindung zweier hohler Wulstflächen.

167. Aneinanderreihung von Wulstflächen mit Selbstbeschattung.

168. Wulstförmige Kehle in einem Bogengesims, durch Konsolen beschattet.

Zu VIII. Schatten auf Kugelflächen.

169. Vollkugel mit Beschattung durch Rippen.

170. Dreiseitige Kugelpyramide.

171. Quadratische Kugelpyramide.

172. Vollkugel, beschattet durch angesetzte kleinere Kugeln und kegelförmige Achsen.

173. Vollkugel, durchdrungen und beschattet von einer dreiseitigen Pyramide.

174. Kugelförmige Kuppel, beschattet durch ein Krönungsgesims und kreisrunde Lukarnen.

175. Halbrunde, mit einer Viertelskugel abgedeckte Nische, beschattet durch eine kugelförmige Laterne.

176. Hohlkörper aus einer Kugelfläche und zwei Kreisröhren mit teilweise ausgebrochener vorderer Hälfte, Selbstbeschattung bietend.

177. Kuppelgewölbe mit kreisförmigem Scheitelausschnitt und einschneidenden Tonnengewölben im Längenschnitt. Das in der Vorderansicht erscheinende Tonnengewölbe konnte als Seitenprojektion der beiden andern dienen und machte einen Grundriss entbehrlich.

178. Halbkuppel, beschattet durch eine Giebelmauer, dargestellt durch Aufriss, Grundriss und Seitenansicht.

179. Centralbau mit Hängekuppel, Vollkuppel und Nischengewölben, mehrfache Selbstbeschattung darbietend, dargestellt durch Längenschnitt und Grundriss.

Zu Art. 70. Schraubenflächen, Wendelflächen. Die Schrauben und die schraubenförmig verdrehten Stabformen.

180. Flachgängige Schraube mit doppeltem Gewinde (Höhenschnitt links oben).

181. Schraubenförmiges Wangenstück mit rechteckigem Höhenschnitt, Selbstbeschattung darbietend.

182. Scharfgängige Schraube. Der links oben beigezeichnete Höhenschnitt giebt an, dass die aus- und einspringenden Ecken zwischen den zwei Schraubenflächen durch Vertikalcylinder abgekantet sind. Die Gewindtiefe ist im Verhältnis zum äusseren Durchmesser absichtlich viel grösser angenommen, als sie bei Eisenschrauben vorkommt, um die Verschiedenheit der Steigungen beider Schraubenlinien deutlicher zu zeigen. In der gezeichneten Form würden nur etwa Schrauben aus Hartholz zweckmässig sein.

183. Schraubenförmig kannelierter Cylinder; es erscheinen zwei Kanäle mit halbkreisförmigem Vertikalschnitt. (Annähernde Lösung durch Behandlung der Kanäle als Röhrenflächen mit elliptischem Normalschnitt.)

184 und 185. Achsenschnitte für schraubende Drehung. Durchmesser der Cylinder und Ganghöhe beliebig. (Annähernde Lösung ähnlich wie bei 183.)

186. Gesims auf einem Cylinder schraubenförmig aufsteigend (Spindel einer Wendeltreppe). Die Figur giebt den Höhenschnitt durch die Achse. (Entweder strenge Lösung oder nur annähernde wie bei 183.)

187. Stabform aus der schraubend aufsteigenden Drehung dreier horizontaler Kreise, Selbstbeschattung darbietend. (Körperschattengrenze oder Lichtstufenlinien bestimmbar wie bei der gewundenen Säule in Art. 74 u. 109.)

188. Stabform aus der schraubend aufsteigenden Drehung eines horizontalen gleichseitigen Dreiecks, mit halbkreisförmiger Kannelierung der drei gebildeten Wendelflächen.

Zu Art. 71 bis 73. Röhrenflächen.

189. Elliptische Kreisröhre. (Wenn der Halbmesser der erzeugenden Kugel grösser wird als der Krümmungshalbmesser der Ellipse in deren Scheitel, so schneidet sich die Fläche selbst.)

190. Auf dem Vertikalcylinder *a b* ist ein Halbkreis aufgewickelt, dessen horizontaler Durchmesser gleich dem verstreckten Bogenmass *a b* ist. Längs der auf dem Cylinder hierdurch erhaltenen Linie bewegt sich eine unveränderliche Kugel und erzeugt eine Röhrenfläche, die den Rundstab des dargestellten Gesimses bildet. Eine horizontale Gerade gleitet einerseits an der Cylinderachse, andererseits an der Innen- und Unterseite der Röhrenfläche und erzeugt die konoidische Leibung der Bogenöffnung.

191. Der punktierte Bogen ist eine halbe Ellipse; auf

dieser bewegt sich die punktiert gezeichnete Profillinie mit einem ihrer Punkte so, dass ihre Ebene immer normal zur Ellipse gerichtet ist und das gezeichnete Bogengesims beschreibt.

192. Ein ebensolches Rahmengesims mit Eckbildungen.

193 u. 194. Bogenrahmengesimse in cylindrischer Mauer. Die der Anschauung ziemlich schwierig zugängliche mathematische Erzeugung dieser oft ausgeführten Gesimse, die nur annähernd Röhrenflächen bilden, ist Seite 74 beschrieben; sie lässt sich auch erklären wie folgt. Man zeichnet das Gesimsprofil mit der Anfangslage im Grundriss und projiziert auf den Kreis, der die Wandfläche bedeutet, eine Anzahl Gesimsprofilpunkte g radial nach k. Man beschreibt durch alle Punkte k der verstreckten Grundrisswandlinie koncentrische Halbkreise, dem auf der Ebene gedachten Gesims entsprechend, und wickelt dieses Kreissystem auf der Cylinderwand auf. Jeder Punkt g des Gesimsprofils beschreibt nun im Grundriss einen konzentrischen Kreis; im Raum bleibt er auf seinem Radius, der an seiner aufgewickelten Bogenlinie gleitet und immer horizontal und radial gerichtet bleiben muss, also ein Konoid erzeugt. Die Höhenlage eines jeden Gesimspunktes ist hiernach dieselbe, die sie bei dem auf der Ebene gedachten Gesims wäre.

Zur strengen Bestimmung der Lichtstufenlinien auf einem solchen Gesims wird nur eines der allgemeinen Verfahren aus Art. 110 und 112 möglich sein; für die auszuführenden Gesimse dieser Art dürften aber Annäherungen immer genügen.

195. Kunstgewerbliche Schmuckform. Auf einem zur Vertikalebene prarallelen Kreis bewegt sich ein veränderliches Quadrat, dessen eine Diagonale in die Kreisebene fällt, dessen Ebene immer normal zum Kreis steht und dessen äussere Ecke eine Ellipse beschreibt. Anstatt durch ein Quadrat kann die Fläche auch durch einen veränderlichen Kreis erzeugt werden.

196. Viertelskugelfläche mit radialer Kannelierung (Muschel) als Ueberdeckung einer Nische. Wegen Mangels an Raum musste der Höhenschnitt entfernt von der Vorderansicht gezeichnet werden. (Muschel auch als konvexe Fläche auffassbar; Brunnenschale.)

Zu Art. 74 und 75. Rückungsflächen.

197. Länglich rechteckiges Kreuzgewölbe mit gekrümmten Scheitellinien (busenförmiges Kreuzgewölb) im Längenschnitt. Die Kappen des Gewölbs sind im vorliegenden Beispiel Rückungsflächen mit unveränderlichen Erzeugenden und entstanden wie folgt. Angenommen sind der Grundriss mit beiden Diagonalen, beiden Stirnbögen als Segmentbögen und der grössere Scheitelbogen. Der kleine Stirnbogen gleitet parallel fortschreitend am grossen Scheitelbogen, mit seinem Scheitelpunkt auf diesem bleibend, und erzeugt die schmale Kappe; diese schneidet sich an die Vertikalebene über der Diagonale mit einer bestimmten Linie an, welche als Rippenbogenlinie benützt wird. Nun schreitet der grosse Stirnbogen parallel und gleichgerichtet bleibend auf der Rippenbogenlinie fort und erzeugt die breite Kappe; ihre Scheitellinie ergiebt sich aus dieser Bewegung.

Anstatt eines Scheitelbogens kann auch der Rippenbogen als gegeben betrachtet werden; es erzeugen sich dann beide Kappen und Scheitelbögen aus der Bewegung der Stirnbogenlinien auf dem Rippenbogen.

Als Beispiel einer Rückungsfläche mit unveränderlicher, immer gleichgerichteter Erzeugenden und gewundener Leitlinie könnte etwa ein horizontales Quadrat oder Vieleck mit gebogenen Seitenlinien auf einer vertikalstehenden Schraubenlinie ohne Drehung aufsteigend gewählt werden. Derartige Flächen, die nicht mit den schraubend verdrehten Stabformen zu verwechseln sind, können leicht mit Körperschattengrenzen und Lichtstufenlinien versehen werden, indem, wie bei der gewundenen Säule, die einen besonderen Fall dieser Flächen bildet, jeder Horizontalschnitt als eine schiefe Cylinderfläche aufgefasst wird.

198. Rückungsfläche mit veränderlicher, aber nicht drehender Erzeugenden, als kunstgewerbliche Schmuckform gedacht. Auf dem in der Ansicht gezeichneten Kreis schreitet ein vertikaler veränderlicher Kreis mit seinem Mittelpunkt so parallel fort, dass der äussere Umriss der Fläche eine Ellipse wird.

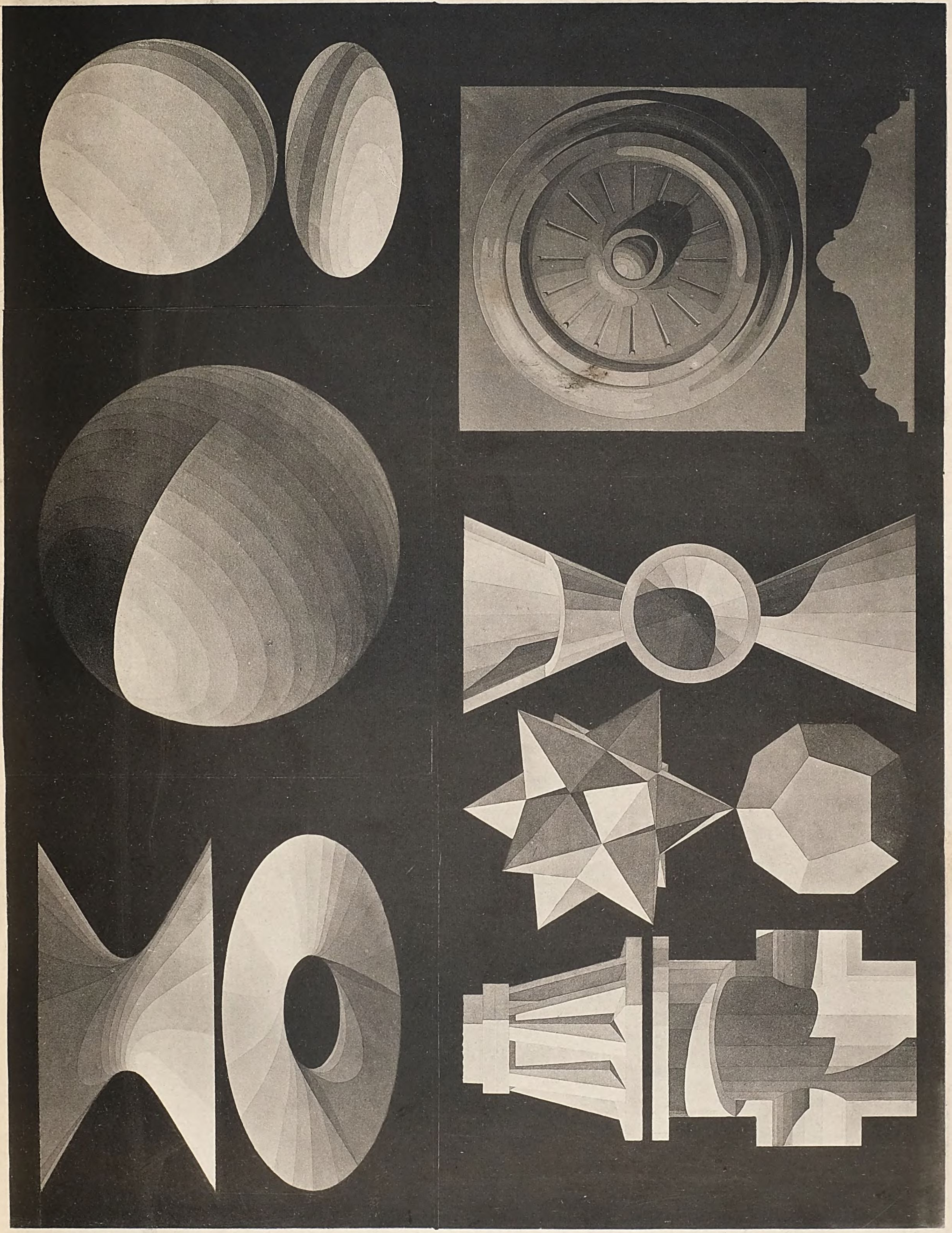
Zu Art. 77. Konoidische Flächen.

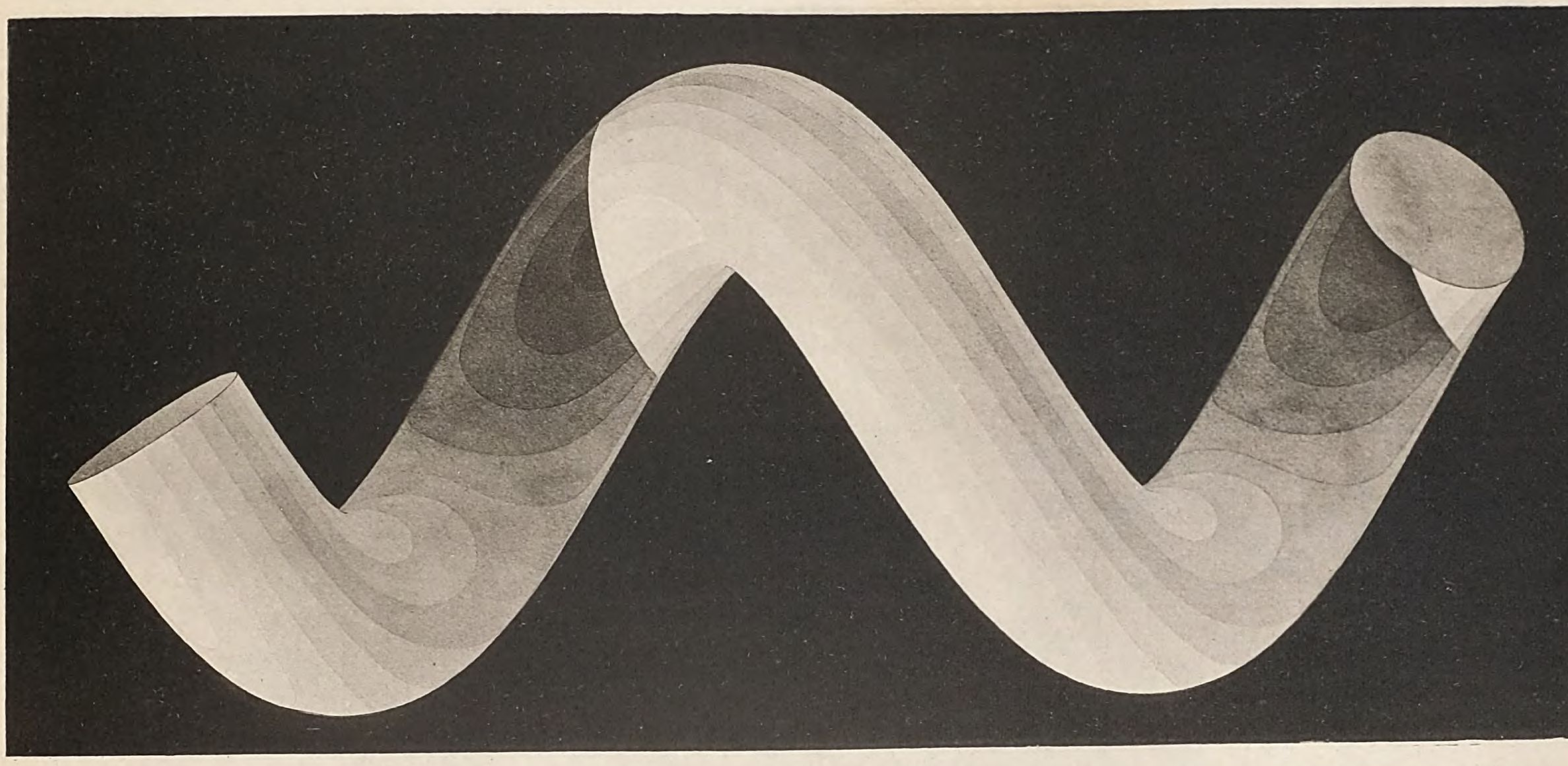
199. Windschiefes Rundfenster in gerader Mauer. Die im Grundriss punktierte Linie ist die Projektion eines vertikalen Kreises. Die Leibung erzeugt sich als rechtwinkliges, aber im Grundriss schiefes Konoid durch eine horizontale Gerade, die einerseits an diesem Kreis, andrerseits an der vertikalen Achse a gleitet.

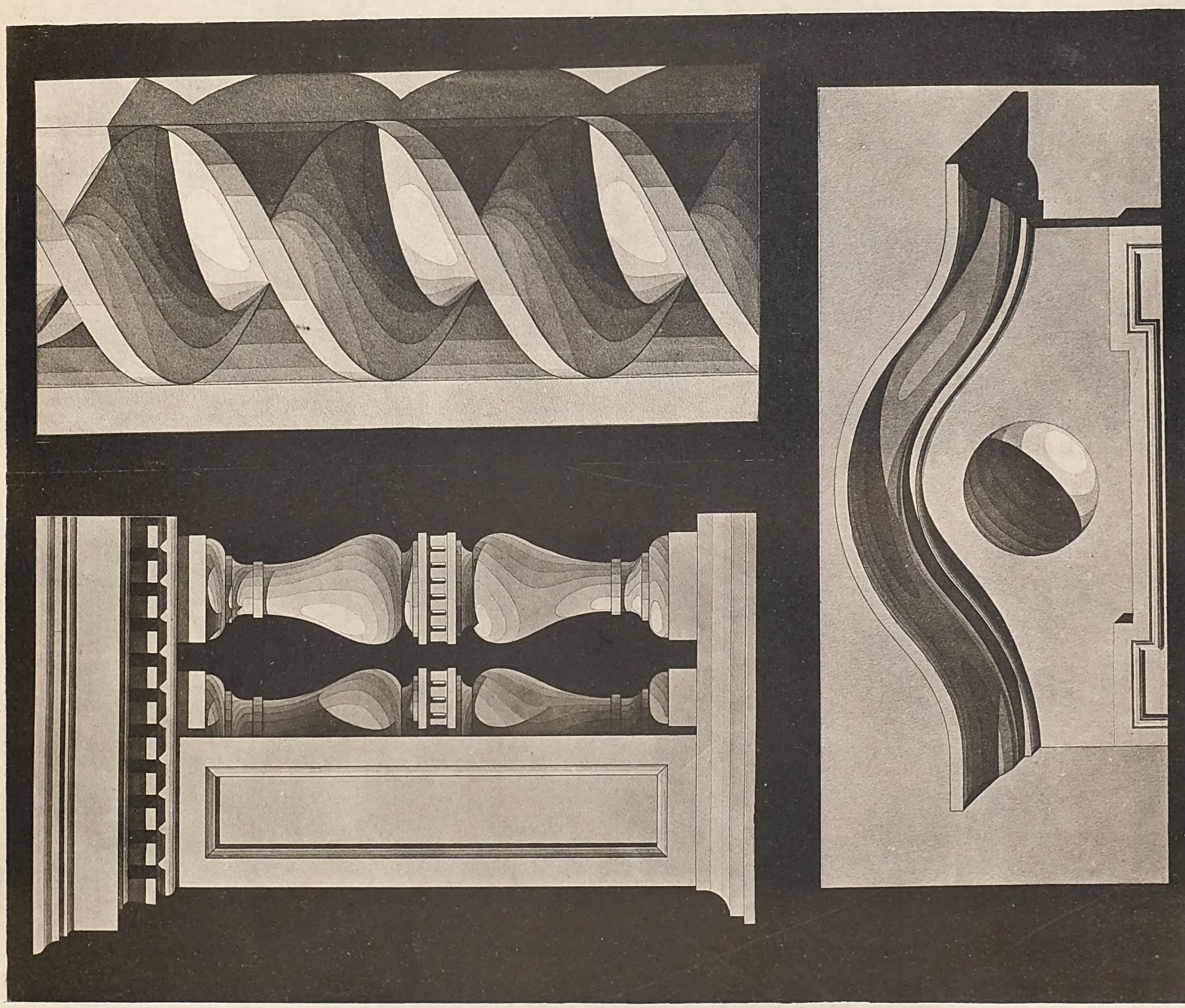
200. Windschiefer Bogen in einer aussen eckbildenden, innen cylindrischen Mauer. $m\,n$ ist ein auf dem punktierten Vertikalcylinder aufgewickelter Halbkreis. Die Leibung erzeugt sich durch eine Horizontale, die einerseits an diesem Halbkreis, andrerseits an der vertikalen Achse b gleitet.

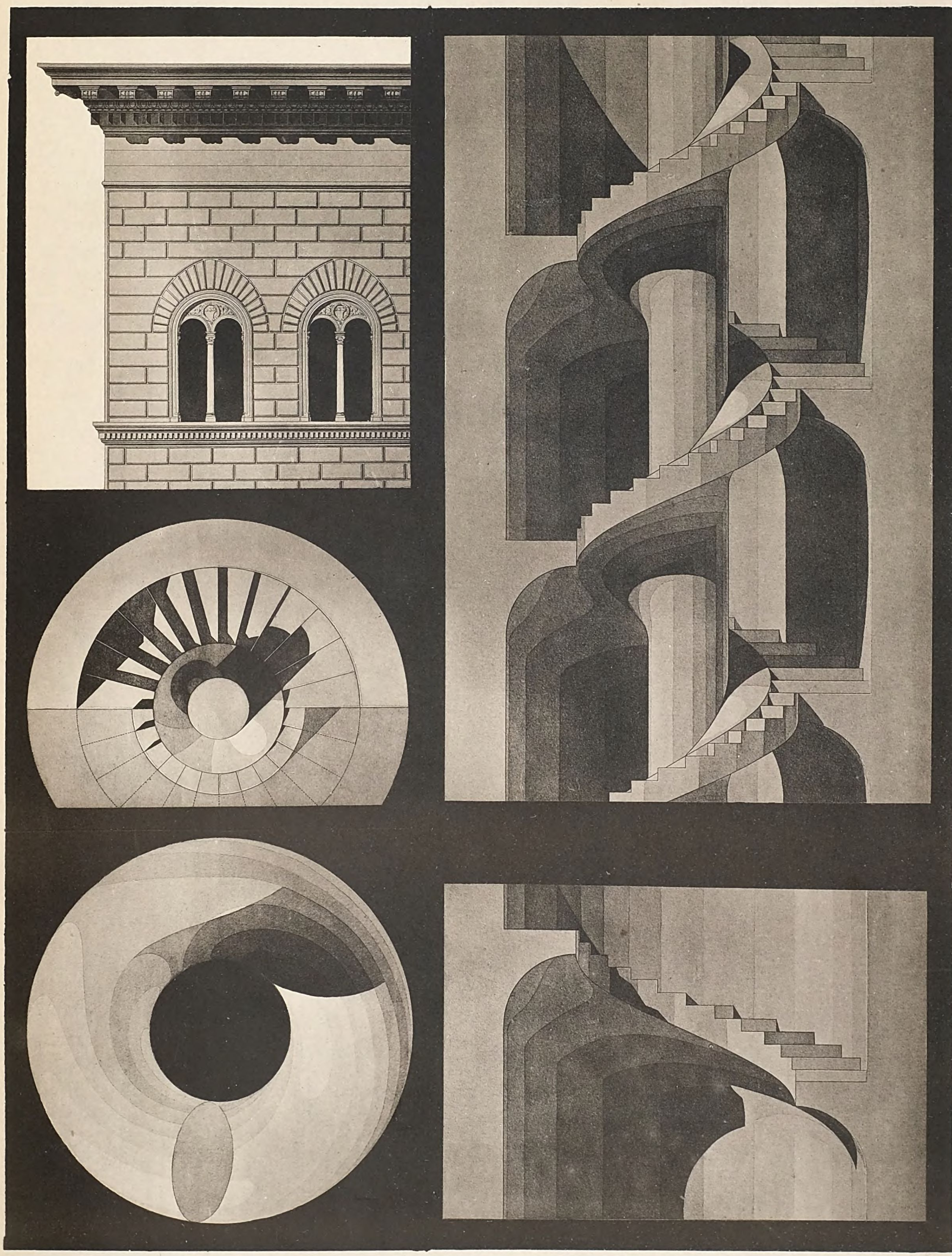
Als Gegenstände des Schattierens mit Lichtstufen, oder wenigstens der Bestimmung der Lichtstufen und Lichtstufenlinien, eignen sich die Gebilde aus den meisten oben gestellten Schattenkonstruktionsaufgaben, in erster Linie aber diejenigen aus den Nummern:

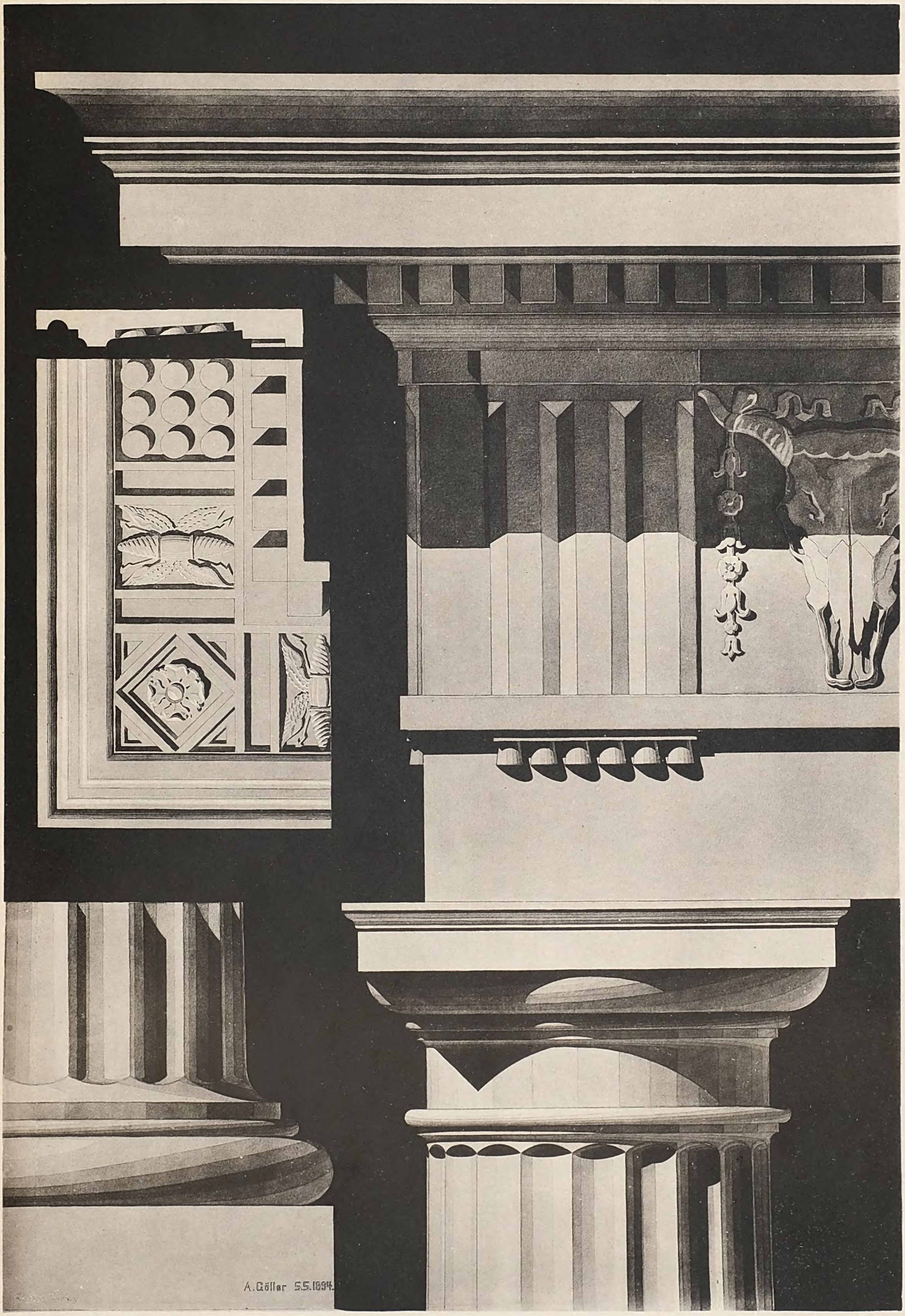
25, 26, 27, 32 42, 44, 48, 50, 52, 76, 82, 86—89, 104, 105, 110, 118, 119, 120, 124, 130—142, 144—154, 155, 158, 160, 169, 180—182, 186 197, 200.










A. Göller 5.5.1894.

G. HEINRICH
Buchbinderei
Rottenburg/L.

Paul Neff Verlag in Stuttgart.

Bühlmann, J., **Die Architektur des klassischen Alterthums.** 2. Aufl. I. Abteilung: Die Säulenordnungen. 27 Stahlstich-Tafeln mit Text in Mappe M. 12.—. II. Abteilung: Die Bogenstellungen. Thüren und Fenster, Façaden-Bildungen. 23 Stahlstich-Tafeln mit Text in Mappe M. 12.—. III. Abteilung: Die architektonische Entwicklung und Dekoration der Räume. 25 Tafeln mit Text in Mappe M. 18.—.

Burckhardt, J., **Geschichte der Renaissance in Italien.** 3. Aufl. Mit 288 Illustrationen. Brosch. M. 12.—. In elegantem Halbfranzband M. 15.—.

Gerland, Otto, **Paul, Charles und Simon Louis Du Ry.** Eine Künstlerfamilie der Barockzeit. Mit 48 Abbildungen. M. 6.—.

Gurlitt, C., **Geschichte des Barockstiles in Italien.** Mit 217 Illustrationen und zahlreichen Zierleisten, Vignetten und Initialen. Brosch. M. 16.80. In Originalband M. 20.—.

— **Geschichte des Barockstiles in Belgien, Holland, Frankreich, England.** Mit 125 Illustrationen und zahlreichen Zierleisten, Vignetten und Initialen. Brosch. M. 12.60. In Originalbd. M. 16.—.

— **Geschichte des Barockstiles in Deutschland.** Mit 164 Illustrationen, zahlreichen Zierleisten, Vignetten und Initialen. Brosch. M. 15.40, gebd. M. 19.—.

Leitfaden für den Unterricht in der Kunstgeschichte, der Baukunst, Bildnerei, Malerei und Musik, für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Bearbeitet von Director **Dr. E. Wickenhagen.** 8. vermehrte und verbesserte Auflage (42. bis 48. Tausend). Mit 181 Abbildungen. In elegantem Cartonband M. 3.50.

Lochner, Dr. Oscar Freiherr von, **Die Jesuitenkirche zu Dillingen, ihre Geschichte und Beschreibung mit besonderer Berücksichtigung des Meisters ihrer Fresken Christoph Thomas Scheffler (1700—1756).** Ein Beitrag zur Kunstgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts. Mit 19 Abbildungen. M. 3.60.

Lübke, Wilh., **Grundriss der Kunstgeschichte.** 11. Auflage. 2 Bände. Mit 706 Holzschnitt-Illustrationen, Titelbild in Lichtdruck und Portrait des Verfassers. Brosch. M. 15.—. In Originalband M. 18.—.

— **Essai d'Histoire de l'Art. Traduit par Ch. A. Koëlla.** Ouvrage illustré de 619 gravures sur bois. 2 vols. Brosch. M. 16.—, gebd. M. 20.—.

— **Geschichte der italienischen Malerei vom IV. bis ins XVI. Jahrhundert.** Neue Ausgabe. Mit 297 Illustrationen. Preis gebunden M. 20.—. Broschirt M. 16.—.

— **Geschichte der Renaissance in Deutschland.** 2. vermehrte und verbesserte Auflage. 2 Bände mit 382 Holzschnitten. Brosch. M. 28.—. In Original-Prachtband M. 35.—.

— **Geschichte der Renaissance in Frankreich.** 2. Aufl. Mit vielen neuen Illustrationen sowie textlich vermehrt. Mit 163 Holzschnitten. Preis brosch. M. 14.—. Eleg. geb. M. 17.—.

Meyer, A. G., **Lombardische Denkmäler des 14. Jahrhunderts. Giovanni di Balduccio da Pisa und die Campionesen.** Ein Beitrag zur Geschichte der oberitalienischen Plastik. Mit 19 Text-Illustrationen und 13 Vollbildern in Lichtdruck. 4°. Elegant gebund[illegible]

Schnaase, Carl, **Geschichte der bildenden Künste.** 2. Aufl. 8 Bände. Mit 972 Abbildungen. M. 105.—.

Weber, Dr. Paul, **Geistliches Schauspiel und kirchliche Kunst in ihrem Verhältnis erläutert an einer Ikonographie der Kirche und Synagoge.** Eine kunsthistorische Studie. Mit 10 Abbildungen in Lichtdruck und 18 Text-Bildern. M. 4.—.

Bilder-Atlas zu jeder Kunstgeschichte: Denkmäler der Kunst. Zur Uebersicht ihres Entwicklungsganges von den ersten künstlerischen Versuchen bis zu den Standpunkten der Gegenwart. Bearbeitet von Prof. Dr. W. Lübke und Prof. Dr. C. v. Lützow. Siebente vermehrte und verbesserte, bis auf die neueste Zeit fortgeführte Auflage. Mit ca. 2500 Darstellungen aus allen Kunstepochen und erklärendem Textband. **Klassiker-Ausgabe.** 203 Tafeln, darunter 7 in Farbendruck. In 36 Lieferungen à M. 1.—; in Original-Prachtband M. 46.—. **Pracht-Ausgabe.** 203 Tafeln, darunter 7 in Farbendruck, 185 in Stahlstich und 11 Ergänzungstafeln in Photo-Lithographie. In 36 Lieferungen à M. 2.—; in Original-Prachtband M. 86.—; in 2 Original-Prachtbänden M. 92.—. Früherer Preis M. 160.—, jetzt nur M. 46.—, resp. M. 86.—.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Göller, Adolf

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Stuttgart 1895

2 Math.a. 39 q
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11460689-8